



# آنالیز عددی



## روش تحلیلی انتخاب تابع تکرار برای تضمین همگرایی در روش نقطه ثابت

بهزاد کفاش\*، عضو هیأت علمی گروه علوم مهندسی، دانشگاه اردکان، اردکان، ایران.

bkafash@ardakan.ac.ir

هادی عزیزی، گروه ریاضی، واحد تفت، دانشگاه آزاد اسلامی، تفت، ایران.

ha.azizi@iau.ac.ir

**چکیده:** حل عددی معادلات غیرخطی یکی از مسائل بنیادی در ریاضیات کاربردی و مهندسی است. در بسیاری از موارد، این معادلات به صورت صریح قابل حل نبوده و استفاده از روش‌های تکراری برای تقریب ریشه‌ها ضروری است. یکی از روش‌های پرکاربرد، روش نقطه ثابت است که با بازنویسی معادله‌ی  $f(x) = 0$  به فرم  $x = g(x)$  عمل می‌کند. انتخاب تابع مناسب  $g(x)$  نقش تعیین‌کننده‌ای در تضمین همگرایی دنباله‌ی تکراری دارد. در این پژوهش، روشی تحلیلی برای تعیین تابع  $g(x)$  بر اساس شرط همگرایی ارائه شده است. ایده‌ی اصلی بر افزودن جمله‌ای خطی از نوع  $\beta x$  به معادله‌ی اولیه و تعیین مقدار بهینه‌ی  $\beta$  استوار است، به گونه‌ای که هم شرایط انقباضی بودن نگاشت و هم وجود ریشه در بازه‌ی مورد نظر برقرار باشد.

**کلمات کلیدی:** معادلات غیرخطی، روش نقطه ثابت، روش تکراری، قضیه نقطه ثابت باناخ، تابع تکرار.

### ۱ مقدمه و معرفی روش نقطه ثابت

بسیاری از مسائل مهندسی در نهایت به حل معادلات غیرخطی از نوع  $f(x) = 0$  منتهی می‌شوند. منظور از حل این معادله یافتن مقادیر حقیقی  $x$  است که در آن  $f(x) = 0$  برقرار باشد. این مقادیر را ریشه‌های معادله یا صفرهای تابع  $f(x)$  می‌نامند. از آنجا که در اغلب موارد یافتن ریشه‌های دقیق ممکن نیست، از روش‌های عددی برای تقریب آن‌ها استفاده می‌شود [۱-۵].

روش‌های عددی تعیین ریشه با استفاده از یک فرمول تکراری، دنباله‌ای از مقادیر را تولید می‌کنند که در شرایط مناسب به ریشه‌ی واقعی همگرا می‌شود. یکی از بنیادی‌ترین و درعین حال قابل اعتمادترین این روش‌ها، روش نقطه ثابت است. در این روش، معادله‌ی  $f(x) = 0$  به صورت  $x = g(x)$  بازنویسی می‌شود، به گونه‌ای که ریشه‌ی حقیقی  $\alpha$  رابطه‌ی  $\alpha = g(\alpha)$  را ارضا کند. با انتخاب مقدار اولیه‌ی مناسب  $x_0$ ، دنباله‌ی تکراری زیر ساخته می‌شود:

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



که در صورت برقراری شرایط خاصی به مقدار  $\alpha$  همگرا خواهد شد [۵-۱].  
قضیه (نقطه ثابت باناخ [۲]). فرض کنید تابع  $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$  هموار بوده و برای هر  $x \in [a, b]$  داشته باشیم:

$$|g'(x)| \leq L < 1.$$

در این صورت:

- (۱) معادله  $x = g(x)$  دارای دقیقاً یک ریشه‌ی حقیقی در بازه  $[a, b]$  است.
- (۲) برای هر مقدار اولیه  $x_0 \in [a, b]$  دنباله  $\{x_n\}$  حاصل از رابطه‌ی تکراری فوق به ریشه‌ی یکتا  $\alpha$  همگرا می‌شود. لازم به ذکر است که سرعت همگرایی روش نقطه ثابت با مقدار  $L$  رابطه‌ی مستقیم دارد؛ هرچه  $L$  کوچکتر باشد، همگرایی سریع‌تر است [۱].

## ۲ روش پیشنهادی برای انتخاب تابع مناسب $g(x)$ در روش نقطه ثابت

با وجود سادگی مفهوم، اجرای روش نقطه ثابت در عمل با چالش مهمی روبه‌رو است: انتخاب تابع تکرار مناسب  $g(x)$  در رویکرد کلاسیک، این انتخاب اغلب از طریق آزمون و خطا صورت می‌گیرد که فرآیندی زمان‌بر و در مواردی ناکارآمد است. برای رفع این مشکل، در این پژوهش روشی نظام‌مند بر پایه‌ی شرط همگرایی روش نقطه ثابت برای ساخت تابع  $g(x)$  پیشنهاد می‌شود.

ایده‌ی اصلی بدین صورت است که با افزودن جمله‌ای از نوع  $\beta x$  (که در آن  $\beta$  یک ثابت دلخواه و نامساوی با صفر است)، معادله‌ی اصلی  $f(x) = 0$  به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$x = \frac{f(x) + \beta x}{\beta}.$$

با تعریف تابع تکرار به صورت

$$g(x) = \frac{f(x)}{\beta} + x, \quad (1)$$

می‌توان دنباله‌ی تکراری  $x_{n+1} = g(x_n) = \frac{f(x_n)}{\beta} + x_n$  را برای تقریب ریشه تشکیل داد که در آن هدف، تعیین مقداری از  $\beta$  است که شرایط همگرایی تابع  $g(x)$  یعنی

$$|g'(x)| \leq L < 1, \quad \text{و} \quad g([a, b]) \subseteq [a, b], \quad (2)$$

به‌طور همزمان برقرار باشند.

قضیه. فرض کنید تابع  $f(x)$  بر روی بازه‌ی بسته  $[a, b]$  مشتق‌پذیر باشد و تابع تکراری  $g(x)$  به صورت رابطه (۱) تعریف شود، که در آن  $\beta$  عددی نامعلوم و مخالف صفر است. دنباله‌ی (۲) به ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی  $f(x) = 0$  همگرا خواهد بود، اگر پارامتر  $\beta$  به گونه‌ای انتخاب شود که شرایط زیر برقرار باشند:

$$-2 < \frac{f'(x)}{\beta} < 0, \quad \forall x \in [a, b], \quad (3)$$

$$0 \leq \frac{f(a)}{\beta} \leq b - a, \quad (4)$$

$$a - b \leq \frac{f(b)}{\beta} \leq 0 \quad (5)$$



**اثبات.** شرط (۳) تضمین می‌کند که  $g(x)$  در بازه‌ی  $[a, b]$  یک نگاشت انقباضی است. بر اساس قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ، در این حالت دنباله‌ی  $\{x_n\}$  حاصل از  $x_{n+1} = g(x_n)$  به نقطه‌ی یکتایی  $\alpha$  همگرا می‌شود که  $g(\alpha) = \alpha$  و در نتیجه  $f(\alpha) = 0$ . شرایط (۴) و (۵) نیز تضمین می‌کنند که بازه‌ی  $[a, b]$  تحت اثر  $g(x)$  به خودش نگاشت می‌یابد (یعنی  $g([a, b]) \subseteq [a, b]$ ) و بدین ترتیب تمام تقریب‌ها در محدوده‌ی معتبر باقی می‌مانند.

**نتیجه.** از ترکیب سه شرط فوق، بازه‌ای از مقادیر مجاز  $\beta$  به دست می‌آید که هم انقباضی بودن و هم پایداری عددی نگاشت  $g(x)$  را تضمین می‌کند. مقدار بهینه‌ی  $\beta$  را می‌توان از حل همزمان این نامعادلات به دست آورد؛ در این پژوهش، این محاسبات با استفاده از نرم‌افزار Maple انجام شده است. روش پیشنهادی ضمن حذف نیاز به آزمون و خطا در انتخاب تابع تکرار، چارچوبی تحلیلی و قابل تعمیم برای تضمین همگرایی ارائه می‌دهد. افزون‌براین، سادگی پیاده‌سازی عددی آن موجب می‌شود این روش در آموزش مفاهیم همگرایی عددی و طراحی الگوریتم‌های ریشه‌یابی کاربرد گسترده‌ای داشته باشد.

## ۳ نتایج عددی

برای بررسی روش پیشنهادی، تابع زیر در بازه‌ی  $[0, 1]$  در نظر گرفته شده است [۳]:

$$f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2, \quad f'(x) = e^x - 2x + 3.$$

با جایگذاری در شرط همگرایی،  $| \frac{f'(x)}{\beta} + 1 | < 1$  داریم:

$$-2 < \frac{e^x - 2x + 3}{\beta} < 0.$$

از آنجایی که در  $[0, 1]$  داریم  $e^x - 2x + 3 > 0$  در  $[0, 1]$  داریم  $\beta < -2$ . شرایط مرزی نگاشت بازه به خود نیز به صورت

$$0 \leq -\frac{1}{\beta} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{e}{\beta} \leq 0$$

نوشته می‌شوند که به ترتیب منجر به قیود  $\beta \leq -1$  و  $\beta \leq -e$  می‌گردند. در نتیجه، اشتراک سه شرط فوق، بازه‌ی مجاز پارامتر  $\beta$  به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\boxed{\beta \leq -e.}$$

بنابراین، برای هر  $\beta \leq -e$ ، تابع تکرار

$$g(x) = \frac{f(x)}{\beta} + x$$

در بازه‌ی  $[0, 1]$  انقباضی بوده و دنباله‌ی  $\{x_n\}$  حاصل از  $x_{n+1} = g(x_n)$  به ریشه‌ی معادله‌ی  $f(x) = 0$  همگرا می‌شود. این مثال با فرض  $\beta = -1.5e$  حل شده و مقادیر تقریبی  $x^{(k)}$  به همراه خطای نسبی آن‌ها در جدول ۱ گزارش شده است.

مشاهده می‌شود که در هر دو روش، مقادیر تقریب به ریشه‌ی نهایی  $x \approx 0.257530285439861$  همگرا می‌شوند. با این حال، همان‌گونه که در جدول ۱ نشان داده شده است، روش پیشنهادی با توجه به  $\beta$  انتخاب شده دارای نرخ همگرایی سریع‌تری است. در این روش خطای نسبی از مرتبه  $10^{-1}$  در تکرار نخست به حدود  $10^{-11}$  در تکرار دهم کاهش می‌یابد، در حالی که در روش کلاسیک نقطه‌ثابت خطا در همان مرحله هنوز از مرتبه  $10^{-6}$  است. این مقایسه نشان می‌دهد که روش پیشنهادی با انتخاب تابع تکرار مناسب و اعمال شرط همگرایی، دقت بالاتری داشته و به تعداد تکرار کمتری برای دستیابی به جواب نهایی نیاز دارد. در نتیجه، می‌توان برتری این روش نسبت به روش کلاسیک نقطه‌ثابت را از نظر سرعت همگرایی و پایداری عددی **489** روشنی مشاهده کرد.

روش نقطه ثابت		روش پیشنهادی		تکرار $k$
خطای نسبی	$x^{(k)}$	خطای نسبی	$x^{(k)}$	
$1.49468 \times 10^0$	0.200426243099957	$7.88359 \times 10^{-1}$	0.279585947443965	۱
$2.65162 \times 10^{-1}$	0.272749065098375	$7.87000 \times 10^{-2}$	0.259187861193949	۲
$7.54786 \times 10^{-2}$	0.253607156584130	$5.96109 \times 10^{-3}$	0.257651973553059	۳
$1.91190 \times 10^{-2}$	0.258550376264936	$4.37878 \times 10^{-4}$	0.257539202797097	۴
$4.99383 \times 10^{-3}$	0.257265636335093	$3.20893 \times 10^{-5}$	0.257530938820545	۵
$1.29406 \times 10^{-3}$	0.257598985162191	$2.35121 \times 10^{-6}$	0.257530333313028	۶
$3.36025 \times 10^{-4}$	0.257512454514831	$1.72273 \times 10^{-7}$	0.257530288947523	۷
$8.72080 \times 10^{-5}$	0.257534913615251	$1.26224 \times 10^{-8}$	0.257530285696864	۸
$2.26361 \times 10^{-5}$	0.257529084167955	$9.24835 \times 10^{-10}$	0.257530285458691	۹
$5.87530 \times 10^{-6}$	0.257530597238332	$6.77668 \times 10^{-11}$	0.257530285441239	۱۰

جدول ۱: مقایسه مقادیر تقریب و خطای نسبی برای  $\beta = -1.5e$  روش پیشنهادی در مقابل روش کلاسیک نقطه ثابت

## ۴ نتایج

در این مطالعه، یک روش تحلیلی برای انتخاب تابع تکرار  $g(x)$  در روش نقطه ثابت ارائه شد که با تعیین پارامتر  $\beta$  امکان تضمین همگرایی را فراهم می‌کند. تحلیل‌های نظری نشان دادند که با رعایت شرایط انقباضی بودن نگاشت و نگاشت بازه به خود، دنباله‌ی تکراری  $x_{n+1} = g(x_n)$  به یکتایی ریشه حقیقی معادله همگرا می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهد که دنباله‌ی تقریبی به مقدار نهایی ریشه همگرا می‌شود و خطای نسبی با پیشرفت تکرارها به میزان بسیار کمی کاهش می‌یابد. این امر بیانگر مناسب بودن تابع تکراری پیشنهادی است. مزیت اصلی روش ارائه شده، حذف نیاز به آزمون و خطای دستی برای انتخاب تابع تکراری و ارائه چارچوب تحلیلی برای تضمین همگرایی است. به دلیل سادگی پیاده‌سازی و قابلیت تعمیم به مسائل مشابه، این رویکرد می‌تواند در حل طیف گسترده‌ای از معادلات غیرخطی در مسائل مهندسی و علوم کاربردی مورد استفاده قرار گیرد.

## مراجع

- [۱] بابلیان، ا. (۱۳۷۶). آنالیز عددی. دانشگاه پیام نور.
- [2] Atkinson, K. E. (2008). *An introduction to numerical analysis*. John wiley & sons.
- [3] Faires, J. D., & Burden, R. L. (2012). *Numerical methods*, 4th. Cengage Learning.
- [4] Cheney, W., & Kincaid, D. (1998). *Numerical mathematics and computing*, International Thomson Publishing.
- [5] Stoer, J., & Bulirsch, R. (1993). *Introduction to Numerical Analysis*, 3rd ed., Springer, New York.

# کاربرد روش تفاضل متناهی در حل عددی معادلات دیفرانسیل حاکم بر جو

ایرج رضانی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه فیزیک، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

[irajramezani1351@pnu.ac.ir](mailto:irajramezani1351@pnu.ac.ir)

چکیده: در این مقاله با استفاده از روش تفاضل متناهی معادلات حاکم بر جو یک منطقه از شهر الیگودرز شبیه سازی عددی می شود. برای حل بخش فرارفتی معادله در دستگاه معادله های دوبعدی، از طرح واره ی دوگامی لکس - وندروف استفاده می کنیم. این روش مناسب ترین روش برای مسائل دو بعدی و غیرخطی است. مدل دو بعدی میان مقیاس، در موقعیت یاد شده اجرا و میدان قائم دمای نهفته و هم چنین میدان قائم مؤلفه ی شرق سوی سرعت مورد تحقیق و بررسی قرار گرفت. البته در شبکه مورد نظر در اجرای برنامه، گام های زمانی و مکانی مختلفی در نظر گرفته شد که در بعضی موارد ناپایداری ایجاد می شد که از معایب روش تفاضل متناهی می باشد

6-7 November 2025

کلمات کلیدی: تفاضل متناهی - شبکه - طرح واره - جو

## ۱. مقدمه

روش تفاضل متناهی (Finite Difference Method) برای اولین بار در قرن هجدهم توسط نیوتن (Isaac Newton) و پیش از او لاپلاس (Pierre-Simon Laplace) ابداع شد. این روش برای حل مسائل دیفرانسیل و انتگرال مورد استفاده قرار می گیرد و به محاسبه تقریبی مشتقات و انتگرال ها کمک می کند. در ریاضیات، تفاضل متناهی یک رده از ریاضی است که شامل مباحث مربوط به مفهوم تفاضل و انتگرال برای توابع متناهی (مثلاً فقط برای توابعی

<sup>۱</sup> ایرج رضانی



با فاصله معین) است. تفاضل متناهی شامل مفاهیمی مانند تغییرات محلی توابع یا مشتقات جزئی و کلیه‌ی بررسی‌های نظری و عملی آنها می‌شود. این حوزه از ریاضیات، اهمیت زیادی در بسیاری از علوم و مهندسی‌ها داشته و به طور گسترده‌ای در فیزیک، ریاضیات کاربردی، مهندسی، اقتصاد و علوم کامپیوتر به کار گرفته می‌شود. یکی از کاربردهای مهم تفاضل محدود در تحلیل عددی، به خصوص در معادلات دیفرانسیلی عددی می‌باشد که هدف در راه حل‌های عددی مرتبه‌ای و معادلات دیفرانسیلی ناکامل و عادی جزئی می‌باشد. این نظریه مشتقات را در معادلات دیفرانسیل با تفاضلات محدود که آن‌ها را تقریب می‌زند، جایگزین می‌کند. روش‌های نتیجه‌گیری شده، روش‌های تفاضل محدود نام می‌گیرند.

یکی از روش‌هایی که برای حل عددی معادلات حاکم بر جو استفاده می‌شود، روش تفاضل متناهی می‌باشد، که به کمک آن می‌توان یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به یک معادله تفاضلی تبدیل کرد که در نتیجه با روش‌های جبری قابل حل خواهد بود. به این منظور ابتدا می‌بایست فضای پیوسته را به مجموعه‌ی متناهی از نقاط گسسته تقسیم کرد که به مجموعه‌ی آنها شبکه و به هر از نقاط تقسیم بندی در شبکه یک نقطه‌ی شبکه گفته می‌شود.

در این تحقیق با استفاده از این روش و از طرح واره‌ی لکس و ندرروف معادلات حاکم بر جو در یک نقطه از ایران را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

## ۲. فرآیند

در دستگاه مختصات دکارتی، معادله‌های حرکت، پیوستگی و دمای نهفته را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{DU}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} - f \mathbf{k} \times \mathbf{U} + \mathbf{F}_r \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (2)$$

$$\frac{D\theta_v}{Dt} = H_{\theta_v} + K_H \left( \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

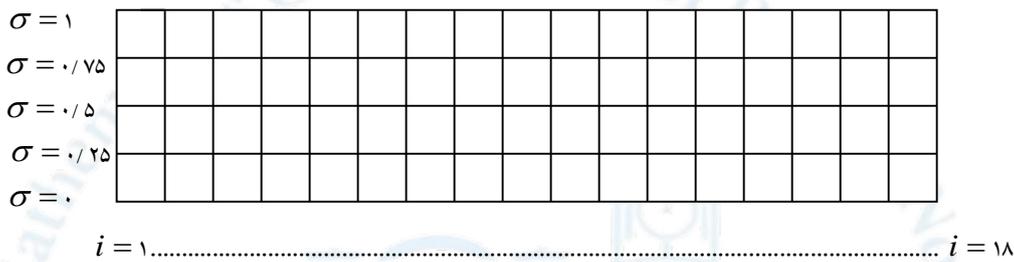
که در آن  $\mathbf{U}$  بردار سرعت،  $\rho$  چگالی،  $-\frac{1}{\rho} \nabla p$  جمله گرادیان فشار،  $\mathbf{g}$  نیروی وزن به ازای جرم واحد،  $-f \mathbf{k} \times \mathbf{U}$  نیروی کوریولیس،  $\mathbf{F}_r$  جمله‌ی اصطکاکی،  $\theta_v$  دمای نهفته‌ی مجازی،  $H_{\theta_v}$  آهنگ تغییرات دمای نهفته به دلیل گرمای نهان و  $K_H$  ضریب حرکت شناختی انتشار گرما است. برای مناطقی که ناهمواری‌های سطح زمین قابل توجه هستند از دستگاه مختصاتی با اید استفاده کنیم که با این ناهمواری‌ها مطابقت داشته باشد. ما دستگاه مختصات دکارتی را با آرایه قائم‌سیگما برگزیده ایم که در این دستگاه آرایه‌های افقی با  $x$  و  $y$  و آرایه‌ی قائم آن با  $\sigma$  معرفی می‌گردد. آرایه قائم‌سیگما، اولین بار توسط فیلیپس و همکارانش در سال ۱۹۷۷ معرفی گشته است و امروزه با شکل‌های متنوع و با مقاصد و استفاده‌های مختلفی معرفی می‌گردد.

ما در این مدل از تعریف  $\sigma \equiv \frac{z-h}{H-h}$  (۴) استفاده کرده ایم که در آن  $z$  ارتفاع هندسی نقطه،  $h(x,y)$  ارتفاع

ناهمواری و  $H$  ارتفاع نقطه اوج مدل می‌باشد و داریم:  $0 \leq \sigma \leq 1$  و  $h \leq z \leq H$

برای ساده سازی معادله ها از روش انحراف از مقدار بنیادی استفاده می کنیم . اگر در دستگاه معادله های دو بعدی به ترتیب متغیرهای زیر را قرار دهیم ، خواهیم داشت: (۵)  $u^* = u'$  و (۶)  $\sigma = \sigma'$  و (۷)  $\theta = \theta_{in}(\sigma) + \theta'$  که علامت  $in$  نشان دهنده ی مقدار بنیادی و علامت پریم انحراف از مقدار بنیادی می باشد. محیط کار ، صفحه ی قائمی به شکل مستطیل می باشد، در یک شبکه  $18 \times 5$  ، که طول آن ۱۷ کیلومتر در راستای افقی و عرض ۲ کیلومتر در راستای قائم است. در طرح واره ای که در نظر گرفتیم ، ابعاد شبکه برابر با  $\Delta x = 1 \text{ km}$  و  $\Delta \sigma = 0.25$  می باشد که

$i=1$  ایستگاه الیگودرز، صفر در نظر گرفته می شود و  $i=18$  قلّه کوه عسگران به ارتفاع ۴۸۵ متر نسبت به ایستگاه الیگودرز در نظر گرفته شده است.



برای حل بخش فرارفتی معادله در دستگاه معادله های دوبعدی ، از طرح واره ی دوگامی لکس - وندروف استفاده می کنیم. این روش مناسب ترین روش برای مسائل دو بعدی و غیرخطی است و معمولاً برای گام های زمانی فرد روش انتشاری و برای گام های زمانی زوج روش سه ترازوی - مرکزی به کار برده می شود. انتشاری که در گام های زمانی فرد به محیط اعمال می شود ، باعث می گردد که از ناپایداری جلوگیری نماید.

$$u_{i,k}^{n+1} = \frac{1}{2} \times \left( u_{i+1,k}^n + u_{i-1,k}^n \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \times u_{i,k}^n \times \left( u_{i+1,k}^n - u_{i-1,k}^n \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta \sigma} \times \sigma_{i,k}^n \times \left( u_{i,k+1}^n - u_{i,k-1}^n \right) \quad (8)$$

از طرح واره ی بالا در گام های زمانی فرد و در گام های زمانی زوج از طرح واره ی زیر استفاده می کنیم:

$$u_{i,k}^{n+2} = u_{i,k}^n - \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \times u_{i,k}^{n+1} \times \left( u_{i+1,k}^{n+1} - u_{i-1,k}^{n+1} \right) - \frac{2\Delta t}{2\Delta \sigma} \times \sigma_{i,k}^{n+1} \times \left( u_{i,k+1}^{n+1} - u_{i,k-1}^{n+1} \right) \quad (9)$$

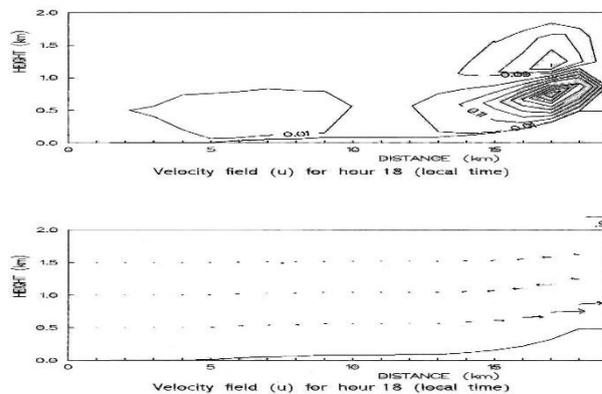
برای توابع نیرو در معادله ها و در مشتق های مرتبه ی یکم از روش مرکزی و برای جمله های انتشار از روش صریح استفاده می کنیم.

با استفاده از اطلاعاتی که برای دما و فشار در ایستگاه ثبت کردیم مقدار میانگین آن ها را به دست می آوریم که به

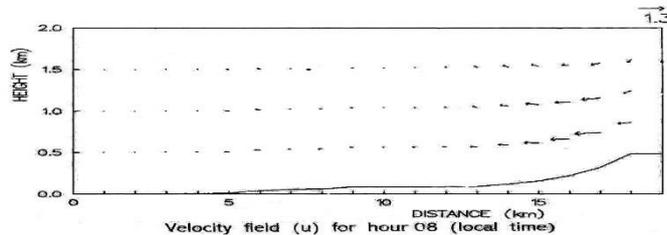
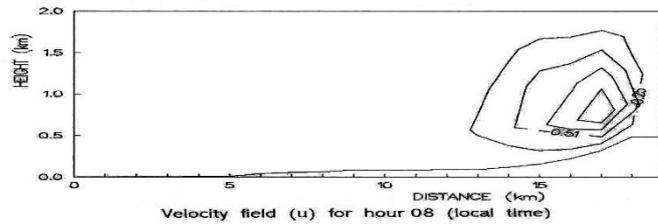
$$p_m = 80690 \text{ Pa} \quad \text{و} \quad T_m = 278 \text{ k}$$

برای این که محاسبه ها در مرزها دقیق تر باشد ، می توانیم مرزهای جانبی را گسترش دهیم ( پیلکه - ۲۰۰۲ ) ، برای این منظور تعداد نقاط را از ۱۸ نقطه به ۲۰ نقطه گسترش می دهیم. سرعت افقی  $u$  روی مرزهای جانبی ثابت

- و صفر در نظر گرفته می شود و برای سایر متغیرها ، درمرزهای جانبی داریم:  $\frac{\partial \theta'}{\partial x} = 0$  و  $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$  و برای مرزهای بالا و پایین به ترتیب داریم: در مرز سخت پایین:  $u = \dot{\sigma} = 0$  و در مرز بالایی:  $u = \dot{\sigma} = 0$  و  $\frac{\partial \theta'}{\partial \sigma} = 0$
- فرایند محاسبه ها در برنامه ی رایانه ای در هر گام زمانی به روش زیر است:
- ۱- با استفاده از مقدارهای تعیین شده ی  $\theta$  و  $\theta_{in}$  در سطح زمین ، مقادیر  $\theta'$  را محاسبه می کنیم.
  - ۲- با آگاهی از این مسئله که در آغاز برنامه مقادیر  $u'$  و  $\theta'$  صفر هستند ، مقدار  $\dot{\sigma}$  را محاسبه می کنیم.
  - ۳- جمله ی مربوط به  $\frac{\partial \theta'}{\partial t}$  به دست می آید.
  - ۴- محاسبه ی  $\frac{\partial u}{\partial t}$  انجام می گیرد.
  - ۵- با استفاده از مقادیر پیش بینی شده ی  $u$  و  $\theta$  و تکرار مراحل قبلی ، این فرآیند تا زمانی که پیش بینی فراسنج ها به محدوده ی زمانی مورد نظر برسد ، تکرار می گردد.



(شکل ۱) میدان قائم مؤلفه ی شرق سوی سرعت برای ساعت ۱۸ محلی (خروجی مدل پس از ۱۰ ساعت)



(شکل ۲) میدان قائم مؤلفه ی شرق سوی سرعت برای ساعت ۸ محلی (خروجی مدل پس از ۲۴ ساعت)

### ۳. نتیجه گیری

مدل دو بعدی میان مقیاس ، درموقعیت یاد شده اجرا و میدان قائم دمای نهفته و هم چنین میدان قائم مؤلفه ی شرق سوی سرعت مورد تحقیق و بررسی قرارگرفت. درشرایط اولیه ی اجرای برنامه (طلوع آفتاب) به علت تغییر دما برای هوای دارای رطوبت مساوی ، درسطح ، نیرویی برای ایجاد حرکت وجود نداشته و محیط فشار گرای است ، و سرعت صفر می باشد. با تغییر دما ، شیب برداری افقی چگالی ایجاد گشته درنتیجه محیط چگال گرای و حرکت ایجاد می گردد. زمانی که نیروها وشتاب صفر شد (غروب آفتاب) ، می بینیم که سرعت صفر نمی گردد و علت آن این است که باد ، سرعت اولیه دارد و زمان لازم دارد تا اصطکاک بستری و ناروانی ، سرعت اولیه را صفر کرده و محیط را فشارگرای نماید . بعد از غروب آفتاب و با تشعشع بیش تر کوه نسبت به دشت دوباره با تغییر دما وپیدایش شیب برداری افقی دما ؛ محیط چگال گرای می شود و دوباره حرکت ایجاد می گردد. البته در شبکه مورد نظردر اجرای برنامه، گام های زمانی و مکانی مختلفی در نظر گرفته شد که در بعضی موارد ناپایداری ایجاد می شد که از معایب روش تفاضل متناهی می باشد اما در حالت ذکر شده برای ۲۴ ساعت پایدار بود.

### ۴. منابع

- 1- Arya , S.P.S , 2001 , Micro metreology. Academic Press , PP 9-45
- 2- Pielke , R.A , 2002 , Meso – Scale Meteorological Modeling
- 3- Peter Olver (2013). *Introduction to Partial Differential Equations*. Springer Science & Business Media. p. 182.



## بررسی حل معادله واندرپیل با استفاده از روش هم محلی لاگرانژ

فاطمه شایان فرد<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

[fshayanfard@pnu.ac.ir](mailto:fshayanfard@pnu.ac.ir)

**چکیده:** در این مقاله روش محلی بر پایه چندجمله ایهای لاگرانژ برای حل عددی معادله دیفرانسیل غیرخطی واندرپیل مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا مبانی روش بیان می شود سپس روش مذکور برای معادله واندرپیل با شرایط اولیه مشخص اعمال شده و نتایج عددی حاصل با روش های کلاسیک موجود مانند روش رانگ- کوتای مرتبه چهارم مقایسه می شود. نتایج نشان می دهند که روش پیشنهادی ضمن سادگی پیاده سازی از دقت قابل قبولی در تقریب رفتار نوسانی سیستم های غیرخطی برخوردار است و می تواند در بازه های زمانی طولانی پایداری مناسبی داشته باشد.

**کلمات کلیدی:** معادله دیفرانسیل غیرخطی واندرپیل، روش هم محلی، چند جمله ایهای لاگرانژ.

### ۱. مقدمه

معادله واندرپیل یکی از معادلات دیفرانسیل غیرخطی معروف در دینامیک و فیزیک است که رفتار نوسانی سیستمهایی با میرایی غیرخطی را مدل سازی می کند. این معادله توسط بالتازار واندرپیل، مهندس و فیزیکدان هلندی در دهه ۱۹۲۰ برای توصیف رفتار مدارهای الکتریکی ارائه شد. معادله واندرپیل در حوزه های مختلفی دارای کاربرد است. بعنوان مثال در زیست شناسی فیتزهیو [4] و ناگومو [5] از معادله واندرپیل به عنوان مدلی برای پتانسیل های کار نوروون ها استفاده کرده اند. در زلزله شناسی برای مدلسازی حرکت صفحات در گسل ها کاربرد دارد [3] همچنین در آواسازی برای مدل چپ و راست پرده صوتی نوسانگرها استفاده شده است [2].

فرم کلی معادله واندرپیل به صورت زیر است:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0,$$

که در آن  $t$  پارامتر زمان و  $x$  تابعی از  $t$  است که نشان دهنده موقعیت سیستم و  $\mu$  مقداری ثابت است که میزان غیرخطی بودن و میرایی سیستم به آن بستگی دارد. جواب این معادله به صورت تحلیلی قابل دستیابی نیست و برای

<sup>۱</sup> فاطمه شایان فرد



حل آن از روشهای عددی کمک می گیریم. تاکنون روش رانگ- کوتای مرتبه ۴ دقیق ترین و پرکاربردترین روش [1] برای حل این معادله بوده است.

ما در این مقاله به بررسی حل این معادله به کمک روش هم محلی لاگرانژ می پردازیم در ابتدا. روش را بیان کرده و سپس آن را روی معادله واندرپل پیاده سازی می کنیم.

## ۲. بیان روش

معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (1)$$

را همراه با شرایط اولیه

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad (2)$$

در نظر می گیریم. می خواهیم جواب این معادله را روی فاصله  $I = [0, T]$  تقریب بزنیم. برای این منظور ابتدا بازه

$I$  را به  $N$  قسمت مساوی تقسیم می کنیم،  $\sigma_n = (t_n, t_{n+1}]$  و  $\bar{\sigma}_n = [t_n, t_{n+1}]$  در نظر می گیریم. حال

$$S_{m+1}^{(1)}(I_h) = \{v \in C^1(I); v|_{\bar{\sigma}_n} \in \pi_{m+1}\},$$

را فضای چندجمله ایهای قطعه ای هموار از درجه حداکثر  $m+1$  در نظر می گیریم. به منظور بکارگیری روش هم محلی مجموعه نقاط هم محلی که در آنها جواب هم محلی بطور دقیق در معادله صدق می کند را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X_h = \{t_{n,i} = t_n + c_i h; 0 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_m \leq 1, n = 0, \dots, N-1\}. \quad (3)$$

اگر  $u_h(t_n + vh)$  تقریب جواب روی  $\sigma_n$  باشد، تعریف می کنیم:

$$u_h''(t_n + vh) = \sum_{j=1}^m L_j(v) X_{n,j}, \quad v \in (0, 1], \quad (4)$$

که در آن  $L_j(v)$  ها توابع پایه ای لاگرانژ هستند که در نقاط  $0 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_m \leq 1$  محاسبه شده اند و  $X_{n,j} = u_h''(t_{n,j})$ .

اگر از طرفین رابطه (۴) روی فاصله  $[0, v]$  انتگرالگیری کنیم، خواهیم داشت:

$$\int_0^v u_h''(t_n + sh) ds = \int_0^v \sum_{j=1}^m L_j(s) ds X_{n,j}.$$

با اعمال تغییر متغیر  $z = t_n + sh$  داریم:

$$\frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_n + vh} u_h''(z) dz = \sum_{j=1}^m \int_0^v L_j(s) ds X_{n,j},$$

و در نتیجه

$$\frac{1}{h} (u_h'(t_n + vh) - u_h'(t_n)) = \sum_{j=1}^m \beta_j(v) X_{n,j}, \quad (5)$$

که در آن  $\beta_j(v) = \int_0^v L_j(s) ds$ .



حال اگر  $u'_h(t_n) = x'_n$  در نظر بگیریم رابطه (۵) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u'_h(t_n + vh) = x'_n + h \sum_{j=1}^m \beta_j(v) X_{n,j}, \quad (6)$$

که تقریبی از  $x'$  خواهد بود. مجدداً روی  $[0, v]$  از رابطه بالا انتگرال می گیریم، در این صورت

$$u_h(t_n + vh) = hx_n + hvx'_n + h^2 \sum_{j=1}^m \gamma_j(v) X_{n,j}, \quad (7)$$

که در آن  $x_n = u_h(t_n)$  و  $\gamma_j(v) = \int_0^v \beta_j(s) ds$

روابط (۴) و (۶) و (۷) در نقاط هم محلی بطور دقیق در معادله صدق می کنند، لذا

$$u''_h(t_{n,i}) - \mu(1 - u_h^2(t_{n,i}))u'_h(t_{n,i}) + u_h(t_{n,i}) = 0.$$

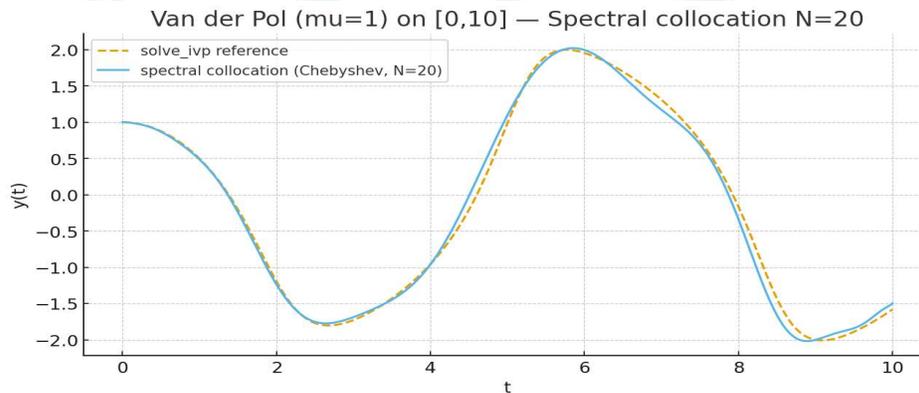
با توجه به اینکه  $t_{n,i} = t_n + c_i h$  و با قرار دادن  $v = c_i$  خواهیم داشت:

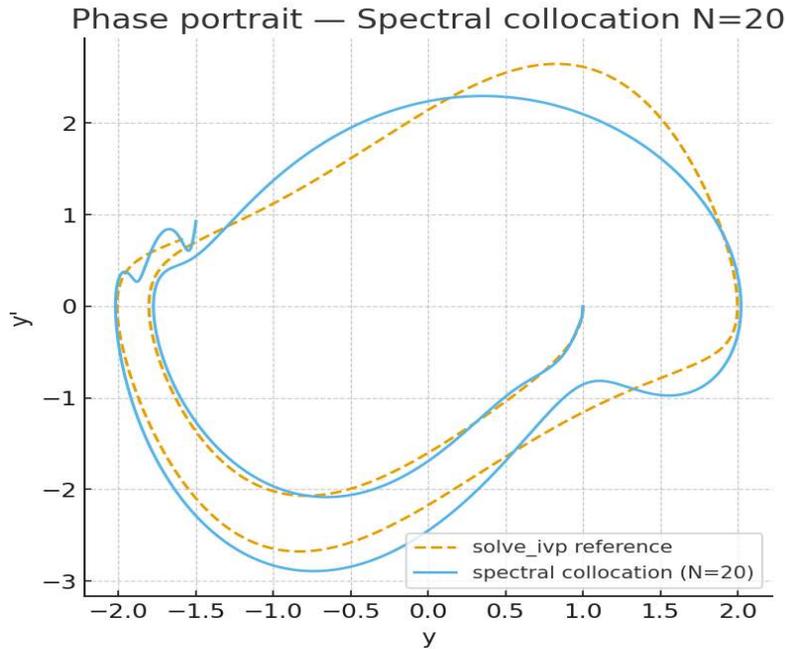
$$\sum_{j=1}^m L_j(c_i) X_{n,j} - \mu[1 - (hx_n + hc_i x'_n + h^2 \sum_{j=1}^m \gamma_j(c_i) X_{n,j})^2][x'_n + h \sum_{j=1}^m \beta_j(c_i) X_{n,j}] + hx_n + hc_i x'_n + h^2 \sum_{j=1}^m \gamma_j(c_i) X_{n,j} = 0.$$

بنابراین یک دستگاه معادلات غیرخطی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$X_{n,i} - \mu[1 - (hx_n + hc_i x'_n + h^2 \sum_{j=1}^m \gamma_j(c_i) X_{n,j})^2][x'_n + h \sum_{j=1}^m \beta_j(c_i) X_{n,j}] + hx_n + hc_i x'_n + h^2 \sum_{j=1}^m \gamma_j(c_i) X_{n,j} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

با حل این دستگاه  $X_{n,j}$  ها و در نتیجه  $u_h$  مشخص می شوند.





#### ۴. نتیجه گیری

با توجه به اینکه بازه زمانی بزرگ و سیستم غیرخطی است یک چند جمله ای تک دامنه حتی با  $N = 20$  هنوز همه نوسانات جواب را دقیقاً نمی گیرد. برای دقت بالاتر روی بازه طولانی استفاده از روش های چند بخشی جواب مناسب تری می دهد.

#### منابع

1. Biazar, J., Navidyan, M. (2014) Implicit Runge-Kutta method for Van Der Pol problem, Journal of Appl. and Comp. Math., 4, 6-11.
2. Cartwright, M. L., Eguiluz, V., Hernandez-Garcia, E. and Piro, O. (1999), Dynamics of elastic excitable media, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Energy, 9, 2197-2202.
3. Derdzinski, A. (1980) Classification of certain compact Riemannian manifolds with harmonic curvature and non-parallel Ricci tensor, Math. Z., 172, 273-280.
4. Fitzhough, R., (1961) Impulses and Physiological models of nerve membranes, Biophysics J., 1, 445-466.
5. Nagumo, J., Arimoto, S. and Yoshizawa, S. (1962) An active pulse transmission line simulating nerve axon. Proc. IRE, 50, 2061-2070.



## بررسی عددی اثر پارامتر غیرخطی $\mu$ بر دینامیک معادله واندرپل با استفاده از

### روش رانگ - کوتای مرتبه چهارم

فاطمه شایان فرد<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

[fshayanfard@pnu.ac.ir](mailto:fshayanfard@pnu.ac.ir)

**چکیده:** این مقاله به بررسی عددی رفتار دینامیکی معادله دیفرانسیل غیرخطی واندرپل<sup>۲</sup> می پردازد. این معادله که رفتار نوسانگرهایی با میرایی غیرخطی را مدل سازی می کند، فاقد پاسخ تحلیلی بسته است و حل آن مستلزم استفاده از روش های عددی است. روش عددی مورد استفاده در این پژوهش، رانگ - کوتای مرتبه چهارم است، که به عنوان یک روش استاندارد برای حل عددی سیستم های دینامیکی انتخاب شده است. تمرکز اصلی بر تحلیل تأثیر پارامتر میرایی غیرخطی  $\mu$  بر شکل چرخه حدی و ماهیت نوسانات سیستم است. نتایج شبیه سازی نشان می دهند که با افزایش پارامتر  $\mu$ ، دینامیک سیستم از نوسانات شبه-هارمونیک به سمت نوسانات ناآرام می رود. در مقادیر بزرگ  $\mu$ ، معادله به یک مسئله عددی سخت<sup>۳</sup> تبدیل می شود، که کارایی روش صریح رانگ - کوتای مرتبه چهارم را به دلیل محدودیت های پایداری مطلق، به شدت کاهش داده و استفاده از گام های زمانی بسیار کوچک را اجباری می کند.

**کلمات کلیدی:** معادله واندرپل، پارامتر  $\mu$ ، روش رانگ - کوتا.

## ۱. مقدمه

معادله واندرپل یکی از معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم در حوزه سیستم های دینامیکی است. این معادله رفتار نوسانگرهایی با میرایی غیرخطی را مدل سازی می کند که در آن، میرایی بسته به دامنه نوسان، تغییر علامت می دهد (میرایی منفی برای دامنه های کوچک و میرایی مثبت برای دامنه های بزرگ). این معادله ابتدا توسط بالتازار واندرپل، مهندس و فیزیکدان هلندی، در دهه ۱۹۲۰ میلادی برای توصیف رفتار مدارهای الکتریکی ارائه شد. کاربردهای این مدل در حوزه های متعددی گسترش یافته است. به عنوان مثال، در زیست شناسی، از مدل واندرپل برای توصیف پتانسیل های عمل نوروها استفاده شده است [4,5]. همچنین، این معادله در مدل سازی حرکت صفحات در گسل ها در زلزله شناسی [3] و در مدل های نوسانگر پرده صوتی در آواسازی کاربرد دارد [2].

### ۱-۱. فرم استاندارد معادله و نقش پارامتر $\mu$

فرم کلی معادله دیفرانسیل غیرخطی واندرپل به صورت زیر است:

<sup>۱</sup> فاطمه شایان فرد

<sup>۲</sup> Van Der Pol

<sup>۳</sup> Stiff



$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

که در آن  $t$  پارامتر زمان و  $x$  نشان دهنده موقعیت سیستم و  $\mu$  مقداری ثابت است که میزان غیرخطی بودن و میرایی سیستم به آن بستگی دارد. تأثیر این پارامتر بر رفتار سیستم بسیار چشمگیر است و مقدار این پارامتر سه حالت دینامیکی مجزا را مشخص می‌کند. حالت شبه-خطی ( $\mu$  کوچک)، حالت غیرخطی ( $\mu$  متوسط)، و حالت غیرخطی قوی ( $\mu$  بزرگ). در واقع، این پارامتر، عامل کلیدی در تعیین شکل مدار چرخه حدی است.

## ۲-۱ ضرورت حل عددی و جایگاه روش رانگ- کوتای مرتبه چهار

از آنجایی که حل تحلیلی برای معادله واندربیل امکان‌پذیر نیست، برای استخراج و مطالعه پاسخ‌های دینامیکی آن، باید از روش‌های عددی استفاده کرد. روش رانگ- کوتای مرتبه چهارم در بسیاری از مطالعات، به عنوان دقیق‌ترین روش موجود برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی، از جمله واندربیل، مورد استفاده قرار گرفته است [1]. هدف اصلی این پژوهش، بررسی کمی و کیفی تأثیر تغییرات پارامتر غیرخطی  $\mu$  در حالت‌های کوچک، متوسط و بزرگ بر رفتار دینامیکی معادله واندربیل است. این تحلیل شامل ارزیابی تغییر شکل چرخه حدی و بررسی ماهیت نوسانات برحسب زمان است. همچنین، کارایی و محدودیت‌های روش صریح رانگ- کوتای مرتبه چهارم در مواجهه با چالش‌های عددی ناشی از تبدیل سیستم به یک مسئله سخت در مقادیر بالای  $\mu$ ، مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت.

## ۲-۲ روش رانگ- کوتای مرتبه چهار

برای اعمال روش رانگ- کوتای مرتبه چهار بر روی معادله واندربیل، ابتدا لازم است آن را به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول تبدیل کرد. متغیر مکان را به عنوان  $X_1$  و مشتق مرتبه اول آن را به عنوان  $X_2$  تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} X_1 = x \\ X_2 = \frac{dx}{dt} \end{cases} \quad (2)$$

با جایگذاری در معادله واندربیل خواهیم داشت:

$$\frac{dX_2}{dt} - \mu(1-X_1^2)X_2 + X_1 = 0 \quad (3)$$

بنابراین، دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول به شکل زیر حاصل می‌شود:

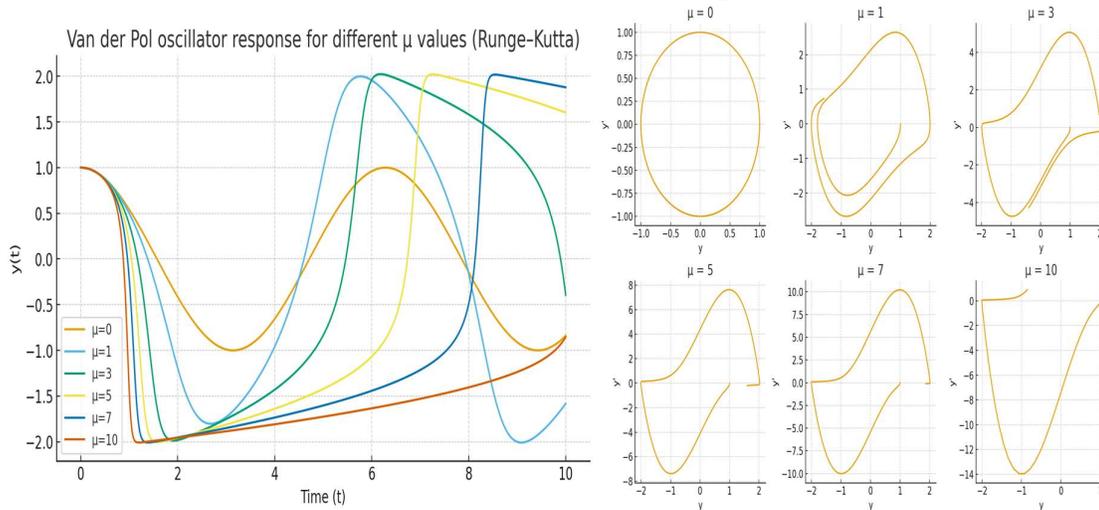
$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = X_2 \\ \frac{dX_2}{dt} = \mu(1-X_1^2)X_2 - X_1 \end{cases} \quad (4)$$

این دستگاه در واقع بیانگر سیستم در فضای  $(X_1, X_2)$  است. تحلیل پاسخ سیستم در این فضا، مهم‌ترین ابزار برای بررسی دینامیک سیستم‌های غیرخطی و مشاهده چرخه حدی است.



#### ۴. تحلیل نتایج عددی و اثر پارامتر $\mu$

برای بررسی اثر پارامتر  $\mu$ ، شبیه‌سازی عددی با استفاده از الگوریتم رانگ- کوتای مرتبه چهارم برای مقادیر  $\mu = 0, 1, 3, 5, 7, 10$  انجام شد که نتایج آن در شکل ۱ نشان داده شده است:



شکل ۱: شکل سمت راست نمودار فاز و شکل سمت چپ تغییرات برحسب زمان می باشد.

در حالی که پارامتر  $\mu$  کوچک بوده و میرایی غیرخطی ضعیف است سیستم تقریباً به یک نوسانگر هارمونیک با میرایی بسیار کم شباهت دارد.

پاسخ دینامیکی: نوسانات مشاهده شده در حوزه زمان، تقریباً سینوسی هستند و تغییر شکل بسیار کمی نسبت به موج سینوسی دارند. زمان مورد نیاز برای همگرایی مسیر حالت به سمت چرخه حدی پایدار نسبتاً طولانی است. نمودار فاز و چرخه حدی ترسیم شده در فضای فاز تقریباً یک دایره یا یک بیضی است که مرکز آن در مبدأ قرار دارد. دامنه نوسان حول مقدار ۲ ثابت می شود. از نظر محاسباتی، این سیستم یک مسئله غیر سخت محسوب می شود. روش رانگ- کوتای مرتبه چهارم صریح به راحتی و با گام‌های زمانی  $h$  نسبتاً بزرگ، پایداری خود را حفظ کرده و پاسخ دقیق را ارائه می دهد.

درحالی که  $\mu$  متوسط است اثر جمله غیرخطی به وضوح مشاهده می شود.

پاسخ دینامیکی: نوسانات سیستم کاملاً غیرخطی هستند، اما هنوز دارای شکلی نسبتاً ملایم و پیوسته هستند. در نمودار فاز چرخه حدی از یک دایره، دور شده و به شکل یک مسیر بیضوی غیرمتمقان و واضح درمی آید.

با افزایش پارامتر  $\mu$  به مقادیری چون ۵ یا بالاتر، همانطور که در شکل مشاهده می شود رفتار دینامیکی سیستم به طور بنیادین تغییر می کند. چرخه حدی در نمودار فاز به شدت تیز و شبیه به یک مستطیل کج با گوشه‌های تند می شود. حرکت در امتداد اضلاع بلند مستطیل بسیار آهسته و حرکت در طول اضلاع کوتاه بسیار سریع است.

معادله واندربیل در حالت  $1 \ll \mu$  به یک مسئله سخت تبدیل شود. برای حل عددی سیستم‌های سخت، روش‌های صریح مانند رانگ- کوتای مرتبه چهارم با چالش پایداری مواجه می شوند [5]. روش رانگ- کوتای مرتبه چهارم صریح، برای حفظ پایداری مطلق خود، مجبور است گام زمانی  $h$  را به شدت کوچک انتخاب کند، به طوری که  $h$  باید متناسب با کوچکترین مقیاس زمانی سیستم باشد. این امر، حجم محاسبات مورد نیاز را برای پوشش یک بازه زمانی طولانی به صورت نمایی افزایش داده و کارایی روش رانگ- کوتا عملاً از بین می رود.

### نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

این پژوهش به بررسی عددی تأثیر پارامتر میرایی غیرخطی  $\mu$  بر دینامیک معادله واندرپول با استفاده از روش رانگ- کوتای کلاسیک مرتبه چهارم پرداخت. تبدیل معادله مرتبه دوم به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، امکان پیاده‌سازی رانگ- کوتای مرتبه چهارم و تحلیل رفتار سیستم در فضای فاز را فراهم ساخت. یافته‌های کلیدی نشان داد که پارامتر  $\mu$  به صورت محوری شکل چرخه حدی و نوع نوسانات سیستم را تعیین می‌کند. در مقادیر کوچک  $\mu$ ، سیستم چرخه حدی دایره‌ای دارد. اما با افزایش  $\mu$  به مقادیر بزرگ، سیستم وارد نوساناتی می‌شود که مشخصه آن پرش‌های سریع و تغییرات ناگهانی در کنار دوره‌های طولانی حرکت آهسته است.

مهمترین نتیجه عددی این تحقیق، آشکارسازی محدودیت‌های روش رانگ- کوتای مرتبه چهارم صریح در مواجهه با سیستم‌های دینامیکی سخت است. حالت  $\mu$  بزرگ، ماهیت مسئله را به یک معادله سخت تبدیل می‌کند که در آن، روش رانگ- کوتای مرتبه چهارم با محدودیت‌های پایداری مواجه شده و مجبور به استفاده از گام‌های زمانی بسیار کوچک می‌شود. این امر، اگرچه دقت روش را حفظ می‌کند، اما کارایی محاسباتی آن را به شدت کاهش می‌دهد.

### منابع

1. Biazar, J., Navidyan, M. (2014) Implicit Runge-Kutta method for Van Der Pol problem, Journal of Appl. and Comp. Math., 4, 6-11.
2. Cartwright, M. L., Eguiluz, V., Hernandez-Garcia, E. and Piro, O. (1999), Dynamics of elastic excitable media, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Energy, 9, 2197-2202.
3. Derdzinski, A. (1980) Classification of certain compact Riemannian manifolds with harmonic curvature and non-parallel Ricci tensor, Math. Z., 172, 273-280.
4. Fitzhugh, R., (1961) Impulses and Physiological models of nerve membranes, Biophysics J., 1, 445-466.
5. Nagumo, J., Arimoto, S. and Yoshizawa, S. (1962) An active pulse transmission line simulating nerve axon. Proc. IRE, 50, 2061-2070.

## روش اویلر متعادل بهینه برای حل عددی معادلات انتگرال ایتو-ولترا

آتنا غیائی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

Ghiasi.atena@pnu.ac.ir

چکیده: در این مقاله، روش اویلر متعادل بهینه (OBEM) برای حل عددی معادلات انتگرال ایتو-ولترا ارائه شده است. روش پیشنهادی با بهینه‌سازی توابع کنترل بر اساس تحلیل خطای غالب در روش اویلر متعادل استاندارد، باعث بهبود پایداری و دقت می‌شود. توابع کنترل بهینه با استفاده از مشتقات جزئی توابع  $F$  و  $G$  نسبت به متغیر حالت تعریف می‌شوند. تحلیل پایداری بر روی معادله آزمون کانولوشن نشان می‌دهد که روش OBEM ناحیه پایداری بزرگتری نسبت به روش اویلر صریح و روش اویلر متعادل استاندارد دارد. نتایج عددی حاکی از بهبود در پایداری و حفظ مرتبه همگرایی قوی 0.5 است.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال ایتو-ولترا، روش اویلر متعادل بهینه، پایداری میانگین مربعی، توابع کنترل بهینه

### ۱ مقدمه

معادلات انتگرال ایتو-ولترا تصادفی (SVIEs) چارچوبی ریاضی برای مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی با وابستگی به تاریخچه‌ی زمانی هستند. این معادلات به طور کلی به فرم

$$U(t) = \varphi(t) + \int_{t_0}^t F(t, s, U(s))ds + \int_{t_0}^t G(t, s, U(s))dW(s) \quad (1)$$

بیان می‌شوند که در آن  $U(t)$  جواب معادله در زمان  $t$ ،  $\varphi(t)$  تابع اولیه،  $F(t, s, U_s)$  عامل رانش (جزء قطعی معادله)،  $G(t, s, U_s)$  عامل نویز (جزء تصادفی معادله) و  $W(s)$  یک فرآیند وینر استاندارد است. با توجه به عدم دسترسی به حل تحلیلی برای اغلب این معادلات، روش‌های عددی نقش حیاتی ایفا می‌کنند. روش اویلر صریح، با وجود سادگی و دارا بودن مرتبه همگرایی قوی 0.5 [۱]، برای مسائل سخت ناپایدار است. روش‌های متعادل [۲] و اخیراً روش اویلر متعادل (BEM) [۳] برای بهبود پایداری ارائه شده‌اند. با این حال، انتخاب تجربی توابع کنترل در BEM یک نقطه ضعف محسوب می‌شود. نوآوری این مقاله: در این کار، روش اویلر متعادل بهینه (OBEM) را معرفی می‌کنیم که در آن توابع کنترل به‌طور سیستماتیک و بر اساس مشتقات جزئی  $F$  و  $G$  بهینه شده‌اند. این امر منجر به بهبود همزمان پایداری و دقت، بدون آسیب زدن به مرتبه همگرایی قوی روش می‌شود. ساختار این مقاله به صورت زیر است: در بخش ۲، روش اویلر متعادل بهینه (OBEM) ارائه شده است. بخش ۳ به تحلیل پایداری روش پیشنهادی می‌پردازد. بخش ۴ نتایج عددی را ارائه می‌دهد و در نهایت بخش ۵ به نتیجه‌گیری می‌پردازد.



## ۲ روش اویلر متعادل بهینه (OBEM)

در این بخش، روش اویلر متعادل بهینه (OBEM) برای حل عددی معادله انتگرال ایتو-ولترا ارائه می‌شود. بر اساس روش اویلر متعادل (BEM) ارائه شده در [۳]، معادله انتگرال ایتو-ولترا (۱) را در نظر می‌گیریم، سپس فرض‌های اساسی زیر در سراسر این مقاله برقرار هستند:

توابع  $F$  و  $G$  به ترتیب در شرایط لپشیتز سراسری و رشد خطی صدق می‌کنند، یعنی ثابت  $H > 0$  وجود دارد به طوری که:

$$|F(t, s, u) - F(t, s, v)| \vee |G(t, s, u) - G(t, s, v)| \leq H|u - v|, \quad |F(t, s, u)| \vee |G(t, s, u)| \leq H(1 + |u|) \quad (۲)$$

روش اویلر متعادل استاندارد (BEM): روش اویلر متعادل استاندارد [۳] برای معادله (۱) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_n = \varphi_n + \sum_{i=0}^{n-1} (E + D_i)^{-1} F(t_n, t_i, Z_i) \Delta t + \sum_{i=0}^{n-1} (E + D_i)^{-1} G(t_n, t_i, Z_i) \Delta W_i \quad (۳)$$

که در آن  $D_i$  ماتریس کنترل به صورت زیر تعریف می‌شود (ماتریس کنترل معکوس پذیر و کراندار است):

$$D_i = d_0(t_n, t_i, Z_i) \Delta t + d_1(t_n, t_i, Z_i) |\Delta W_i| \quad (۴)$$

توابع کنترل بهینه: ما توابع کنترل بهینه‌ای را پیشنهاد می‌دهیم که از تحلیل کمینه‌سازی جمله خطای غالب در روش استاندارد BEM به دست آمده‌اند. جمله خطای غالب در روش استاندارد به صورت زیر است:

$$\mathcal{E}_{\text{غالب}} = \sum_{i=0}^{n-1} (E + D_i)^{-1} D_i G(t_n, t_i, Z_i) \Delta W_i \quad (۵)$$

توابع کنترل بهینه برای روش OBEM به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$d_0^*(t, s, u) = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u}(t, s, u), \quad d_1^*(t, s, u) = -\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \frac{\partial G}{\partial u}(t, s, u) \quad (۶)$$

که در آن  $\frac{\partial G}{\partial u}$  و  $\frac{\partial F}{\partial u}$  به ترتیب نشان‌دهنده مشتقات جزئی نسبت به آرگومان سوم (متغیر حالت) توابع  $F$  و  $G$  هستند. روش اویلر متعادل بهینه (OBEM): روش کامل اویلر متعادل بهینه (OBEM) به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$Z_n = \varphi_n + \sum_{i=0}^{n-1} (E + D_i^*)^{-1} F(t_n, t_i, Z_i) \Delta t + \sum_{i=0}^{n-1} (E + D_i^*)^{-1} G(t_n, t_i, Z_i) \Delta W_i \quad (۷)$$

با ماتریس کنترل بهینه:  $D_i^* = d_0^*(t_n, t_i, Z_i) \Delta t + d_1^*(t_n, t_i, Z_i) |\Delta W_i|$

## ۳ تحلیل پایداری و همگرایی برای روش OBEM

تحلیل پایداری: برای تحلیل پایداری میانگین مربعی، از معادله آزمون کانونولوشن زیر استفاده می‌شود [۴]:

$$U_t = U_0 + \int_0^t (\lambda + \rho(t-s)) U_s ds + \int_0^t \eta U_s dW_s \quad (۸)$$

مشتقات جزئی و توابع کنترل بهینه به این صورت محاسبه می‌شوند:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(t, s, u) = \lambda + \rho(t-s), \quad \frac{\partial G}{\partial u}(t, s, u) = \eta, \quad d_0^* = -\frac{1}{2}(\lambda + \rho(t_n - t_i)), \quad d_1^* = -\frac{\eta}{\sqrt{\Delta t}}$$



رابطه بازگشتی؛ لم: هنگامی که روش  $OBEM$  بر معادله آزمون کانولوشن اعمال شود، جواب عددی در این رابطه بازگشتی صدق می‌کند:  $Z_{n+1} = (p_n^{\text{opt}} + \psi_n^{\text{opt}})Z_n - (q_{n-1}^{\text{opt}} + \psi_{n-1}^{\text{opt}})Z_{n-1}$  که در آن:

$$p_n^{\text{opt}} = 2 + \frac{1}{1 + D_n^*}(\lambda + \rho\Delta t)\Delta t, \quad q_{n-1}^{\text{opt}} = 1 + \frac{1}{1 + D_{n-1}^*}\lambda\Delta t, \quad \psi_n^{\text{opt}} = \frac{1}{1 + D_n^*}\eta\Delta W_n$$

ماتریس پایداری بهینه: قضیه. اگر ماتریس  $M_{\text{opt}}$  داده شده در رابطه زیر دارای شعاع طیفی کمتر از ۱ باشد، روش  $OBEM$  برای معادله آزمون کانولوشن پایدار میانگین مربعی است.

$$M_{\text{opt}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ m_{21}^{\text{opt}} & m_{22}^{\text{opt}} & m_{23}^{\text{opt}} \\ m_{31}^{\text{opt}} & m_{32}^{\text{opt}} & m_{33}^{\text{opt}} \end{pmatrix} \quad (9)$$

که درایه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} m_{21}^{\text{opt}} &= -[E(p_{n-1}^{\text{opt}}q_{n-1}^{\text{opt}}) - E(q_{n-1}^{\text{opt}})E(p_{n-1}^{\text{opt}}) + E((\psi_{n-1}^{\text{opt}})^2)], & m_{22}^{\text{opt}} &= -E(q_{n-1}^{\text{opt}}), & m_{23}^{\text{opt}} &= E(p_n^{\text{opt}}), \\ m_{31}^{\text{opt}} &= E((q_{n-1}^{\text{opt}})^2) + [1 - 2E(p_n^{\text{opt}})]E((\psi_{n-1}^{\text{opt}})^2) & & & & - 2E(p_n^{\text{opt}})[E(p_{n-1}^{\text{opt}}q_{n-1}^{\text{opt}}) - E(q_{n-1}^{\text{opt}})E(p_{n-1}^{\text{opt}})], \\ m_{32}^{\text{opt}} &= -2E(p_n^{\text{opt}})E(q_{n-1}^{\text{opt}}), & m_{33}^{\text{opt}} &= E((p_n^{\text{opt}})^2 + (\psi_n^{\text{opt}})^2) \end{aligned}$$

تحلیل همگرایی: بر اساس قضیه ۳.۱ در مرجع [۳]، روش‌های اویلر متعادل دارای مرتبه همگرایی قوی ۰.۵ می‌باشند. روش پیشنهادی  $OBEM$  نیز با حفظ این مرتبه همگرایی، بهبود در پایداری و دقت عددی ایجاد می‌کند. تحت مفروضات ۱.۱ و ۲.۱ در [۳]، روش اویلر متعادل بهینه ( $OBEM$ ) دارای مرتبه همگرایی قوی ۰.۵ است،

$$\begin{aligned} \text{به این معنی که برای تمام: } & E(|U_n - Z_n|^2) \leq K\Delta t, \quad 0 \leq n \leq N \\ \text{میزان خطا را به این صورت بدست می‌آوریم:} & \text{Error} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |U_{\text{exact}}(t_i) - Z_{\text{method}}(t_i)|^2} \end{aligned}$$

#### ۴ مثال‌های عددی

مثال اول: معادله آزمون کانولوشن (۸) را در  $t \in [0, 20]$  در نظر می‌گیریم و دو حالت زیر برای پارامترها در نظر گرفته می‌شود:

$$\text{حالت I: } \eta = 3/2; \rho = -32; \lambda = -2 \quad \text{حالت II: } \eta = 3/2; \rho = -32; \lambda = -3$$

مثال دوم: معادله غیرخطی زیر از [۳] را در نظر می‌گیریم:

$$U_t = U_0 + \kappa^2 \int_0^t \cos(U_s) \sin^2(U_s) ds - \kappa \int_0^t \sin^2(U_s) dW_s, \quad t \in [0, 1]$$

جواب دقیق آن با پارامترهای  $U_0 = 1.0$  و  $\kappa = 0.5$  به صورت  $U_t = \text{arccot}(\kappa W_t + \cot(U_0))$  است، به طوریکه:

$$F(t, s, u) = \kappa^2 \cos(u) \sin^2(u), \quad \frac{\partial F}{\partial u} = \kappa^2 [-\sin^3(u) + 2 \cos^2(u) \sin(u)],$$

$$G(t, s, u) = -\kappa \sin^2(u), \quad \frac{\partial G}{\partial u} = -2\kappa \sin(u) \cos(u),$$

$$d_0^* = -\frac{1}{2}\kappa^2 [-\sin^3(Z_i) + 2 \cos^2(Z_i) \sin(Z_i)], \quad d_1^* = \frac{2\kappa}{\sqrt{\Delta t}} \sin(Z_i) \cos(Z_i)$$

جدول ۲: خطای میانگین مربعی

Timestep	ExplicitEuler	BEM	OBEM
$\Delta t = 0.1$	0.0892	0.0765	0.0631
$\Delta t = 0.05$	0.0623	0.0538	0.0442
$\Delta t = 0.025$	0.0431	0.0376	0.0308
$\Delta t = 0.0125$	<b>0.0302</b>	<b>0.0264</b>	<b>0.0215</b>

جدول ۱: شعاع طیفی ماتریس پایداری  $M_{opt}$

Methods	$d_0$	$d_1$	Spectrum(I)	Spectrum(II)
Explicit Euler	0	0	0.8789	1.8373
BEM	0	$\eta$	0.6950	0.7912
BEM	0	$\frac{1}{2}$	0.7291	0.9340
BEM	$-\frac{1}{2}$	$\eta$	0.7745	0.8918
BEM	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\eta}{2}$	0.7011	0.7465
OBEM	$d_0^*$	$d_1^*$	<b>0.6214</b>	<b>0.7038</b>

## ۵ نتیجه گیری

در این مقاله، روش اویلر متعادل بهینه شده ( $OBEM$ ) برای حل معادلات انتگرال ایتو-ولترا ارائه شد. نوآوری اصلی در تعریف سیستماتیک توابع کنترل بهینه بر اساس مشتقات جزئی توابع رانش (قطعی) و نویز معادله نهفته است. تحلیل‌های پایداری مبتنی بر شعاع طیفی ماتریس پایداری نشان می‌دهد که  $OBEM$  ناحیه پایداری بسیار گسترده‌تری در مقایسه با روش اویلر صریح و روش متعادل استاندارد ایجاد می‌کند. نتایج عددی نیز تأیید می‌کنند که این روش نه تنها پایداری را بهبود می‌بخشد، بلکه خطای میانگین مربعی را نیز کاهش می‌دهد، ضمن اینکه مرتبه همگرایی قوی 0.5 را حفظ می‌نماید. روش پیشنهادی به عنوان یک ابزار محاسباتی قوی‌تر و دقیق‌تر برای حل سیستم‌های تصادفی سخت عمل می‌کند که اهمیت بهینه‌سازی مبتنی بر ساختار معادله را به خوبی نشان می‌دهد.

## مراجع

- [۱] Wen, C., & Zhang, T. (۲۰۰۹) Rectangular method on stochastic Volterra equations. International Journal of Applied Mathematics and Statistics, ۱۴(J۰۹), ۱۲-۲۶.
- [۲] Milstein, G. N., Platen, E., & Schurz, H. (۱۹۹۸) Balanced implicit methods for stiff stochastic systems. SIAM Journal on Numerical Analysis, (۳)۳۵, ۱۰۱۹-۱۰۱۰.
- [۳] Ren, Q., He, Y., & Liu, J. (۲۰۲۵) Balanced Euler methods for the strong approximation of stochastic Volterra integral equations. Applied Mathematics Letters, ۱۷۰, ۱۰۹۶۱۳.
- [۴] Li, M., Huang, C., Hu, P., & Wen, J. (۲۰۲۱) Mean-square stability and convergence of a split-step theta method for stochastic Volterra integral equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, ۳۸۲, ۱۱۳۰۷۷.



## روش متعادل دوگام مارویاما بهینه برای سیستم‌های تصادفی سخت

آتنا غیائی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

Ghiasi.atena@pnu.ac.ir

چکیده: در این مقاله، یک بهبود در روش متعادل دوگام مارویاما برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی سخت ارائه می‌شود. نوآوری اصلی در بهینه‌سازی سیستماتیک پارامترهای کنترل بر اساس تحلیل پایداری مجانبی نهفته است. روش پیشنهادی همگرایی با مرتبه  $1/2$  را در معنای میانگین-مربع حفظ نموده و ناحیه پایداری وسیع‌تری نسبت به روش‌های متعارف فراهم می‌آورد. نتایج عددی (بدست آمده توسط نرم افزار پایتون) حاکی از تحمل گام‌های زمانی تا  $2.5$  برابر روش اوپلر-مارویاما استاندارد بوده و بهبود  $30 - 40\%$  در دقت نسبت به روش‌های متعادل دوگام موجود مشاهده شده است. این ویژگی‌ها، روش حاضر را به گزینه‌ای مناسب برای مسائل عملی با ماهیت سخت تبدیل می‌نماید.

کلمات کلیدی:

معادلات دیفرانسیل تصادفی، پایداری میانگین-مربع، روش متعادل دوگام، سیستم‌های سخت، بهینه‌سازی پارامتر

### ۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل تصادفی ( $SDEs$ ) ابزاری حیاتی در مدل‌سازی سیستم‌های سخت ( $Stiff\ Systems$ ) هستند. از آنجا که حل تحلیلی این معادلات معمولاً مقدور نیست، توسعه روش‌های عددی کارآمد با پایداری قوی نظیر روش‌های متعادل ضمنی [۱] ضروری است. اخیراً، رن و همکاران [۲] این مفهوم را گسترش داده و روش متعادل دوگام مارویاما ( $BISM$ ) را پیشنهاد نمودند. اگرچه روش ( $BISM$ ) پایداری مناسبی را فراهم می‌کند، اما انتخاب پارامترهای کنترل در آن به صورت تجربی صورت گرفته و فاقد مبنای تحلیلی برای تضمین پایداری مجانبی روش است. در این مقاله، ما یک بهبود سیستماتیک در روش ( $BISM$ ) ارائه می‌دهیم که آن را روش متعادل دوگام مارویاما بهینه ( $OBTSM$ ) می‌نامیم. نوآوری اصلی، استخراج شرایط کافی پایداری میانگین مربع (قضیه ۳) و طراحی فرمول‌های تحلیلی برای توابع کنترل بهینه  $D_n^*$  بر اساس این شرایط نظری است. روش  $OBTSM$  ضمن حفظ همگرایی مرتبه  $1/2$ ، ناحیه پایداری وسیع‌تری نسبت به روش‌های متعارف فراهم می‌آورد. ساختار این مقاله به این صورت است: در بخش ۲، روش پیشنهادی ارائه می‌شود. در بخش ۳، تحلیل همگرایی و پایداری میانگین-مربع بررسی می‌گردد. بخش ۴ به ارائه نتایج عددی و بخش ۵ به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

### ۲ روش متعادل دوگام مارویاما بهینه‌شده

معادله دیفرانسیل تصادفی  $d$ -بعدی و روش متعادل دوگام بهینه‌شده ( $OBTSM$ ) را به ترتیب زیر در نظر بگیرید:

$$dU(t) = f(t, U(t))dt + g(t, U(t))dW(t), \quad U(t_0) = U_0 \in \mathbb{R}^d, \quad t \in [t_0, T]. \quad (1)$$



در اینجا تابع ضریب رانش (تابع ضریب قطعی)  $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  و تابع ضریب انتشار (تابع ضریب تصادفی)  $g : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  قابل اندازه‌گیری فرض می‌شوند. فرآیند  $W(t)$  یک حرکت براونی استاندارد یک‌بعدی است که روی فضای احتمال کامل  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  تعریف شده و نسبت به فیلتراسیون  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq t_0}$  که در شرایط متعارف صدق می‌کند، سازگار است. مقدار اولیه  $U_0$  یک متغیر  $-F_{t_0}$  اندازه‌پذیر بوده و  $\mathbb{E}(|U_0|^2) < +\infty$  را برآورده می‌کند. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که شرایط زیر روی ضریب رانش  $f$  و ضریب انتشار  $g$  در [۲] اعمال شده‌است:

$$U_{n+1} + a_1 U_n + a_0 U_{n-1} = [\beta_2 f(t_{n+1}, U_{n+1}) + \beta_1 f(t_n, U_n) + \beta_0 f(t_{n-1}, U_{n-1})] \Delta t + (I + D_n^*)^{-1} \gamma_1 g(t_n, U_n) \Delta W_n + (I + D_{n-1}^*)^{-1} \gamma_0 g(t_{n-1}, U_{n-1}) \Delta W_{n-1}, \quad (2)$$

در این روش،  $n = 1, 2, \dots, N-1$  نشان‌دهنده شماره گام زمانی،  $\Delta t = \frac{T-t_0}{N}$  اندازه گام زمانی یکنواخت، و  $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n)$  افزایش وینر با توزیع  $N(0, \Delta t)$  می‌باشد. که  $a_0, a_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$  پارامترهای روش طبق منبع [۲] و  $I$  ماتریس همانی  $d \times d$  است. ماتریس‌های کنترل بهینه:  $D_n^*$  و  $D_{n-1}^*$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D_n^* = d_0^*(t_n, U_n) \Delta t + d_1^*(t_n, U_n) |\Delta W_n|, \quad D_{n-1}^* = d_0^*(t_{n-1}, U_{n-1}) \Delta t + d_1^*(t_{n-1}, U_{n-1}) |\Delta W_{n-1}|, \quad (3)$$

$d_0^*$  و  $d_1^*$  توابع کنترل بهینه بر اساس تحلیل پایداری مجانبی به صورت زیر پیشنهاد می‌شوند:

$$d_0^*(t, u) = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial u}(t, u) \right| + \frac{1}{4} \left| \frac{\partial g}{\partial u}(t, u) \right|^2, \quad d_1^*(t, u) = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial g}{\partial u}(t, u) \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\partial f}{\partial u}(t, u) \right| \Delta t^{1/2}. \quad (4)$$

برای معادله  $dU = \lambda U dt + \mu U dW$ ، توابع کنترل بهینه بصورت  $d_0^* = \frac{1}{2} |\lambda| + \frac{1}{4} |\mu|^2$ ،  $d_1^* = \frac{1}{2} |\mu| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\lambda| \Delta t^{1/2}$  ساده می‌شوند. (در این مقاله، روش پیشنهادی OBTSM با پنج روش معیار شامل EM (اویلر-مارویاما)، STSM (دوگام استاندارد)، BABM (متعادل آدامز-بشفورث)، BAMB (متعادل آدامز-مولتون) و BBDF (مشتق‌گیری معکوس) مقایسه شده است.)

### ۳ تحلیل همگرایی و پایداری

تحلیل همگرایی: تعریف ۱ (همگرایی میانگین-مربع). یک تقریب عددی  $U_n$  با مرتبه همگرایی  $K$  برای حل معادله دیفرانسیل تصادفی، میانگین-مربع همگرا نامیده می‌شود اگر ثابت مثبت  $C$  (مستقل از  $\Delta t$ ) وجود داشته باشد به طوری که  $\max_{n=1,2,\dots,N} \|U(t_n) - U_n\| \leq C \Delta t^K$ .

لم ۱ (برآورد گام زمانی). فرض کنید شرایط لپشیتس سراسری و رشد خطی برای  $f$  و  $g$  برقرار باشد. آنگاه یک ثابت  $C > 0$  و  $\Delta t_0$  وجود دارد به طوری که برای همه  $\Delta t < \Delta t_0$ ،  $\mathbb{E}[\|U(t_{n+1}) - U_{n+1}\|^2] \leq C \Delta t$ .

لم ۲ (نمایش خطای محلی). خطای محلی روش را می‌توان به صورت  $L_{n+1} = R_n + S_{1,n} + S_{2,n+1}$  نمایش داد. که در آن  $\|S_{2,n+1}\| = O(\Delta t)$ ،  $\|S_{1,n}\| = O(\Delta t)$ ،  $\|R_n\| = O(\Delta t^{3/2})$  و  $S_{2,n+1}$  نسبت به  $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$  دارای امید ریاضی صفر هستند.

قضیه ۱ (همگرایی میانگین-مربع). اگر توابع  $f$  و  $g$  در شرایط لپشیتس سراسری و رشد خطی صدق کنند و چندجمله‌ای مشخصه  $\rho(z) = z^2 + a_1 z + a_0$  شرایط ریشه دالکوئیست را برآورده کند، آنگاه روش OBTSM با مرتبه همگرایی  $1/2$  در معنای میانگین-مربع همگرا است. به طور دقیق،  $\max_{n=2,\dots,N} \|U(t_n) - U_n\| \leq C \Delta t^{1/2}$ .



اثبات. با استفاده از لم های ۱ و ۲ و به کارگیری تکنیک های استاندارد در تحلیل همگرایی روش های چندگام، نتیجه به دست می آید. جزئیات کامل در [۳] ارائه شده است. □

تحلیل پایداری: تعریف ۲ (پایداری میانگین-مربع). یک روش عددی تصادفی را میانگین-مربع پایدار گویند اگر  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|U_n|^2] = 0$ ، که در آن  $\{U_n\}$  دنباله حاصل از اعمال روش بر معادله آزمون خطی با گام زمانی  $\Delta t$  یکنواخت است.

معادله تست و ماتریس انتقال: معادله دیفرانسیل تصادفی خطی زیر را در نظر می گیریم:

$$dU(t) = \lambda U(t)dt + \mu U(t)dW(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

با اعمال روش  $OBTSM$  بر معادله (۵)، به رابطه تفاضلی  $U_{n+1} = A_n U_n + B_n U_{n-1}$  می رسیم، که  $\xi_n \sim N(0, 1)$

$$A_n = \frac{-a_1 + \beta_1 \lambda \Delta t}{1 - \beta_2 \lambda \Delta t} + \frac{\gamma_1 \mu \sqrt{\Delta t} \xi_n}{(1 - \beta_2 \lambda \Delta t)(1 + D_n^*)}, \quad B_n = \frac{-a_0 + \beta_0 \lambda \Delta t}{1 - \beta_2 \lambda \Delta t} + \frac{\gamma_0 \mu \sqrt{\Delta t} \xi_{n-1}}{(1 - \beta_2 \lambda \Delta t)(1 + D_{n-1}^*)}. \quad (6)$$

ماتریس انتقال پایداری: با تعریف بردار حالت  $Y_n$  سپس معادله تکرار به صورت  $Y_{n+1} = M^* Y_n$  درمی آید که در آن ماتریس انتقال بهینه شده  $M^*$  را نیز داریم، که  $p_n$  و  $q_n$  به ترتیب عبارت های تصادفی مربوط به جمله های نویز هستند.

$$Y_n = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[U_n^2] \\ \mathbb{E}[U_n^2 U_{n-1}^2] \\ \mathbb{E}[U_n U_{n-1}] \end{bmatrix}, \quad M^* = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[A_n^2] + \mathbb{E}[p_n^2] & \mathbb{E}[B_n^2] + \mathbb{E}[q_n^2] + 2\mathbb{E}[A_n p_n q_n] & 2\mathbb{E}[A_n B_n] \\ 1 & 0 & 0 \\ \mathbb{E}[A_n] & \mathbb{E}[B_n] & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

قضیه ۲ (پایداری میانگین-مربع). روش  $OBTSM$  برای معادله تست خطی، میانگین-مربع پایدار است اگر و تنها اگر:  $\rho(M^*) < 1$ ، که در آن شعاع طیفی ماتریس انتقال است. (اثبات و جزئیات در [۴] ارائه شده است)

لم ۳ (تحلیل مجانبی). برای  $0 < \Delta t \ll 1$ ، شرط پایداری مجانبی به صورت  $\lambda + \frac{1}{2}\mu^2 + O(\Delta t^{1/2}) < 0$  است.

نتیجه ۱ (شرط پایداری مجانبی). در حد  $\Delta t \rightarrow 0$ ، شرط پایداری مجانبی به صورت  $\lambda + \frac{1}{2}\mu^2 < 0$  درمی آید، که نسبت به شرط دقیق برای معادله تست، محدودیت کمتری دارد.

قضیه ۳ (انتخاب بهینه پارامترها). برای اطمینان از پایداری روش  $OBTSM$  کافی است پارامترهای کنترل به گونه ای

$$d_0^* \geq \frac{1}{2}|\lambda| + \frac{1}{4}|\mu|^2, \quad d_1^* \geq \frac{1}{2}|\mu| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\lambda|\Delta t^{1/2}.$$

اثبات. این نتایج از تحلیل مجانبی پایداری و بهینه سازی تابعیت لیاپانوف [۴] به دست می آیند. انتخاب توابع کنترل

$D_n^*$  در بخش ۲ دقیقاً بر اساس تعمیم این حدود مینیمم به دست آمده است تا تضمین شود که ماتریس انتقال  $M^*$

دارای شعاع طیفی  $\rho(M^*) < 1$  باشد. □

## ۴ مثال عددی

مثال ۱: معادله دیفرانسیل تصادفی خطی (۵) با  $U(0) = 1, t \in [0, T]$  و جواب دقیق  $U(t) = \exp[(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2)t + \mu W(t)]$

در نظر گرفته شده است [۲]. (مورد ۱:  $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}, t \in [0, 1], 2^{-9} - \Delta t = 2^{-5}$ ، مورد ۲:  $\lambda = -3, \mu = 3.5$ ،

مورد ۳:  $\lambda = -10, \mu = 6$ ، مورد ۴:  $\lambda = -3, \mu = 4, t \in [0, 10], \Delta t = 0.25$ )

مثال ۲: معادله دیفرانسیل تصادفی غیرخطی زیر که دارای سختی در جزء انتشار است [۲]:

$$dU(t) = -(\alpha + \beta^2 U(t))(1 - U^2(t))dt + \beta U^2(t)dW(t), \quad U(0) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

با جواب تحلیلی  $U(t) = \frac{\exp(-2\alpha t + 2\beta W(t)) - 1}{\exp(-2\alpha t + 2\beta W(t)) + 1}$  و پارامترهای  $\alpha = 1$ ،  $\beta = 0.1$  (غیرسخت)،  $\alpha = 1$ ،  $\beta = 1.5$

جدول ۱: خطا میانگین - مربع (مثال 1)  $\beta = 2$ ،  $\alpha = 1$  (نیمه سخت).  
جدول ۲: خطا میانگین - مربع مثال 2  $\alpha = 1$ ،  $\beta = 1.5$

روش	$\Delta t = 2^{-8}$	$\Delta t = 2^{-7}$	$\Delta t = 2^{-6}$	$\Delta t = 2^{-5}$
EM	0.2165	0.3063	0.4332	ناپایدار
STSM	0.1044	0.1477	0.2089	0.2956
BABM	0.0662	0.0937	0.1325	0.1874
BAMM	0.0612	0.0866	0.1225	0.1732
BBDF	0.0573	0.0810	0.1146	0.1621
OBTSM	<b>0.0441</b>	<b>0.0624</b>	<b>0.0882</b>	<b>0.1247</b>

روش	$\Delta t = 2^{-9}$	$\Delta t = 2^{-8}$	$\Delta t = 2^{-7}$	$\Delta t = 2^{-6}$	$\Delta t = 2^{-5}$
EM	0.0384	0.0543	0.0769	0.1087	0.1542
STSM	0.0330	0.0467	0.0661	0.0934	0.1325
BABM	0.0303	0.0429	0.0607	0.0859	0.1218
BAMM	0.0296	0.0419	0.0592	0.0838	0.1189
BBDF	0.0287	0.0406	0.0574	0.0812	0.1152
OBTSM	<b>0.0235</b>	<b>0.0332</b>	<b>0.0470</b>	<b>0.0665</b>	<b>0.0943</b>

جدول ۳: شعاع طیفی ماتریس انتقال (مثال 2)

روش	پارامترها	پارامترها	پارامترها
ABM	$\rho(M) = 3.1273$	-	-
BABM	$d_0 = -\frac{\lambda}{2}, d_1 = \frac{\mu}{2}$ $\rho(M) = \mathbf{0.7066}$	$d_0 = -\frac{\lambda}{2}, d_1 = 0$ $\rho(M) = 1.7256$	$d_0 = 0, d_1 = \frac{\mu}{2}$ $\rho(M) = 0.8485$
AMM	$\rho(M) = 2.2802$	-	-
BAMM	$d_0 = -\frac{\lambda}{2}, d_1 = \frac{\mu}{2}$ $\rho(M) = \mathbf{0.3428}$	$d_0 = -\frac{\lambda}{2}, d_1 = 0$ $\rho(M) = 0.5948$	$d_0 = 0, d_1 = \frac{\mu}{2}$ $\rho(M) = 0.4442$
BDF	$\rho(M) = 2.0755$	-	-
BBDF	$d_0 = -\frac{\lambda}{2}, d_1 = \frac{\mu}{2}$ $\rho(M) = \mathbf{0.4922}$	$d_0 = -\frac{\lambda}{2}, d_1 = 0$ $\rho(M) = 1.2300$	$d_0 = 0, d_1 = \frac{\mu}{2}$ $\rho(M) = 0.5919$

## ۵ نتیجه گیری

روش متعادل دوگام مارویامای بهینه شده (OBTSM) با پارامترهای کنترل تحلیلی، بهبود چشمگیری در پایداری سیستم‌های تصادفی سخت ارائه می‌دهد. نتایج عددی (با استفاده از نرم افزار پایتون) نشان می‌دهند این روش در شرایطی پایدار می‌ماند که سایر روش‌های متعادل دوگام ناپایدار می‌شوند. بهبود 40 - 30 درصدی در دقت و تحمل گام‌های زمانی 2.5 برابری، کارایی روش پیشنهادی را تأیید می‌کند. این ویژگی‌ها OBTSM را به گزینه‌ای ایده‌آل برای مسائل عملی با ماهیت سخت تبدیل می‌نماید. گسترش این روش به مسائل چندبعدی و سیستم‌های با نویز رنگی می‌تواند زمینه تحقیقات آتی باشد. همچنین، بررسی کارایی روش در مسائل کاربردی مانند مدل‌سازی مالی و سیستم‌های دینامیکی پیشنهاد می‌شود.

## مراجع

- [1] Milstein, G. N., Platen, E., & Schurz, H. (1998). Balanced implicit methods for stiff stochastic systems. SIAM Journal on Numerical Analysis, **35**(3), 1010–1019.
- [2] Ren, Q., Liu, J., & He, Y. (2024). Balanced implicit two-step Maruyama methods for stochastic differential equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.
- [3] Buckwar, E., & Winkler, R. (2006). Multistep methods for SDEs and their application to problems with small noise. SIAM Journal on Numerical Analysis, **44**(2), 779–803.
- [4] Higham, D. J. (2000). Mean-square and asymptotic stability of the stochastic theta method. SIAM Journal on Numerical Analysis, **38**(3), 753–769.



# تحقیق در عملیات



# مطالعه‌ی روش گرادیان مزدوج جدید مبتنی بر شرط سکانت اصلاح شده با کاربردهای آن در پردازش تصویر

فاطمه زهرا بابائی، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

fatemezahra.babaei79rastaqi@gmail.com

زهرا اکبری، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران z.akbari@umz.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله، یک روش گرادیان مزدوج کارآمد وابسته به کلاس روش‌های دای-لیائو [3] برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید مطالعه می‌شود. یک پارامتر گرادیان مزدوج جدید برای حل مسئله بهینه‌سازی مورد بررسی قرارداد می‌شود. روش مورد مطالعه، تحت فرضیات ضعیف دارای همگرایی سراسری است. کارآمدی روش برای حل برخی از مسائل دنیای واقعی از حوزه پردازش تصویر مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج عددی توسط فرمول نسبت سیگنال به نویز PSNR، کارآمدی روش مورد مطالعه را نشان می‌دهد.

**کلمات کلیدی:** روش گرادیان مزدوج، پردازش تصویر، سکانت اصلاح شده، همگرایی سراسری

## ۱. مقدمه

در این مقاله، مسئله بهینه‌سازی نامقید به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\min \{f(x) | x \in R^n\},$$

که در آن  $f: R^n \rightarrow R$  یک تابع هموار است. الگوریتم گرادیان مزدوج، روش تکراری با خاصیت‌های همگرایی موضعی و سراسری قوی است که برای حل مسئله کمینه سازی بالا به حافظه کم نیازمند است. تکرارهای گرادیان مزدوج، معمولاً به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

که در آن  $\alpha_k$  طول گامی است که توسط روش‌های جستجوی خطی (نادقیق) مانند شرایط قوی ولف به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha_k d_k^T g_k, \\ |d_k^T g_{k+1}| \leq -c_2 d_k^T g_k, \quad (d_k^T g_{k+1} \geq c_2 d_k^T g_k),$$

جهت جستجوی  $d_k$  به صورت بازگشتی زیر محاسبه می‌شود:

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k, \quad d_0 = -g_0,$$

<sup>1</sup> wolfe



پارامتر گرادیان مزدوج که با  $\beta_k$  نشان داده می‌شود، یکی از مهم‌ترین پارامترها در این روش است. انتخاب‌های مختلف  $\beta_k$  به الگوریتم‌های مختلف گرادیان مزدوج منجر می‌شود. برخی انتخاب‌های معروف  $\beta_k$  را می‌توان در هستنس و استیفل<sup>۲</sup> (HS) [7] پولک و ریبیر و پولیاک<sup>۳</sup> (PRP) [10]، فلچر<sup>۴</sup> (CD) [6]، دای و یان<sup>۵</sup> (DY) [4] یافت. نتایج مطالعات عددی و نظری گزارش شده توسط آندری [1] نشان می‌دهد بعضی روش‌ها عملکرد عملی بهتری نسبت به روش‌های دیگر دارند. (در مقابل گروه دوم خاصیت همگرایی قویتری دارند.)

## ۲. نتایج اصلی

پردازش تصویر، یک رشته علمی نوظهور است که در سال‌های اخیر پیشرفت‌های چشمگیری داشته است. در این میان، تازی تصویر یکی از رایج‌ترین مشکلات در این زمینه است که به دلایل مختلفی ایجاد می‌شود [8,9]. مسئله بازیابی تصویر آسیب دیده به صورت دستگاه خطی زیر مدل می‌شود:

$$y = Ax + \eta \quad (x \in X),$$

که در آن هدف، بازیابی تصویر اصلی  $x$  از تصویر مشاهده  $y$  است که توسط یک ماتریس تارکننده  $A$  و یک نویز تصادفی  $\eta$  تخریب شده است.

این مسئله یک مسئله معکوس در مقیاس بزرگ است که بسیار بدوضع و حل آن سخت است. روش‌های مختلفی برای حل این مساله وجود دارد. یک رویکرد شناخته شده برای حل این مساله رویکرد منظم‌سازی است [2]. در این رویکرد یک عبارت منظم‌ساز به تابع هدف اضافه می‌شود و مدل کلی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\min \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \phi(x),$$

که در آن  $\phi$  و  $\lambda$  به ترتیب عبارت و پارامتر منظم‌ساز هستند.

در بازیابی تصویر، مقدار PSNR که همان نسبت سیگنال به نویز می‌باشد برای هر روش روی تصویر محاسبه می‌شود و روش‌های مختلف و روش جدید، بر این اساس مورد بررسی قرار می‌گیرند. روش‌های گرادیان مزدوج غیرخطی معمولاً از شرط سکانت استفاده می‌کنند:

$$\beta_{k+1} s_k = \widehat{y}_k, \quad \widehat{y}_k = y_k + \frac{\theta_k}{s_k^T u_k} u_k$$

که در آن:

$$\theta_k = 6(f_k - f_{k+1}) + 3(g_k + g_{k+1})^T s_k,$$

در آخر،  $\beta_k$  پیشنهادی با استفاده از شرط سکانت اصلاح شده و استفاده از  $\beta_k$  فاطمی [4] در به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\beta_k = \frac{(y_k^T g_{\{k+1\}})(y_k^T d_k)}{t^2 (z_k^T s_k)^2 + (y_k^T s_k)^2} - \frac{t(s_k^T g_{\{k+1\}})(z_k^T d_k)}{t^2 (z_k^T s_k)^2 + (y_k^T s_k)^2} + \frac{t^2 (z_k^T g_{\{k+1\}})(z_k^T d_k)}{t^2 (z_k^T s_k)^2 + (y_k^T s_k)^2} - \frac{|t^2 (z_k^T s_k) z_k + (y_k^T s_k) y_k - \lambda_k (z_k^T s_k) s_k|^2}{\{4 \gamma_2 [t^2 (z_k^T s_k)^2 + (y_k^T s_k)^2]\}} \frac{(g_{\{k+1\}}^T d_k)}{t^2 (z_k^T s_k)^2 + (y_k^T s_k)^2}$$

<sup>2</sup> Hestenes and Stiefel

<sup>3</sup> Polak and Ribiere and Polyak

<sup>4</sup> Fletcher

<sup>5</sup> Dai and Yuan

<sup>6</sup> Andrei

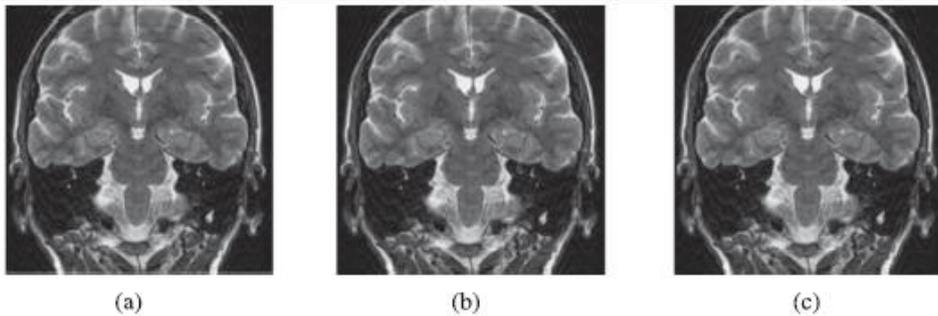


الگوریتم گرادیان مزدوج سکانت اصلاح شده (MSCO)

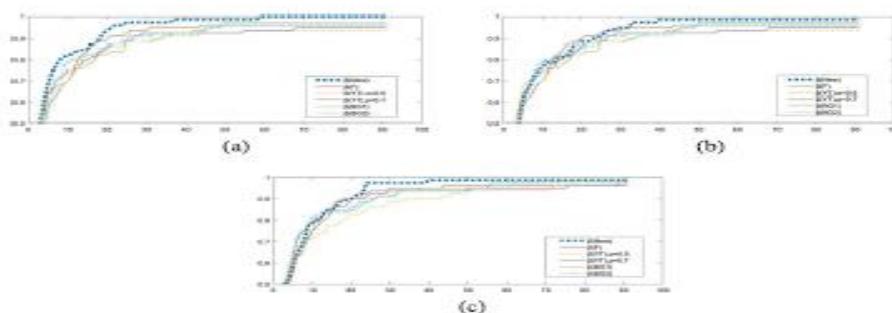
- گام ۱. یک نقطه شروع  $x_0 \in R^n$  و مقادیر مناسب برای پارامترهای مثبت  $\rho_k, T, 0 < c_1 < c_2 < 1$  و  $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$  را انتخاب کنید. مقدار  $g_0 = \nabla f(x_0)$  را محاسبه کرده،  $d_0 = -g_0$  قرار دهید  $k=0$  را تنظیم کنید.
- گام ۲. شرط توقف را بررسی کنید. اگر برقرار بود، متوقف شوید؛ در غیر این صورت به گام ۳ بروید.
- گام ۳. طول گام  $\alpha_k$  را با استفاده از شرط قوی ولف محاسبه کنید.
- گام ۴. مقادیر  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, f_{k+1} = f(x_{k+1}), g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1}), s_k = x_{k+1} - x_k$  را محاسبه کنید.
- گام ۵. یک مقدار مطلوب برای  $u_k \in R^n$  انتخاب کنید به طوری که  $s_k^T u_k \neq 0$  باشد، و سپس  $\theta_k, z_k$  را محاسبه کنید.
- گام ۶. مقادیر  $\lambda_k$  و  $t$  را محاسبه کنید.
- گام ۷. پارامتر گرادیان مزدوج  $\beta_k$  را محاسبه کنید.
- گام ۸. جهت جستجو  $d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$  را محاسبه کنید.
- گام ۹. مقدار  $k$  را یک واحد افزایش داده  $(k = k + 1)$  و به گام ۲ بروید.

۳. نتایج عددی

تصویر مغز زیر، تصویر بازیابی شده توسط روش جدید می باشد (با سه مقدار  $\rho$  مختلف):



(a); PSNR=29.7078 (b); PSNR=29.7144 (c); PSNR=29.7214



نمودار تعداد ارزیابی تابع توسط  $\beta_k^{new}$  و  $\beta_k$  های معروف دیگر

### جدول مقایسه روش ها بر حسب PSNR برای تصویر مغز

$\beta_k^{DY}$	$\beta_k^{PRP}$	$\beta_k^{HS}$	$\beta_k^F$	$\beta_k^{new}$	PSNR
29.5452	28.9495	29.6454	28.9451	29.7214	

## ۴. نتیجه گیری

یک روش گرادیان مزدوج مؤثر ارائه داده شد. روش جدید شرط نزول کافی را برآورده می کند و به طور سراسری همگرا است. نتایج عددی نشان داد که در عمل، این روش عملکرد خوبی دارد و از برخی روش های شناخته شده بهتر عمل می کند. همچنین توانایی روش در حل برخی از کاربردهای دنیای واقعی بررسی شد. نشان داده شد تصویری که توسط روش جدید بازیابی می شود، از نظر آزمون PSNR قابل قبول است.

## منابع

- [1] N. Andrei, Numerical comparison of conjugate gradient algorithms for unconstrained optimization. Stud. Inf. Control 16 (2007) 333–352.
- [2] A.C. Bovik, Handbook of Image and Video Processing. Academic Press (2010).
- [3] Y.-H. Dai and L.-Z. Liao, New conjugacy conditions and related nonlinear conjugate gradient methods. Appl. Math. Optim. 43 (2001) 87–101.
- [4] Y.-H. Dai and Y. Yuan, A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property. SIAM J. Optim. 10 (1999) 177–182.
- [5] M. Fatemi, A new efficient conjugate gradient method for unconstrained optimization. J. Comput. Appl. Math. 300 (2016) 207–216.
- [6] R. Fletcher, Practical Methods of Optimization. John Wiley & Sons, New York, NY (2013).
- [7] M.R. Hestenes and E. Stiefel, Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. J. Res. Nat. l Bur. Standards 49 (1952) 2379.
- [8] P. Huang and K. Liu, A new conjugate gradient algorithm for noise reduction in signal processing and image restoration. Soft Computing Journal, 10 (2022) 10–80.
- [9] M. Jafari, Isolation of vessels in retinal color images. Soft Computing Journal, 12 (2023) 17–21.
- [10] B.T. Polyak, The conjugate gradient method in extremal problems. Comput. Math. Math. Phys. 9 (1969) 94–112.

# هیبرید رویکردهای میانگین‌گیری بیزین و تحلیل پوشش داده‌ای فاصله‌ای

## رویکردی نوین جهت محاسبه کارایی

علی علیزاده گودرزی<sup>۱</sup>، دانشجوی دوره دکتری رشته تصمیم‌گیری و خط‌مشی‌گذاری، دانشگاه آزاد اسلامی قائم‌شهر

[alializadeh.goudarzi@gmail.com](mailto:alializadeh.goudarzi@gmail.com)

**چکیده:** داده‌های گمشده در کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها به یک پدیده مزمن تبدیل شده است و انتخاب مهم‌ترین متغیرهای ورودی جهت بررسی مناسب‌تر کارایی از اهمیت بالایی برخوردار است؛ بنابراین، وجود داده‌های مفقودی در متغیرهای ورودی‌ها و خروجی‌ها و با رویکردهای DEA سنتی امکان‌پذیر نمی‌باشد. مدل‌های سنتی توانایی کافی جهت شناسایی مهم‌ترین متغیرهای ورودی را ندارند و این امر عمدتاً ناشی از عدم توانایی در شناسایی متغیرهای توضیحی و طراحی تجربی مدل می‌باشد. در این مقاله هدف مدل‌سازی کارایی واحدها با استفاده از هیبرید رویکردهای میانگین‌گیری بیزین و تحلیل پوشش داده‌ای فاصله‌ای است. لحاظ نمودن متغیرهای ورودی مطلوب موجب بهبود محاسبه کارایی می‌گردد و رویکرد تحلیل پوشش داده‌ای فاصله‌ای، توانایی بالایی در محاسبه کارایی با لحاظ داده‌های گمشده دارد. **کلمات کلیدی:** تحلیل پوشش داده، داده‌ها گمشده، کارایی، میانگین‌گیری بیزین.

### ۱. مقدمه

در پنج دهه اخیر، کمی‌سازی عملکرد همواره هسته اصلی تحولات متعدد در سازمان‌ها بوده است (میشرا، ۲۰۲۴). عوامل بسیاری بر پذیرش اندازه‌گیری‌های عملکرد تأثیر می‌گذارند، مانند محرک‌های داخلی، محرک‌های بیرونی، فرآیندها و تغییرات (بیندار و همکاران، ۲۰۲۵). این امر اندازه‌گیری عملکرد در این سازمان‌ها را پیچیده نموده است (فبریانتی و

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

همکاران، ۲۰۲۲). در محاسبه کارایی واحدها عموماً دو مسئله اصلی ایجاد می‌گردد. در ادامه به شرح هر یک از این مشکلات پرداخته شده است.

مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های سنتی (DEA) فرض می‌کنند که تمام داده‌های ورودی و خروجی در دسترس هستند؛ با این حال، داده‌های از دست رفته یک مشکل رایج در تجزیه و تحلیل داده‌ها است (چن و همکاران، ۲۰۲۰). داده‌های گم‌شده در کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها یک بیماری مزمن محسوب می‌شوند؛ با این حال، داده‌های از دست رفته یک مشکل رایج در تجزیه و تحلیل داده‌ها است (استیاد و همکاران، ۲۰۲۰). اکثریت واحدهای تصمیم‌گیری اطلاعات را به صورت کامل ارائه نمی‌کنند؛ محرمانه بودن؛ عدم دسترسی به اطلاعات؛ هزینه‌بر بودن جمع‌آوری اطلاعات از مهم‌ترین این دلایل است (چن و همکاران ۲۰۱۹). (DEA)، یک رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی ناپارامتریک است. از این رویکرد برای محاسبه بهره‌وری و کارایی بهره‌گرفته می‌شود (چارنس و همکاران، ۱۹۷۸). اصل استقلال در داده‌ها در این رویکرد از اهمیت بالایی برخوردار است. در نتیجه کیفیت داده‌ها در این رویکرد از اهمیت بالایی برخوردار است؛ بالا بودن تعداد داده مورد نیاز جهت برآورد؛ نتایج تخمین‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد (آیکینز و همکاران، ۲۰۲۵).

برای مقابله با مشکل داده‌های از دست رفته روش‌های زیادی پیشنهاد شده است، به عنوان مثال، حذف، انتساب و انتساب چندگانه (برشتولد ۲۰۱۹). ۱- روش‌های حذف (حذف همه متغیرهای دارای داده‌های از دست رفته یا همه واحدهای با داده‌های از دست رفته) به راحتی قابل پیاده‌سازی هستند؛ اما ممکن است منجر به تخمین‌های مغرضانه شوند (مادن و همکاران، ۲۰۱۸) ۲- روش‌های انتساب؛ عمدتاً شامل انتساب میانگین، انتساب عرشه داغ، انتساب عرشه سرد و انتساب رگرسیونی است (وانگ و همکاران ۲۰۱۹؛ شیشتل و همکاران ۲۰۱۹). انتساب میانگین به این معنی است که داده‌های از دست رفته با میانگین داده‌های موجود جایگزین می‌شوند؛ این رویکرد ساده است؛ اما تنوع در مجموعه داده‌ها را کاهش می‌دهد. در روش انتساب عرشه داغ، داده‌های از دست رفته با مقادیر موجود از یک واحد «مشابه» جایگزین می‌شوند. انباشت عرشه داغ یک روش موثر است و به طور گسترده در عمل استفاده شده است (ایم و همکاران ۲۰۱۸). روش دیگر، در انتساب عرشه سرد، مقادیر از دست رفته را با مقادیر موجود از موارد مشابه از مجموعه داده‌های دیگر جایگزین می‌کنید. مقادیر جدید از یک نمونه نامرتب می‌آیند (چن و همکاران، ۲۰۲۰).

انتساب رگرسیون نیز یک روش پرکاربرد است که در آن داده‌های از دست رفته با مقادیر به دست آمده از تکنیک‌های رگرسیون جایگزین می‌شوند، به عنوان مثال، رگرسیون خطی، رگرسیون لجستیک، رگرسیون چند جمله‌ای، رگرسیون پروبیت و رگرسیون توبیت (میتی و همکاران ۲۰۱۹). ۳- انتساب چندگانه؛ نیز روشی جذاب است که به عنوان روشی دقیق‌تر و دارای سوگیری کم‌تر تلقی شده است (آکانده و همکاران، ۲۰۱۹). با توجه به روش انتساب چندگانه، داده‌های گمشده باید بر اساس توزیع و تنوع سایر عناصر داده در نمونه نسبت داده شوند (هامون و همکاران، ۲۰۲۰) ۴- روش‌های دیگری؛ نیز برای مقابله با داده‌های از دست رفته وجود دارد، به عنوان مثال، حداکثر احتمال (لی و همکاران ۲۰۲۰)، بیزی (جیانگ و همکاران ۲۰۱۸) و حداکثرسازی انتظار (مالان و همکاران ۲۰۲۰).

چندین محقق با استفاده از رویکردها و روش‌های مختلف DEA را برای داده‌های گمشده مورد بررسی قرار داده‌اند. اونیل و همکاران (۲۰۰۲)، روش حذف را اعمال نمودند؛ اما این رویکرد مشکل‌ساز بود؛ زیرا حذف DMUها منجر به تغییرات در کارایی نسبی سایر DMUها گردید. کوسمانن و همکاران (۲۰۱۲)؛ از ورودی‌های ساختگی (صفر برای متغیرهای خروجی و اعداد به اندازه کافی بزرگ برای متغیرهای ورودی)، برای کاهش اثرات DMU با داده‌های از دست

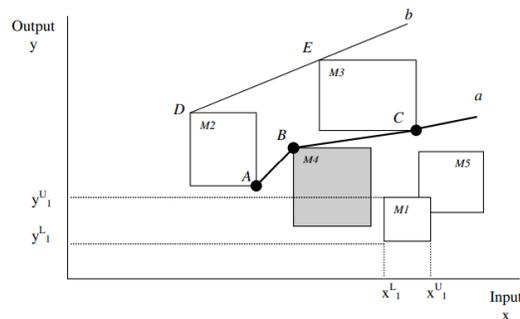
رفته جهت بررسی کارایی نسبی سایر DMUها استفاده نمودند. گردیجان و لوکاج (۲۰۱۸)، از روش ورودی‌های ساختگی استفاده کردند و مدل‌های DEA (مدخل‌های ساختگی DEA)، را برای اندازه‌گیری کارایی صنعت غذا و نوشیدنی پیشنهاد نمودند. رویکرد DEA فاصله‌ای یکی دیگر از روش‌های پرکاربرد است که در آن داده‌های از دست رفته با یک کران پایین و یک کران بالا جایگزین می‌شوند تا مرزهای پایین و بالایی کارایی را بتوان ارزیابی کرد (چن و همکاران، ۲۰۲۰). واقع، رویکرد DEA فازی مشابه رویکرد DEA فاصله‌ای است. تفاوت بین این دو رویکرد این است که رویکرد DEA فازی مبتنی بر نظریه فازی است در حالی که رویکرد DEA فاصله‌ای از تکنیک‌های قطعی استفاده می‌کند (وو و همکاران، ۲۰۱۹). با این حال، تکنیک‌های ذکر شده در بالا دارای چند معایب هستند. اول، آن‌ها از روش‌های انتساب ساده یا روش‌های حذف برای رسیدگی به داده‌های از دست رفته استفاده می‌کنند، که ممکن است منجر به نتایج اشتباه شود. دوم، در حالی که آن‌ها مدل‌های DEA شعاعی پایه را برای اندازه‌گیری کارایی DMU با داده‌های از دست رفته تغییر می‌دهند، نمی‌توانند با متغیرهای با مقدار صحیح یا متغیرهای نامطلوب مقابله کنند. اگر تصمیم‌گیرندگان به سادگی راه‌حل‌های DEA را به نزدیک‌ترین اعداد صحیح گرد کنند، نتایج ممکن است اشتباه باشد (گردستمی و همکاران ۲۰۱۹). یکی دیگر از معایب مدل‌های DEA شعاعی این است که توانایی تشخیص ضعیف‌تری نسبت به مدل‌های DEA غیر شعاعی دارند (چن و همکاران، ۲۰۱۹). مسئله دوم در پژوهش حاضر شناسایی متغیرهای ورودی بهینه است. نبود رویکردی مدون در حوزه عوامل موثر بر سازمان‌ها موجب گردیده هر محقق بر اساس اطلاعات در دسترس و دیدگاه شخصی اقدام به محاسبه عملکرد نماید. بر این اساس مسئله اصلی پژوهش حاضر مدل‌سازی ارزیابی عملکرد واحدهای سازمانی با هیبرید میانگین‌گیری بیزین و تحلیل پوشش داده‌ای فاصله‌ای می‌باشد.

## ۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

الف: رویکرد تحلیل پوششی فاصله‌ای

در این بخش رویکرد DEA فاصله‌ای تشریح شده است. فرض کنید  $n$  واحد وجود دارد که هر کدام از  $m$  ورودی برای تولید  $s$  خروجی استفاده می‌کنند. برای هر واحد  $j (j = 1, \dots, n)$  سطح خروجی  $r$  ام آن را با  $y_{rj}$  نشان می‌دهیم ( $r = 1, \dots, s$ ) و با  $x_{ij}$  سطح  $i$  امین ورودی آن را ( $i = 1, \dots, m$ ) نشان می‌دهیم. برخلاف مدل اصلی DEA، مدل بازه‌ای فرض می‌کند که برخی از مقادیر ورودی واضح  $x_{ij}$  و خروجی  $y_{rj}$  شناخته شده نیستند و برای آن‌ها، صرفاً مشخص است که در فواصل محدودی قرار دارند، یعنی  $x_{ij} \in [x_{ij}^L, x_{ij}^U]$  و  $y_{rj} \in [y_{rj}^L, y_{rj}^U]$ ؛ این مقادیر در دامنه کاملاً مثبت هستند. در چنین وضعیتی، واحدها آزادند تا هر مقداری را در فواصل زمانی تعیین کنند تا امتیاز کارایی خود را به حداکثر برسانند. برخی از واحدها ممکن است همیشه در هر ترکیبی از مقادیر در فواصل زمانی کارآمد باشند، برخی دیگر ممکن است بسته به مقادیر اختصاص داده شده کارآمد یا ناکارآمد باشند و برخی واحدها ممکن است همیشه ناکارآمد باشند. در رویکرد بازه‌ای DEA واحدها دیگر با نقاطی در ابر صفحه و تعدادی مرز نشان داده نمی‌شوند؛ بلکه ممکن است به جای یک حالت در مجموعه‌ای از مقادیر کارایی ایجاد شود. بازه واحدها ممکن است با توجه به مرز کارایی انتخاب شده متفاوت باشد. برای نشان دادن رویکرد DEA بازه‌ای، مثالی (نمودار ۱)، با پنج واحد  $M_1, \dots, M_5$  ارائه نموده‌ایم؛ که در امتداد یک ورودی  $x$  و یک خروجی  $y$  ارزیابی شده‌اند. در این تنظیمات، واحدها با متوازی الاضلاع مستطیل شکلی که

با محدوده‌های بازه  $y_{rj}^L, y_{rj}^U, x_{ij}^L, x_{ij}^U$  تعریف شده‌اند نشان داده می‌شوند؛ همانطور که برای واحد  $M_1$  نشان داده شده است. هر نقطه در داخل مرزهای متوازی الاضلاع می‌تواند به طور ضمنی توسط واحد ارزیابی شده برای دستیابی به حداکثر امتیاز کارایی انتخاب شود. گوشه سمت چپ بالا (به عنوان مثال نقاط B، D، E)، متوازی الاضلاع نشان دهنده مطلوب ترین حالت واحدها است؛ زیرا نشان دهنده کمترین مقدار ممکن برای ورودی و بالاترین مقدار برای خروجی است در حالی که گوشه سمت راست به پایین (مثلاً A، C)، بیانگر کمترین حالت مطلوب است.



نمودار ۱: نمونه‌ای از تنظیم فاصله زمانی DEA با حالت بازده متغیر نسبت به مقیاس

منبع: چی و همکاران ۲۰۱۸

با فرض بازده متغیر نسبت به مقیاس در نمودار (۱)، خطوط  $a$  و  $b$  دو مرز کارایی ممکن را نشان می‌دهد. با توجه به مرز  $a$ ، واحد  $M_4$  کارآمد است؛ اما اگر مرز  $b$  انتخاب شود ناکارآمد می‌شود. واحدهای  $M_2$  و  $M_3$  همیشه کارآمد هستند؛ زیرا هر مرز ممکن منطقه آن‌ها را قطع می‌کند. واحدهای  $M_1$  و  $M_5$  همیشه ناکارآمد هستند؛ زیرا در زیر هر مرز ممکن قرار دارند. با استفاده از فواصل به جای داده‌های دقیق، مدل DEA مبتنی بر خروجی VRS غیر خطی خواهد بود، به غیر از پارامتر  $w_0$  و وزن‌های  $u_1, \dots, u_r, \dots, u_s$  برای خروجی‌ها و  $v_1, \dots, v_i, \dots, v_m$  برای ورودی‌ها، سطح ورودی  $x_{ij}$  و خروجی  $y_{rj}$  نیز متغیرهایی هستند که مقادیر دقیق آن‌ها باید به نفع واحد ارزیابی شده  $z_0$  تخمین زده شود.

$$\text{Min } h_{j0} = \sum_{i=1}^m v_i y_{rj0} - w_0$$

$$\text{s.t } \sum_{r=1}^s u_r y_{rj0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - w_0 \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \quad \forall r, i$$

$$w_0 \text{ free in sign}$$

دسپوتیس و اسمیرلیس (۲۰۰۲)، تبدیلات زیر را برای تبدیل مدل غیرخطی (۱)، به مدل خطی پیشنهاد کردند. مقادیر  $x_{ij}$  و  $y_{rj}$  بر حسب متغیرهای جدید  $s_{ij}$  و  $t_{rj}$  بیان می‌شوند که سطح ورودی‌ها و خروجی‌ها را در بازه‌های محدود  $[x_{ij}^L, x_{ij}^U]$  و  $[y_{rj}^L, y_{rj}^U]$  قرار می‌دهند. در نتیجه روابطی به ترتیب به شرح زیر خواهد بود:

$$x_{ij} = x_{ij}^L + s_{ij}(x_{ij}^U - x_{ij}^L), \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \text{ with } 0 \leq s_{ij} \leq 1$$

$$y_{rj} = y_{rj}^L + t_{rj}(y_{rj}^U - y_{rj}^L), \quad r = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n \text{ with } 0 \leq t_{rj} \leq 1$$

با استفاده از این عبارات، اصطلاحات  $u_r y_{rj}$  و  $v_i x_{ij}$  شکل  $u_r y_{rj}^L + u_r t_{rj}(y_{rj}^U - y_{rj}^L)$  و  $v_i x_{ij}^L + v_i s_{ij}(x_{ij}^U - x_{ij}^L)$  را به خود می‌گیرند. در این عبارات، اصطلاحات جدید  $v_i s_{ij}$  (برای ورودی‌ها) و  $u_r t_{rj}$  (برای خروجی‌ها). با متغیرهای



جدید جایگزین می شوند که شرایط  $q_{ij} = v_i s_{ij}$  و  $p_{rj} = u_r t_{rj}$  را دارند؛ همانطور که  $0 \leq q_{ij} \leq v_i, 0 \leq p_{rj} \leq u_r \forall i, j, r$  با این شرط که  $0 \leq s_{ij}, t_{rj} \leq 1$  و  $v_i, u_r \geq \varepsilon$ . با اعمال تبدیل های فوق در مدل (۱)، مدل خطی زیر حاصل گردد.

$$\begin{aligned} \min \quad & h_{j_0} = \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^L + q_{ij_0} (x_{ij_0}^U - x_{ij_0}^L) - w_0 \\ \text{s.t} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^L + p_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L) = 1 \\ & (\forall) \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L + \sum_{i=1}^m q_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L) - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L + p_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L) - w_0 \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ & p_{rj} - u_r \leq 0 \quad r = 1, 2, \dots, s; \quad j = 1, \dots, n \\ & q_{ij} - v_i \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon \quad \forall r, i \\ & p_{rj} \geq 0, \quad q_{ij} \geq 0 \quad \forall r, i, j \end{aligned}$$

در مدل (۲)، متغیرهای مجهول تحت برآورد، وزن های  $u_r$ ،  $v_i$  و متغیرهای  $q_{ij}$ ،  $p_{rj}$  هستند که سطح مقادیر ورودی و خروجی را در بازه های محدود نشان می دهند. سپس ثابت خواهیم کرد که امتیاز کارایی یک واحد  $j_0$  از مدل (۲)، تخمین زده شده است، مثلاً  $h_{j_0}^L$ ، امتیاز کارایی برای واحدی است که از مطلوب ترین موقعیت آن ناشی می شود (ورودی ها در کران پایین و خروجی ها در کران بالایی تنظیم می شوند) در حالی که بقیه واحدها در کم ترین موقعیت مطلوب خود تنظیم می شوند (ورودی ها بر روی کران بالایی تنظیم می شوند و خروجی به کران پایین).  $h_{j_0}^*$  امتیاز کارایی است که با چنین تنظیماتی به دست می آید. این امتیاز کارایی توسط مدل زیر با داده های دقیق به دست می آید.

$$\begin{aligned} \min \quad & h_{j_0} = \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^L - w_0 \\ \text{s.t} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^U = 1 \\ & (\forall) \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^L - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^U - w_0 \geq 0 \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^L - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^L - w_0 \leq 0 \quad j = 1, \dots, n, j \neq j_0 \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon \quad \forall r, i \end{aligned}$$

بر اساس داده های ورودی-خروجی در نظر گرفته شده در مدل (۳)، واحد  $j_0$  در بهترین موقعیت ممکن قرار دارد. سایر واحدها و در نتیجه  $h_{j_0}^*$  کم ترین امتیاز کارایی ممکن است که این واحد می تواند به دست آورد. پس می توان بیان داشت  $h_{j_0}^L \geq h_{j_0}^*$  است. توجه داریم که راه حل  $(u, v, Q, P)$  مدل (۲) با  $u = (u_r, r, 1, \dots, s)$ ؛  $v = (v_i, i, 1, \dots, m)$ ؛  $Q = (q_{ij}, i, 1, \dots, m; j, 1, \dots, n)$  و  $P = (p_{rj}, r, 1, \dots, s; j, 1, \dots, n)$  با این شرط که:

$$q_{ij} = \begin{cases} 0 & j = j_0 \\ v_i & j \neq j_0 \end{cases} \quad p_{rj} = \begin{cases} 0 & j \neq j_0 \\ v_i & j = j_0 \end{cases}$$

این فرآیند راه حل عملی مدل (۲)، است. مدل (۳) به طور مستقیم از مدل (۳)، با اعمال  $Q, P$  مشتق می شود. به این معنی که راه حل مدل (۳) که با امتیاز کارایی  $h_{j_0}^*$  مطابقت دارد که یک راه حل عملی برای مدل (۲) است و در نتیجه نمی تواند کم تر از مقدار  $h_{j_0}^L$  که جواب مدل (۲)، است؛ باشد. بدین ترتیب  $h_{j_0}^L \geq h_{j_0}^*$  و در نقطه تعادل می توان شرط

$h_{j_0}^* \geq h_{j_0}^l$  را اعمال نمود. به همین ترتیب  $h_{j_0}^l$  کران پایین بدست آمده توسط مدل (۲)، است.  $h_{j_0}^u$  کران بالایی امتیاز کارایی برای واحد  $j_0$  است که می‌توان از مدل (۴)، آن را به دست آورد. مدل (۴)، یک مدل DEA با داده‌های دقیق است که در آن سطوح ورودی و خروجی به طور نامطلوب نسبت به واحد  $j_0$  تنظیم می‌شود (ورودی‌ها در کران بالا و خروجی‌ها به کران پایین تنظیم می‌شوند) و به نفع سایر واحدها است. امتیاز کارایی  $h_{j_0}^u$  با چنین ترتیبی مربوط به بدترین حالت برای واحد  $j_0$  است (واحد  $j_0$  در نامطلوب‌ترین گزینه خود تنظیم می‌شود و همه واحدهای دارای داده‌های از دست رفته در موقعیت مطلوب خود تنظیم می‌شوند).

$$\min \quad h_{j_0} = \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^u - w_0$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^l = 1$$

$$(\varepsilon) \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u - w_0 \geq 0 \quad j = 1, \dots, n, j \neq j_0$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^u - \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^l - w_0 \leq 0$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \quad \forall r, i$$

مدل‌های (۳) و (۴)، برای همه واحدهای ارزیابی شده، فواصل محدودی از امتیاز کارایی  $[h_j^l, h_j^u]$ ، را ارائه می‌کنند؛ که می‌تواند برای تمایز بیشتر آن‌ها در سه کلاس کارایی به شرح زیر استفاده شود:

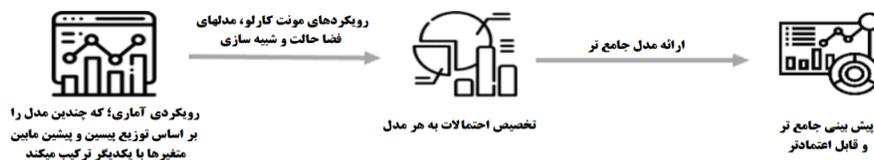
$$E^{++} = \left\{ j \in \frac{\{1, \dots, n\}}{h_j^u} = 1 \right\}$$

$$E^+ = \left\{ j \in \frac{\{1, \dots, n\}}{h_j^l} = 1 \quad \text{and} \quad h_j^u > 1 \right\}$$

$$E^- = \left\{ j \in \frac{\{1, \dots, n\}}{h_j^l} > 1 \right\}$$

مجموعه  $E^{++}$  شامل واحدهایی است که در هر صورت کارآمد هستند (هر ترکیبی از سطوح ورودی/خروجی). مجموعه  $E^+$  متشکل از واحدهایی است که به معنای حداکثر کارآمد هستند؛ اما تنظیمات ورودی/خروجی وجود دارد که تحت آن‌ها نمی‌توانند کارایی خود را حفظ کنند. در نهایت، مجموعه  $E^-$  از واحدهای قطعاً ناکارآمد تشکیل شده است.

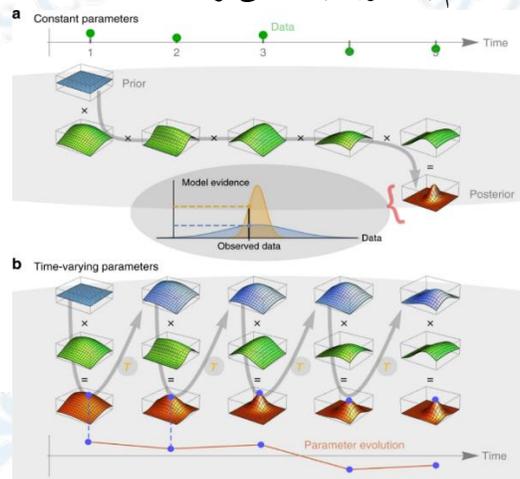
ب: رویکردهای بیزین غیرخطی  
 این رویکرد توانایی بسیار بالایی در شناسایی روابط مابین متغیرهای توضیحی و وابسته در یک سری داده دارد. به عبارتی این رویکردها توانایی شناسایی مهم‌ترین متغیرهای ورودی جهت محاسبه و برآورد یک شاخص را دارند. میانگین‌گیری مدل بیزی (BMA) یک تکنیک آماری است که در زمینه انتخاب مدل و عدم قطعیت مدل استفاده می‌شود. هدف اصلی آن، توضیح عدم قطعیت مربوط به انتخاب بهترین مدل واحد است، زمانی که چندین مدل رقیب وجود دارد که می‌تواند مجموعه داده‌های معینی را توضیح دهد. فرآیند برآورد این رویکرد در نمودار زیر ترسیم شده است.



نمودار ۲: فرآیند مدل‌سازی رویکردهای بیزین غیرخطی

منبع: کوپ و همکاران ۲۰۲۰

در نمودار زیر فرآیند اولویت‌بندی در رویکرد بیزین غیرخطی ارائه شده است؛ در ابتدا مقایسه‌های دو به دو صورت گرفته و با افزایش تعداد مقایسات روند اولویت‌بندی شکل می‌گیرد. به عبارتی اگر تغییری در مقایسه دو به دو، سه به سه و... همواره در اولویت بالاتری قرار گیرد، در حالت کلی از اولویت بالاتری در میان تمامی گزینه‌ها برخوردار خواهد بود. در این رویکرد برخلاف رویکرد تحلیل سلسه مراتبی که گزینه‌ها دو به دو مقایسه می‌شوند یا در رویکرد بهترین-بدترین که گزینه‌ها نسبت به فقط بهترین گزینه و بدترین گزینه مقایسه می‌شوند، در این رویکرد تمامی حالت‌های مقایسه به صورت آنالیز ترکیبی مقایسه شده و در نهایت اقدام به اولویت‌بندی می‌گردد:



نمودار ۳: روند شکل‌گیری مدل‌های میانگین‌گیری بیزین

مأخذ: مارک ۱ و همکاران ۲۰۱۸

### ۳. روش‌شناسی پژوهش

روش این پژوهش از در حوزه پژوهش‌های کتابخانه‌ای است. ابتدا با استفاده از رویکردهای بیزین غیرخطی مهم‌ترین شاخص‌های ورودی به DEA شناسایی شده و در نهایت با استفاده از رویکرد رگرسیونی اقدام به محاسبه دامنه مورد بررسی و در نهایت اقدام به تعیین کارایی واحدهای سازمانی مورد بررسی با استفاده از تحلیل پوشش داده‌ای فاصله‌ای می‌گردد. در نمودار (۴)، فلوجارت پژوهش ارائه شده است.

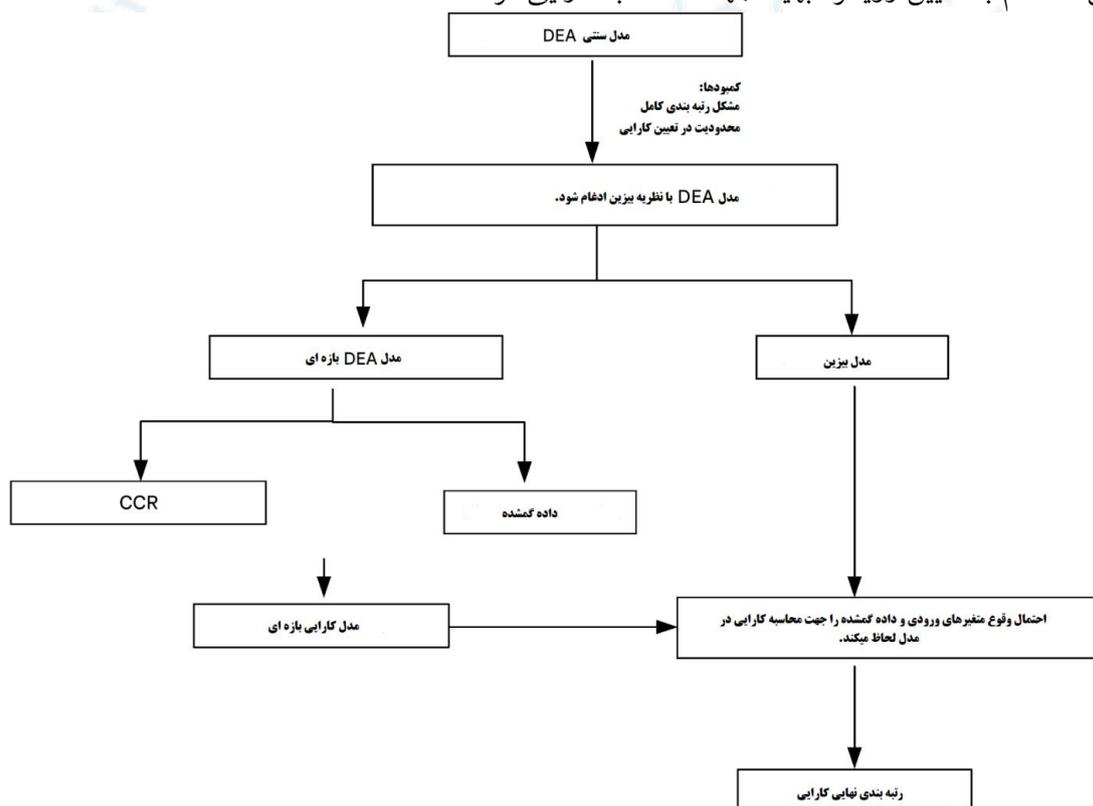


#### نمودار ۴: فرآیند انجام پژوهش

منبع: یافته‌های تحقیق

### ۴. یافته‌های پژوهش

بر اساس توضیحات فوق مدل مفهومی و فرآیندی پژوهش به شرح ذیل است. در این فرآیند نشان داده شده است که برای آنکه کارایی واحدهای سازمانی به درستی صورت بپذیرد نیاز است که به صورت بومی مهم‌ترین متغیرهای موثر بر عملکرد توسط رویکردهای میانگین‌گیری وزنی شناسایی گردد. در نهایت با توجه به وجود داده مفقودی در شاخص‌ها اقدام به تعیین رویکرد بهینه جهت محاسبه کارایی گردد.



#### نمودار ۵: فرآیند انجام پژوهش

منبع: یافته‌های تحقیق

### ۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادات

داده‌های گمشده در کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها یک بیماری مزمن محسوب می‌شوند در بسیاری از مقالات، اطلاعات مفقودی وجود دارد و محقق به اجبار این واحدها را از محاسبات حذف می‌نماید. این پژوهش تلاشی بر لحاظ نمود داده‌های گمشده بر اساس مدل‌های رگرسیونی پانلی در محاسبه کارایی است. نتایج بیانگر این واقعیت است که این رویکرد توانایی لحاظ نمودن عدم اطمینان در برآورد داده‌های گمشده را دارا هستند. امید می‌رود این مقاله موجب بهبود و توسعه DEA در داده‌های گمشده می‌گردد.



## منابع

- Aikins, E., dos Santos, S.P. & Amado, C.A.F. Exploring the Use of Data Envelopment Analysis for Formative Evaluation of Senior High Schools in Ghana. *J Knowl Econ* (2025). <https://doi.org/10.1007/s13132-025-02747-0>
- Akande O, Reiter J, Barrientos AF. Multiple imputation of missing values in household data with structural zeros. *Survey Methodology*. 2019; 45(2): 271–294.
- Berchtold A. Treatment and reporting of item-level missing data in social science research. *International Journal of Social Research Methodology*. 2019; 22(5): 431–439.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, 2, 1978, 429–444.
- Chen C, Ren J, Tang L, Liu H (2020) Additive integer-valued data envelopment analysis with missing data: A multi-criteria evaluation approach. *PLoS ONE* 15(6): e0234247. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0234247>
- Chen PC, Yu MM, Shih JC, Chang CC, Hsu SH. A reassessment of the Global Food Security Index by using a hierarchical data envelopment analysis approach. *European Journal of Operational Research*. 2019; 272(2): 687–698.
- Febrianti, Adjeng & Jufri, Nuke. (2022). Examining the predictors of firm performance: The role of transformational leadership, HRM digitalization, and organizational commitment. *International Journal of Research in Business and Social Science* (2147- 4478). 11. 131-139. 10.20525/ijrbs.v11i4.1788
- Gardijan M, Lukač Z. Measuring the relative efficiency of the food and drink industry in the chosen EU countries using the data envelopment analysis with missing data. *Central European Journal of Operations Research*. 2018; 26(3): 695–713.
- Hammon A, Zinn S. Multiple imputation of binary multilevel missing not at random data. *Journal of The Royal Statistical Society Series C–Applied Statistics*. 2020; 69(3): 547–564.
- Im J, Cho IH, Kim JK. FHDI: An R package for fractional hot deck imputation. *The R Journal*. 2018; 10(1): 140–154.
- Jiang Q, Yan X, Huang B. Neighborhood variational Bayesian multivariate analysis for distributed process monitoring with missing data. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2018; 27(6): 2330–2339.
- [Koop, G; McIntyre, S; Mitchell, J; Poon, A. \(2020\). Regional output growth in the United Kingdom: More timely and higher frequency estimates from 1970. \*Journal of Applied Econometrics\*, 35\(2\), 176–197.](#)
- Kuosmanen T. Modeling blank data entries in data envelopment analysis. Econ-WPA working paper at WUSTL. 2012; 10: 2. Available from: <https://econwpa.ub.uni-muenchen.de/econ-wp/em/papers/0210/0210001.pdf>.
- Li W, Yang S, Han P. Robust estimation for moment condition models with data missing not at random. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 2020; 207: 246–254.
- Madden G, Apergis N, Rappoport P, Banerjee A. An application of nonparametric regression to missing data in large market surveys. *Journal of Applied Statistics*. 2018; 45(7): 1292–1302.
- Maity AK, Pradhan V, Das U. Bias reduction in logistic regression with missing responses when the missing data mechanism is nonignorable. *The American Statistician*. 2019; 73(4): 340–349.



- Malan L, Smuts CM, Baumgartner J, Ricci C. Missing data imputation via the expectation-maximization algorithm can improve principal component analysis aimed at deriving biomarker profiles and dietary patterns. *Nutrition Research*. 2020; 75:67-76. pmid:32035304
- Mishra, Siddhant. (2024). The Future of Performance Management: Shifting from Annual Reviews to Continuous Feedback. *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology*. .12. 10.22214/ijraset.2024.64153
- O'neal PV, Ozcan YA, Ma Y. Benchmarking mechanical ventilation services in teaching hospitals. *Journal of Medical Systems*. 2002; 26(3): 227-240. pmid:12018609
- Schichtel BA, Gebhart KA, Morris KH, Cheatham JR, Vimont J, Larson RS, et al. Long-term trends of wet inorganic nitrogen deposition in Rocky Mountain National Park: Influence of missing data imputation methods and associated uncertainty. *Science of the Total Environment*. 2019; 687: 817-826. pmid:31412485
- Stead AD, Wheat P. The case for the use of multiple imputation missing data methods in stochastic frontier analysis with illustration using English local highway data. *European Journal of Operational Research*. 2020; 280(1): 59-77.
- Sunali Bindra, Sonali Bhattacharya, Shubhasheesh Bhattacharya; Traditional to digital: human resource management transformation. *Journal of Work-Applied Management* 2025; <https://doi.org/10.1108/JWAM-02-2025-0019>
- Wang Y, Li K, Gan S, Cameron C. Missing data imputation with OLS-based autoencoder for intelligent manufacturing. *IEEE Transactions on Industry Applications*. 2019; 55(6): 7219-7229.
- Wu MQ, Zhang CH, Liu XN, Fan JP. Green supplier selection based on DEA model in interval-valued Pythagorean fuzzy environment. *IEEE Access*. 2019; 7: 108001-108013.

Sari-Iran  
6-7 November 2025

## مدل $p$ -میانه معکوس و تابع توزیع شانس ایده‌ال $p$ -میانه معکوس روی شبکه تصادفی غیر قطعی

فاطمه تیمورزاده<sup>۱</sup>، دانشجوی دکتری، دانشگاه صنعتی سهند تبریز؛ f\_teymorzadeh401@sut.ac.ir  
 فهیمه باروقی<sup>۲</sup>، عضو هیئت علمی، دانشگاه صنعتی سهند تبریز؛ baroughi@sut.ac.ir  
 بهروز علی‌زاده<sup>۳</sup>، عضو هیئت علمی، دانشگاه صنعتی سهند تبریز؛ alizadeh@sut.ac.ir

چکیده: در این مقاله مسئله  $p$ -میانه معکوس روی شبکه‌ای که برخی از وزن راس‌ها و فاصله بین رئوس، متغیرهای غیرقطعی و برخی دیگر متغیرهای تصادفی هستند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا تابع توزیع شانس ایده‌ال  $p$ -میانه معکوس روی یک شبکه تصادفی غیرقطعی معرفی و یک روش برای بدست آوردن آن ارائه می‌گردد. سپس روشی برای بدست آوردن جواب مسئله  $p$ -میانه معکوس روی شبکه تصادفی غیرقطعی ارائه می‌شود.

کلمات کلیدی: مسئله  $p$ -میانه معکوس، تابع توزیع شانس ایده‌ال، شبکه تصادفی غیرقطعی.

### ۱ مقدمه

تصمیم‌های واقعی معمولاً در حالت نامشخصی گرفته می‌شوند. منظور از نامشخصی حادثه‌ای است که نتیجه آن در آینده برای ما مشخص می‌شود. برای مثال، قبل از پرتاب تاس نمی‌توان به طور دقیق پیش‌بینی کرد که کدام عدد ظاهر می‌شود. بنابراین پرتاب تاس نمونه‌ای از حوادث نامشخص است برای مدل‌بندی نامشخصی می‌توان از عدم قطعیت لیو استفاده کرد. نظریه عدم قطعیت لیو برای مدل‌بندی درجات باور به کار می‌روند. در واقع در صورت عدم وجود نمونه به اندازه کافی و عدم اطلاعات کافی می‌توان از درجه باور کارشناسان برای توصیف داده‌های غیرقطعی استفاده کرد. وقتی نمونه کافی برای برآورد توزیع احتمالی در دسترس نیست، می‌توان از درجه باور کارشناسان برای توصیف داده‌های غیرقطعی استفاده کرد. درجه باور کارشناسان بستگی به اطلاعات شخصی آنها در مورد داده‌های غیرقطعی دارد. در سال ۲۰۰۷، لیو نظریه عدم قطعیت را برای برخورد با درجات باور غیرقطعی معرفی کرد [۱]. لیو همچنین متغیر غیرقطعی را به عنوان یک مفهوم اساسی در نظریه عدم قطعیت معرفی کرد و برای توصیف متغیر غیرقطعی، مفهوم توزیع غیرقطعی را بیان کرد [۱]. بعلاوه لیو مفهوم توزیع غیرقطعی معکوس را ارائه داد [۳]. قضیه برگردانی اندازه [۳]، مفهوم استقلال متغیرهای غیرقطعی [۲]، قانون عملگری برای محاسبه توزیع غیرقطعی و توزیع غیرقطعی معکوس توابع یکنوای اکید از متغیرهای غیرقطعی مستقل [۳]، مفهوم عملگر مقدار مورد انتظار [۱] و همچنین خطی بودن آن [۳] توسط لیو ارائه شدند. لیو و ها یک فرمول کاربردی برای محاسبه مقادیر مورد انتظار توابع یکنوای اکید از

<sup>۱</sup>Fateme Teymorzadeh

<sup>۲</sup>Fahimeh Baroughi

<sup>۳</sup>Behrooz Alizadeh



متغیرهای غیرقطعی مستقل به دست آوردند [۴]. سلطان پور و همکاران در سال ۲۰۲۰، مساله  $p$ - میانه روی شبکه‌های تصادفی غیرقطعی را در نظر گرفتند و یک الگوریتم برای مساله تحت بررسی ارایه دادند [۵]. همچنین این نویسندگان در ادامه مساله مکان‌یابی میانه معکوس روی شبکه غیرقطعی را حل کردند [۶].

## ۲ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۲. [۱] متغیر غیرقطعی  $\tau$ ، یک تابع اندازه‌پذیر از فضای غیرقطعی  $(\Gamma, L, M)$  به مجموعه اعداد حقیقی است به طوری که برای هر مجموعه بورل  $B$  از اعداد حقیقی مجموعه  $\{\tau \in B\} = \{\gamma \in \Gamma | \tau(\gamma) \in B\}$  یک پیشامد باشد.

تعریف ۲.۲. [۴] اگر  $\tau$  یک متغیر غیرقطعی باشد، آنگاه توزیع غیرقطعی آن به‌ازای هر عدد حقیقی  $x$  به صورت زیر تعریف می‌شود  $\gamma(x) = M\{\tau \leq x\}$ .

تعریف ۳.۲. [۴] توزیع غیرقطعی  $\gamma(x)$  منظم گفته می‌شود هرگاه یک تابع اکیداً صعودی و پیوسته نسبت به  $x$  باشد بطوریکه  $0 < \gamma(x) < 1$  و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma(x) = 1$$

تعریف ۴.۲. [۴] اگر  $\tau$  یک متغیر غیرقطعی با توزیع غیرقطعی منظم  $\gamma(x)$  باشد، آنگاه تابع معکوس  $\gamma^{-1}(x)$  توزیع غیرقطعی معکوس  $\tau$  نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲. [۲] متغیرهای غیرقطعی  $\tau_n, \dots, \tau_r, \tau_1$  مستقل نامیده می‌شوند هرگاه برای مجموعه‌های بورل دلخواه  $B_n, \dots, B_r, B_1$  از اعداد حقیقی رابطه زیر برقرار باشد:

$$M \left\{ \bigcap_{i=1}^n (\tau_i \in B_i) \right\} = \prod_{1 \leq i \leq n} M \{ \tau_i \in B_i \}$$

قضیه ۶.۲. [۴] فرض کنید  $\tau_n, \dots, \tau_r, \tau_1$  متغیرهای غیرقطعی مستقل، به ترتیب با توزیع‌های غیرقطعی منظم  $\gamma_n, \dots, \gamma_r, \gamma_1$  باشند. اگر  $f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  نسبت به  $\tau_m, \dots, \tau_r, \tau_1$  اکیداً صعودی و نسبت به  $\tau_n, \dots, \tau_{m+2}, \tau_{m+1}$  اکیداً نزولی باشد، آنگاه توزیع غیرقطعی معکوس  $\tau = f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  به صورت زیر است:

$$\gamma^{-1}(\alpha) = f(\gamma_1^{-1}(\alpha), \gamma_2^{-1}(\alpha), \dots, \gamma_m^{-1}(\alpha), \gamma_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \dots, \gamma_n^{-1}(1-\alpha)).$$

تعریف ۷.۲. [۴] اگر  $\tau$  یک متغیر غیرقطعی باشد، آنگاه مقدار مورد انتظار آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[\tau] = \int_{-\infty}^{+\infty} M\{\tau \geq x\} dx - \int_{-\infty}^{\cdot} M\{\tau \leq x\} dx,$$

به شرطی که هر دو انتگرال بالا متناهی باشند.

## ۳ بیان مساله

فرض کنید یک شبکه  $N = (V(N), E(N))$  با مجموعه رأسی  $V(N)$  با  $|V(N)| = n$  و مجموعه یالی  $E(N)$  داده شده است هر یال  $e \in E(N)$  دارای طول مثبت  $L(e)$  و برای هر راس  $v_i \in V(N)$  وزن نامنفی  $w(v)$  اختصاص داده شده است. فرض کنید  $\{m_1, \dots, m_p\}$  یک مجموعه از پیش تعیین شده باشد. در مسئله مکان‌یابی  $P$ - میانه معکوس با تغییرات طول یالی و وزن راسی، هدف افزایش یا کاهش طول‌های یالی  $L(e)$ ،  $e \in E(w)$ ، به ترتیب با مقادیر  $x^+(e)$



و افزایش یا کاهش وزن‌های رأسی  $w(v)$ ،  $v \in V(N)$ ، به ترتیب با مقادیر  $x^+(v)$  و  $x^-(v)$  با کمترین هزینه کلی است طوری که  $\{m_1, \dots, m_p\}$  مکان  $P$  - میانه شبکه  $N$  گردد. فرض کنید  $c_e^+$  و  $c_e^-$  به ترتیب، هزینه‌های تحمیل شده از افزایش طول یال  $L(e)$  و وزن رأس  $w(v)$  به اندازه یک واحد بوده و  $c_v^+$  و  $c_v^-$  به ترتیب هزینه‌های تحمیل شده از کاهش وزن رأس  $w(v)$  و طول یال  $L(e)$  به اندازه یک واحد باشند. همچنین فرض کنید که افزایش یا کاهش دلخواه طول‌های یالی و وزن‌های رأسی مجاز نیست یعنی هر طول  $L(e)$  می‌تواند به ترتیب حداکثر به اندازه  $u_e^+$  و  $u_e^-$  افزایش یا کاهش و هر وزن  $w(v)$  می‌تواند به ترتیب حداکثر به اندازه  $u_v^+$  و  $u_v^-$  افزایش یا کاهش یابد. فرض کنید  $S$  مجموعه همه زیرمجموعه‌های  $P$  - عضوی از  $V(N)$  باشد لذا مساله مکان‌یابی  $P$  - میانه معکوس با تغییرات طول یالی و وزن رأسی را می‌توان به صورت زیر فرمولبندی کرد

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{e \in E(N)} (c_e^+ x^+(e) + c_e^-(e) x^-(e)) + \sum_{v \in V(N)} (c_v^+ x^+(v) + c_v^- x^-(v)) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{v \in V(N)} \tilde{w}(v) \min_{i=1, \dots, P} d_i(v, v_i) \leq \sum_{v \in V(N)} \tilde{w}(v) \min_{v_x \in S} d_i(v, v_x) \quad \forall S \in \mathcal{S} \\ & \bullet \leq x^+(e) \leq u_e^+, \quad \forall e \in E(N) \\ & \bullet \leq x^-(e) \leq u_e^-, \quad \forall e \in E(N) \\ & \bullet \leq x^+(v) \leq u_v^+, \quad \forall v \in V(N) \\ & \bullet \leq x^-(v) \leq u_v^-, \quad \forall v \in V(N) \end{aligned}$$

حال به بررسی مساله مکان‌یابی  $P$  - میانه معکوس روی شبکه‌ای که برخی از وزن رأسی‌ها و فاصله بین رأس‌ها متغیرهای غیرقطعی و برخی دیگر متغیرهای تصادفی هستند، پرداخته می‌شود. ابتدا تابع توزیع شانس ایده‌آل فرمولبندی و سپس روشی برای به دست آوردن  $P$  - میانه معکوس روی شبکه تصادفی غیرقطعی ارائه می‌گردد. فرضیات حل مسئله به شرح زیر است.

۱. شبکه داده شده همبند و غیر جهت‌دار است.
۲. وزن رأسی‌ها و فاصله بین رأسی‌ها یا متغیرهای غیرقطعی مثبت و یا متغیرهای تصادفی مثبت هستند.
۳. همه متغیرهای غیرقطعی و متغیرهای تصادفی مستقل هستند.

فرض کنید  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  مجموعه رأسی شبکه باشد و همچنین فرض کنید

$U = \{(v_i, v_j) \mid \text{کوتاه‌ترین فاصله بین رأسی‌های } v_i \text{ و } v_j \text{ غیرقطعی است}\} \cup \{v_k \mid \text{کوتاه‌ترین فاصله بین رأسی‌های } v_i \text{ و } v_j \text{ تصادفی است}\}$

$R = \{(v_i, v_j) \mid \text{کوتاه‌ترین فاصله بین رأسی‌های } v_i \text{ و } v_j \text{ تصادفی است}\} \cup \{v_k \mid \text{کوتاه‌ترین فاصله بین رأسی‌های } v_i \text{ و } v_j \text{ غیرقطعی است}\}$

و  $W$  گردابه‌ای از وزن‌ها و فاصله‌های غیرقطعی و تصادفی است. در این صورت چهارتایی  $(V, U, R, W)$  شبکه تصادفی غیرقطعی نامیده می‌شود.  $\tau_j$  و  $\eta_k$  به ترتیب نشان دهنده وزن هر رأس  $v_k \in U \cup R$ ،  $v_k \in U \cup R$  و فاصله بین دو رأس  $v_i$  و  $v_j$  است.  $(v_i, v_j) \in U \cup R$ ، هستند لذا اگر  $(v_i, v_j) \in U$ ،  $\tau_j$  و  $\eta_k$  متغیرهای غیرقطعی هستند، و اگر  $(v_i, v_j) \in R$ ،  $\tau_j$  و  $\eta_k$  متغیرهای تصادفی هستند بدون ایجاد خلل، فرض می‌کنیم متغیرهای غیرقطعی  $\tau_j$  و  $\eta_k$  و  $(v_i, v_j) \in U$ ، به ترتیب روی فضاها  $(\Gamma_1, L_1, M_1)$  و  $(\Gamma_2, L_2, M_2)$  و همچنین متغیرهای تصادفی  $\tau_j$  و  $\eta_k$  به ترتیب روی فضاها  $(\Omega_1, A_1, Pr_1)$  و  $(\Omega_2, A_2, Pr_2)$  تعریف شده باشند چون وزن‌ها و فاصله‌ها متناهی در نظر گرفته شده‌اند، داریم  $a_k \leq \eta_k \leq b_k$  و  $a_{ij} \leq \tau_{ij} \leq b_{ij}$  که  $a_{ij}$  و  $b_{ij}$  و  $a_k$  و  $b_k$  به ترتیب کران‌های پایین و بالا هستند. تعریف کنید  $\tau = \{\tau_{ij} \mid (v_i, v_j) \in U \cup R\}$  و  $\eta = \{\eta_k \mid v_k \in U \cup R\}$  مقدار بهینه مسئله  $P$  - میانه معکوس تابعی از وزن‌ها و فاصله‌هاست که با نماد  $f_P^I$  مشخص می‌کنیم که یک متغیر تصادفی غیرقطعی است  $f_P^I(\eta, \tau)$  در شبکه  $(V, U, R, W)$  را تابع توزیع شانس ایده‌آل می‌نامیم.

قضیه ۱.۳. شبکه تصادفی غیرقطعی  $(V, U, R, W)$  را در نظر بگیرید. فرض کنید وزن‌های غیرقطعی  $\eta_k$  و فاصله‌های



غیرقطعی  $\tau_{ij}$  به ترتیب دارای توزیع های غیرقطعی منظم  $\gamma_k$  و  $\gamma_i$  باشند و همچنین وزن های تصادفی  $\eta_k$  و فاصله های تصادفی  $\tau_{ij}$  به ترتیب دارای توزیع های احتمالی  $\psi_k$  و  $\psi_{ij}$  باشند در این صورت توزیع شانس ایده آل متناظر شبکه  $(V, U, R, W)$  برابر است،

$$\theta(y) = \int_{\cdot}^{\infty} \dots \int_{\cdot}^{\infty} F(y, z_k, z_{ij} | v_k, (v_i, v_j) \in R) \prod_{v_k \in R} d\psi_k(z_k) \prod_{((v_i, v_j) \in R)} d\psi_{ij}(z_{ij})$$

که در آن تابع توزیع غیرقطعی متغیر غیرقطعی

$$f_P^I(z_k, z_{ij} | v_k, (v_i, v_j) \in R, \eta_k, \tau_{ij} | v_k, (v_i, v_j) \in U)$$

است. و با تابع توزیع غیرقطعی معکوس

$$F^{-1}(\alpha | z_k, z_{ij} | v_k, (v_i, v_j) \in R)$$

که برابر است با،

$$f_P^I(z_k, z_{ij} | v_k, (v_i, v_j) \in R, \gamma_k^{-1}(\alpha), \gamma_{ij}^{-1}(\alpha) | v_k, (v_i, v_j) \in U),$$

تعیین می گردد. مقدار  $F_P^I$  را می توان از حل مدل  $P$  - میانه معکوس ارائه داد.

برای به دست آوردن تابع توزیع شانس ایده آل  $P$  - میانه معکوس روی شبکه های تصادفی ابتدا متغیرهای تصادفی را با یک گام مشخص گسسته سازی کرده و سپس برای هر مقدار گسسته سازی شده و هر  $\alpha \in \{0, 0.1, 0.2, \dots, 0.99\}$  مقدار تابع معکوس را با استفاده از مدل  $P$  - میانه معکوس محاسبه می کنیم و مقدار تابع توزیع معکوس را از فرم گسسته آن به دست می آوریم و در نهایت با استفاده از مقدار  $y_{ij}$  و توابع  $F_{ij}(y_{ij})$ ، تابع توزیع شانس ایده آل را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$\theta(y) = \sum_i \sum_j F_{ij} y_{ij}(z_{ij})$$

در نهایت برای پیدا کردن مسأله  $p$  - میانه معکوس در شبکه های تصادفی غیرقطعی تابع توزیع شانس ایده آل را طبق روش بالا به دست آورده و  $x_j$  و  $y_{ij}$  تخمین زده شده را در نظر می گیریم و تابع توزیع شانس  $\varphi(y)$  را برای تغییرات دوم محاسبه می کنیم و مقدار هدف مدل بهینه سازی  $\int_{\cdot}^{\infty} (\theta(y) - \varphi(y)) dy$  را محاسبه می کنیم و در نهایت تغییرات بهینه که این مقدار را مینیمم می کند انتخاب می کنیم.

## ۴ نتیجه گیری

در این مقاله مسئله  $p$  - میانه معکوس روی شبکه ای که برخی از وزن راس ها و فاصله بین رئوس متغیرهای غیرقطعی و برخی دیگر متغیرهای تصادفی هستند، مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا تابع توزیع شانس ایده آل  $p$  - میانه معکوس روی یک شبکه تصادفی غیرقطعی معرفی و یک روش برای بدست آوردن آن ارائه گردید. سپس روشی برای بدست آوردن مسئله  $p$  - میانه معکوس روی شبکه تصادفی غیرقطعی ارائه شد.

## مراجع

- [1] B. Liu, Uncertainty theory, 2nd edn, Springer-verlag, Berlin, 2007.
- [2] B. Liu, Some research problems in uncertainty theory, Journal of uncertain Systems, 3(1) (2009), 3-10.
- [3] B. Liu, Uncertainty theory : A branch of mathematics for modeling human uncertainty, Springer-verlag, Berlin, 2010.
- [4] Y. H. Liu and M. Ha, Expected value of function of uncertain variables, Journal of uncertain Systems 4(3) (2010), 181-186.
- [5] A. Soltanpour, F. Baroughi, B. Alizadeh, A solution algorithm for p-median location problem on uncertain random networks, Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics, Vol. 35, No. 1, 055-071, 2020.
- [6] A. Soltanpour, F. Baroughi, B. Alizadeh, Classical and inverse median location problems under uncertain environment, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, Vol. 36, No.2, 419-438, 2020.

# به کارگیری منطق فازی برای ارزیابی و رتبه بندی تأمین کنندگان مواد اولیه در صنایع خودروسازی (مطالعه‌ی موردی: شرکت ایران خودرو و سایپا)

داود درویشی<sup>۱</sup>، سیده حکیمه حسینی<sup>۲</sup>

۱- دانشیار دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

d\_darvishi@pnu.ac.ir

۲- دانش آموخته کارشناسی ارشد ریاضی محض، دانشگاه پیام نور، اصفهان، ایران

hakimehossieni1400@gmail

**چکیده:** در محیط رقابتی امروز، انتخاب و ارزیابی تأمین کنندگان مواد اولیه نقش بسیار مهمی در موفقیت صنایع خودروسازی دارد. به دلیل وجود عدم قطعیت و معیارهای کیفی در فرآیند تصمیم گیری، استفاده از منطق فازی می تواند ابزار مؤثری برای ارزیابی و رتبه بندی تأمین کنندگان باشد. در این پژوهش با استفاده از روش منطق فازی، تأمین کنندگان قطعات فلزی و پلیمری دو شرکت بزرگ خودروسازی ایران، یعنی ایران خودرو و سایپا، مورد بررسی قرار گرفته اند. شاخص هایی مانند کیفیت، هزینه، زمان تحویل، انعطاف پذیری و قابلیت اعتماد به عنوان معیارهای تصمیم گیری انتخاب شدند. نتایج حاصل از تحلیل داده ها با سیستم استنتاج فازی نشان داد که روش پیشنهادی می تواند تصمیم گیری دقیق تر و منطقی تری نسبت به روش های کلاسیک ارائه دهد.

**واژگان کلیدی:** منطق فازی، ارزیابی تأمین کننده، رتبه بندی، ایران خودرو، سایپا

## ۱. مقدمه

در سال های اخیر، رقابت شدید در صنایع خودروسازی باعث شده است که شرکت ها برای افزایش بهره وری و کاهش هزینه ها، بر بهبود زنجیره تأمین خود تمرکز کنند. یکی از مهم ترین بخش های این زنجیره، انتخاب و ارزیابی تأمین کنندگان مواد اولیه است. روش های سنتی ارزیابی تأمین کننده معمولاً بر اساس قضاوت های قطعی و عددی انجام می شوند؛ اما در عمل بسیاری از معیارها کیفی هستند (مانند کیفیت، انعطاف پذیری یا قابلیت

همکاری) و نمی‌توان آن‌ها را به صورت دقیق عددی بیان کرد. به همین دلیل، منطق فازی که توسط زاده در سال ۱۹۶۵ معرفی شد، ابزاری مناسب برای مدل‌سازی عدم قطعیت در چنین تصمیم‌هایی است.

## ۲. مبانی نظری

منطق فازی بر پایه‌ی مجموعه‌های فازی بنا شده است که به هر عنصر، درجه‌ای از عضویت بین صفر تا یک اختصاص می‌دهد. این ویژگی باعث می‌شود بتوان مفاهیمی چون "کیفیت خوب" یا "تحويل به موقع" را به صورت ریاضی بیان کرد. در سال‌های اخیر، پژوهش‌های متعددی از منطق فازی برای ارزیابی تأمین‌کنندگان استفاده کرده‌اند. برای مثال، چن و همکاران (۲۰۱۰) مدل AHP فازی را برای انتخاب تأمین‌کننده معرفی کردند و کافمن (۲۰۱۵) از سیستم استنتاج فازی برای صنایع خودروسازی بهره گرفت. در ایران نیز مطالعاتی توسط عباسی (۱۳۹۸) و کریمی (۱۴۰۰) نشان دادند که رویکرد فازی می‌تواند دقت تصمیم‌گیری در صنایع تولیدی را تا ۳۰٪ افزایش دهد. در ادامه این روند، پژوهش‌های متأخر از سال ۱۴۰۰ به بعد نشان‌دهنده شیفت به سوی مدل‌های ترکیبی پی‌شده هستند. امروزه، ترکیب فازی با روش‌های مبتنی بر فازی (Fuzzy AHP) با روش‌های چابک (Fuzzy BWM) (بهرتری-بدرتین روش)، Fuzzy TOPSIS یا Fuzzy DEMATEL است تا علاوه بر وزن‌دهی معیارها، تعاملات میان آن‌ها مانند تأثیر پایداری بر عمل‌کرد محیطی نیز مدل‌سازی شود. این رویکردهای ترکیبی، دقت ارزیابی را در مواجهه با معیارهای چندگان‌ها شامل پایداری و ریسک‌های ژئوپلیتیکی به شکل چشم‌گیری افزایش می‌دهند. علاوه بر این، آخرین مطالعات در سال‌های ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳ بر تلفیق منطق فازی با یادگیری ماشینی و شبکه‌های عصبی فازی (Fuzzy Neural Networks) متمرکز شده‌اند. این سیستم‌های هوشمند، قابلیت پیش‌بینی عمل‌کرد آتی تأمین‌کنندگان و میزان واکنش‌پذیری آن‌ها به شوک‌های زنجیره تأمین را فراهم می‌کنند. در صنایع مهم ایران، به کارگیری این سیستم‌های هوشمند فازی جهت مدیریت ریسک، افزایش بهره‌وری تخصصی منابع را تا ۳۰ تا ۴۰ درصد در پی داشته است.

## ۳. مدل پیشنهادی منطق فازی

در این پژوهش از سیستم استنتاج فازی نوع مامدانی استفاده شده است. ساختار کلی مدل شامل سه بخش است:

۱. فازی‌سازی ورودی‌ها

۲. قواعد استنتاج فازی

۳. دفاژی‌سازی خروجی‌ها

ورودی‌ها شامل پنج معیار اصلی هستند:

$C_1$  : کیفیت مواد

$C_2$  : هزینه تأمین

$C_3$  : زمان تحويل

$C_4$  : انعطاف پذیری

$C_5$  : قابلیت اعتماد

خروجی مدل: امتیاز نهایی تأمین کننده

## ۴. توابع عضویت فازی

برای هر متغیر ورودی، تابع عضویت مثلثی بین ۰ تا ۱۰ تعریف شد.

متغیر	دامنه	سطوح زبانی	نوع تابع عضویت
کیفیت	۰-۱۰	پایین، متوسط، بالا	مثلثی
هزینه	۰-۱۰	کم، متوسط، زیاد	مثلثی
زمان تحویل	۰-۱۰	کند، معمولی، سریع	مثلثی
انعطاف پذیری	۰-۱۰	ضعیف، متوسط، قوی	مثلثی
اعتماد	۰-۱۰	دامنه سطوح زبانی	نوع تابع عضویت
	۰-۱۰	پایین، متوسط، بالا	مثلثی

فرمول تابع عضویت مثلثی:

$$\mu = (x: a, b, c) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 0 & x \geq c \end{cases}$$

## ۵. داده‌های مطالعه موردی

سه تأمین کننده اصلی در زنجیره ایران خودرو و سایپا مورد بررسی قرار گرفتند:

تأمین کننده	هزینه	انعطاف پذیری	زمان تحویل	اعتماد
تأمین کننده A	۹	۷	۵	۸

۷	۶	۸	۷	تأمین کننده B
۶	۸	۶	۸	تأمین کننده C

## ۶. قواعد فازی

قواعد تصمیم گیری به صورت زبانی تعریف شدند، برای مثال:

۱. اگر کیفیت بالا و هزینه کم و زمان تحویل سریع باشد، آنگاه تأمین کننده عالی است.

۲. اگر کیفیت متوسط و هزینه زیاد باشد، آنگاه تأمین کننده ضعیف است.

۳. اگر اعتماد زیاد و انعطاف بالا باشد، آنگاه تأمین کننده خوب است.

در مجموع ۲۵ قاعده برای مدل تعریف شد.

۷. دفازی سازی و نتایج

دفازی سازی با روش مرکز ثقل انجام شد. امتیاز نهایی تأمین کنندگان به صورت زیر به دست آمد:

رتبه	امتیاز نهایی	تأمین کننده
۱	۸/۴۲	A
۲	۷/۳۵	B
۳	۶/۲۱	C

نمودار خروجی سیستم استنتاج فازی نشان داد که کیفیت و اعتماد بیشترین تأثیر را در رتبه بندی دارند.

## ۸. تحلیل و بحث

نتایج نشان داد که مدل فازی توانسته است اختلافات ظریف بین تأمین کنندگان را که در روش های عددی کلاسیک پنهان می ماند، به خوبی آشکار کند. تأمین کننده A، به دلیل کیفیت بالا و تحویل به موقع، بهترین گزینه برای ادامه همکاری شناخته شد. همچنین مدل قابلیت آن را دارد که با داده های جدید در دوره های مختلف به روزرسانی شود.

## ۹. نتیجه گیری و پیشنهادها

استفاده از منطق فازی در ارزیابی تأمین‌کنندگان صنایع خودروسازی باعث بهبود دقت و کارایی تصمیم‌گیری می‌شود. پیشنهاد می‌شود شرکت‌های ایران خودرو و سایپا از مدل‌های فازی چندمعیاره در انتخاب تأمین‌کنندگان جدید و بهبود روابط زنجیره تأمین استفاده کنند. در پژوهش‌های آینده می‌توان از مدل‌های AHP فازی یا TOPSIS فازی برای مقایسه نتایج بهره گرفت.

## منابع

- [1] عباسی، م. (۱۳۹۸). ارزیابی و انتخاب تأمین‌کنندگان با استفاده از منطق فازی در صنایع تولیدی ایران. فصلنامه مدیریت صنعتی، ۱۵(۲)، ۵۵-۷۲.
- [2] کریمی، ن. (۱۴۰۰). بهبود فرآیند انتخاب تأمین‌کنندگان در زنجیره تأمین با بهره‌گیری از روش AHP فازی. مجله پژوهش‌های مدیریت، ۲۳(۴)، ۹۱-۱۰۵.
- [3] رضایی، س. و محمدی، الف. (۱۳۹۹). کاربرد مدل TOPSIS فازی در ارزیابی عملکرد تأمین‌کنندگان قطعات خودرویی. مجله مهندسی صنایع و تولید، ۳۱(۱)، ۷۳-۸۸.
- [4] احمدی، ف. و سهرابی، ر. (۱۴۰۱). ترکیب روش‌های فازی و تصمیم‌گیری چندمعیاره برای انتخاب تأمین‌کنندگان زنجیره تأمین خودرو. مجله فناوری و نوآوری در مدیریت، ۵(۲)، ۴۵-۶۰.
- [5] حسینی، ن. (۱۴۰۲). کاربرد سیستم‌های هوشمند فازی در پیش‌بینی عملکرد تأمین‌کنندگان در صنایع خودروسازی. مجله مهندسی سیستم‌ها، ۱۷(۳)، ۱۱۱-۱۲۴.
- [6] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.
- [7] Hwang, C. L., & Chen, S. J. (1992). *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*.
- [8] Gupta, M. M., & Kaufmann, A. (2015). *Introduction to Fuzzy Arithmetic*



## مسئله $p$ - میانه (مورد انتظار) دوفازی منظم

شکوفه بازدار\*؛ دانشجوی دکتری گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی تبریز (سهند)، تبریز، ایران sh\_bazdar400@sut.ac.ir

فهیمه باروقی، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی تبریز (سهند)، تبریز، ایران baroughi@sut.ac.ir

خاطره قربانی مقدم، عضو هیئت علمی مؤسسه تحقیقات ریاضی دکتر مصاحب، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

k.ghorbani@khu.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله، مسئله مکان‌یابی  $p$  - میانه روی یک شبکه‌ی غیرقطعی بررسی می‌شود؛ شبکه‌ای که وزن‌های رأسی آن متغیرهای دوفازی منظم هستند. همچنین، مفهوم جدیدی با عنوان  $p$  - میانه مورد انتظار دوفازی منظم معرفی می‌گردد و نشان داده می‌شود که مسئله  $p$  - میانه دوفازی منظم روی شبکه‌های کلی  $NP$  - سخت است. علاوه بر این، روشی برای تعیین مکان 1 - میانه مورد انتظار دوفازی منظم روی شبکه‌های درختی غیرقطعی ارائه می‌شود. **کلمات کلیدی:** متغیر دوفازی منظم؛  $p$  - میانه؛ مقدار مورد انتظار.

### ۱ مقدمه

مسائل مکان‌یابی تسهیلات جایگاهی مهم در تحقیق در عملیات دارند و به دلیل کاربردهای گسترده و نقش مؤثرشان در تئوری و عمل، همواره مورد توجه پژوهشگران بوده‌اند. یکی از مسائل مکان‌یابی پرکاربرد، مسئله  $p$  - میانه است که نخستین بار توسط حکیمی روی گراف‌ها مطرح شد [۲]. هدف این مسئله تعیین  $p$  مکان بهینه برای ایجاد تسهیلات است، به گونه‌ای که مجموع فواصل وزن‌دار مشتریان تا نزدیک‌ترین سرویس‌دهنده به کمترین مقدار ممکن برسد. کریو و حکیمی ثابت کردند که این مسئله روی گراف‌های کلی  $NP$  - سخت است [۳]. گلدمن [۱] برای حالتی که  $p = 1$  (مسئله ۱ - میانه) و شبکه (گراف) یک درخت می‌باشد، یک الگوریتم با زمان اجرای خطی ارائه داد.

در بسیاری از مسائل دنیای واقعی، اغلب داده‌ها و پارامترها غیرقطعی و مبهم هستند. برای مقابله با این نوع ابهام، زاده [۸] نظریه‌ی مجموعه‌های فازی را معرفی کرد و نهیماس [۶] با تعریف متغیر فازی، این نظریه را گسترش داد. سپس لیو [۵] با ارائه‌ی تئوری اعتبار، چارچوبی دقیق‌تر برای مدل‌سازی فازی ارائه کرد. در سال ۲۰۰۲، لیو [۴] به منظور برخورد با عدم قطعیت‌های دوگانه، مفهوم متغیر دوفازی را به عنوان تعمیمی از متغیر فازی معرفی نمود؛ متغیری که مقادیر آن خود متغیرهای فازی‌اند. در سال ۲۰۲۱، ونگ و همکاران [۷] به دلیل کمبود خواص ریاضی متغیرهای دوفازی، متغیرهای دوفازی منظم را تعریف کردند و معیار مهم مقدار مورد انتظار را برای آن‌ها ارائه نمودند. سازمان‌دهی مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲ مفاهیم و قضایای مورد نیاز بیان می‌شود. در بخش ۳ یک فرمول‌بندی برای مسئله مکان‌یابی  $p$  - میانه کلاسیک روی شبکه‌ها ارائه می‌شود. بخش ۴ به بیان مسئله  $p$  - میانه (مورد انتظار) دوفازی منظم می‌پردازد و بخش ۵ به بحث و نتیجه‌گیری اختصاص دارد.



## ۲ مفاهیم مقدماتی

در این بخش برخی از تعاریف و قضایای مربوط به نظریه فازی، تئوری اعتبار و نظریه دوفازی مطرح می‌شود.

**تعریف ۱.۲.**  $\tilde{F} = (s, \alpha, \beta)_{LR} [V]$  را عدد فازی نوع  $LR$  گویند، هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{F}}(c) = \begin{cases} L\left(\frac{s-c}{\alpha}\right), & c \leq s, \alpha > 0, \\ R\left(\frac{c-s}{\beta}\right), & c > s, \beta > 0, \end{cases}$$

که در آن  $s$  مقدار میانه با  $\mu_{\tilde{F}}(s) = 1$  و  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب پهنای چپ و راست هستند. تابع  $L(\cdot)$  (و به طور مشابه  $R(\cdot)$ ) در بازه  $[0, +\infty)$  غیرافزایشی بوده و شرایط زیر را برآورده می‌سازد:  $L(0) = 1$ ،  $L(c) < 1$  برای هر  $c > 0$ ،  $L(c) > 0$  برای هر  $c < 1$  و  $L(1) = 0$  یا  $L(c) > 0$  دلخواه  $c$  (برای هر  $L(c) > 0$  و  $L(+\infty) = 0$ ).

**تعریف ۲.۲.** [۵] یک متغیر فازی  $\tilde{\zeta}$ ، یک تابع از فضای اعتبار  $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$  به مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. در این فضا،  $\Theta$  یک مجموعه‌ی ناتهی،  $\mathcal{P}(\Theta)$  مجموعه‌ی توانی  $\Theta$  و  $Cr$  نمایانگر اندازه‌ی اعتبار است.

**تعریف ۳.۲.** [۵] فرض کنید  $\tilde{\zeta}$  یک متغیر فازی با تابع عضویت  $\mu_{\tilde{\zeta}}$  باشد. در این صورت برای هر عدد حقیقی  $c$ ، توزیع اعتبار آن برابر با  $\Gamma_{\tilde{\zeta}}(c) = 1/2(\sup_{t \leq c} \mu_{\tilde{\zeta}}(t) + 1 - \sup_{t > c} \mu_{\tilde{\zeta}}(t))$  است.

**تعریف ۴.۲.** [۷] فرض کنید  $\tilde{\zeta}$  یک متغیر فازی نوع  $LR$  باشد. اگر توزیع اعتبار  $\tilde{\zeta}$ ، روی پشتیبان آن، اکیداً افزایشی و پیوسته باشد، در این صورت  $\tilde{\zeta}$  را یک متغیر فازی نوع  $LR$  منظم می‌نامند.

**تعریف ۵.۲.** [۷] یک متغیر دوفازی  $\tilde{\zeta}$ ، یک تابع از فضای اعتبار  $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$  به مجموعه‌ی متغیرهای فازی است.

**تعریف ۶.۲.** [۷] یک متغیر دوفازی منظم  $\tilde{\zeta}$ ، یک متغیر فازی نوع  $LR$  منظم  $\tilde{\zeta}$  است که روی مجموعه‌ی خاصی از متغیرهای فازی نوع  $LR$  منظم تعریف می‌شود، به گونه‌ای که توابع چپ و راست یکسان باشند  $(L(\cdot) = R(\cdot))$ ، پهنای چپ و راست با دو عدد مثبت مشخص شوند و برای هر  $\theta \in \Theta$ ، حداکثر  $\tilde{\zeta}(\theta)$  با  $\tilde{\zeta}(\theta)$  تعیین گردد. به عبارتی اگر برای  $i = 1, 2$ ،  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  اعداد حقیقی مثبت باشند، آنگاه فرم کلی  $\tilde{\zeta}$  به صورت  $(\tilde{\zeta}, \alpha_1, \beta_1)_{L_1 R_1}$  می‌باشد که در آن  $\tilde{\zeta} = (s, \alpha_2, \beta_2)_{L_2 R_2}$ . برای راحتی  $\tilde{\zeta}$  را عدد فازی اولیه و به ازای هر  $\theta \in \Theta$ ،  $\tilde{\zeta}(\theta)$  را عدد فازی ثانویه می‌نامند.

**قضیه ۷.۲.** [۷] فرض کنید برای  $i = 1, 2, \dots, n$ ،  $\tilde{\zeta}_i$  یک متغیر دوفازی منظم مستقل و عدد فازی اولیه  $\tilde{\zeta}_i$  از  $\tilde{\zeta}_i$  دارای توزیع اعتبار معکوس  $\Gamma_{\tilde{\zeta}_i}^{-1}$  باشد. اگر تابع  $h(r_1, r_2, \dots, r_n)$  نسبت به  $r_1, r_2, \dots, r_n$  اکیداً افزایشی باشد، آنگاه  $\tilde{\zeta} = h(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \dots, \tilde{\zeta}_n)$  نیز یک متغیر دوفازی منظم است و مقدار مورد انتظار آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{E}[\tilde{\zeta}] = \int_0^1 \int_0^1 h(\Gamma_{\tilde{\zeta}_1}^{-1}(\lambda), \Gamma_{\tilde{\zeta}_2}^{-1}(\lambda), \dots, \Gamma_{\tilde{\zeta}_n}^{-1}(\lambda)) d\lambda d\rho,$$

که برای  $i = 1, 2, \dots, n$ ،  $\tilde{\gamma}_i$  عدد فازی ثانویه  $\tilde{\zeta}_i$  است و به صورت  $\tilde{\gamma}_i = (\Gamma_{\tilde{\zeta}_i}^{-1}(\rho), \alpha_i, \beta_i)_{L_i R_i}$  بیان می‌شود.



### ۳ مسئله‌ی $p$ -میانه کلاسیک روی شبکه‌ها

شبکه‌ی همبند و غیرجهت‌دار  $\mathcal{N} = (V(\mathcal{N}), E(\mathcal{N}))$  را در نظر بگیرید که در آن  $V(\mathcal{N}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  مجموعه‌ی رأسی و  $E(\mathcal{N})$  مجموعه‌ی یالی را نشان می‌دهد. فرض کنید روی این شبکه،  $n$  رأس به‌عنوان مکان مشتریان و  $m$  رأس به‌عنوان مکان‌های کاندید برای تأسیس تسهیلات مشخص شده است. فرض کنید  $w_i > 0$  نمایانگر وزن مشتری  $i$  و  $d_{ij}$  بیانگر طول کوتاه‌ترین مسیر بین مشتری  $i$  ام و سرویس‌دهنده‌ی  $j$  ام است. همچنین فرض کنید  $x_j$  و  $y_{ij}$  متغیرهای تصمیم دودویی هستند.  $y_{ij} = 1$  اگر مشتری  $i$  به سرویس‌دهنده‌ی  $j$  اختصاص یابد، در غیر این صورت 0 است.  $x_j = 1$  اگر در مکان  $j$  سرویس‌دهنده‌ای تأسیس شود، در غیر این صورت 0 است. با این مفروضات، مسئله‌ی  $p$ -میانه روی شبکه‌ی  $\mathcal{N}$  می‌تواند به‌صورت مدل برنامه‌ریزی خطی صفر و یک زیر فرمول‌بندی شود:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i d_{ij} y_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^m x_j = p \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^m y_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

$$y_{ij} \leq x_j \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, m, \tag{3}$$

$$y_{ij}, x_j \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, m. \tag{4}$$

### ۴ مسئله‌ی $p$ -میانه (مورد انتظار) دوفازی منظم روی شبکه‌های غیرقطعی

فرض کنید  $\tilde{\mathcal{N}} = (V(\tilde{\mathcal{N}}), E(\tilde{\mathcal{N}}), \tilde{\zeta})$  یک شبکه‌ی غیرقطعی همبند غیرجهت‌دار با مجموعه‌ی رأسی  $V(\tilde{\mathcal{N}}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ، مجموعه‌ی یالی  $E(\tilde{\mathcal{N}})$  و مجموعه‌ی وزن‌های رأسی  $\tilde{\zeta} = \{\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \dots, \tilde{\zeta}_n\}$  باشد که در آن وزن‌های رأسی به‌صورت متغیرهای دوفازی منظم مستقل در نظر گرفته شده‌اند.

**تعریف ۱.۴.** فرض کنید  $A_p \subseteq V(\tilde{\mathcal{N}})$  با  $|A_p| = p$  و مقدار متغیر  $x_j = 1$  اگر رأس  $v_j \in A_p$  و در غیر این صورت 0 است و مقدار متغیر  $y_{ij} = 1$  اگر مشتری  $v_i$  به سرویس‌دهنده‌ی  $v_j \in A_p$  اختصاص یابد و در غیر این صورت 0 است. با این مفروضات،  $A_p$  یک  $p$ -مکان سرویس‌دهنده است اگر و تنها اگر در قیود ۱ تا ۴ صدق کند.

فرض کنید  $A_p$  یک  $p$ -مکان سرویس‌دهنده باشد. تعریف کنید  $\tilde{G}(A_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{\zeta}_i d_{ij} y_{ij}$  بدیهی است که  $\tilde{G}(A_p)$  یک متغیر دوفازی منظم است.

**تعریف ۲.۴.** شبکه‌ی غیرقطعی  $\tilde{\mathcal{N}}$  را در نظر بگیرید. فرض کنید که  $A_p^*$  یک  $p$ -مکان سرویس‌دهنده باشد.  $A_p^*$  را یک  $p$ -میانه مورد انتظار دوفازی منظم گویند، اگر به‌ازای هر  $p$ -مکان سرویس‌دهنده‌ی  $A_p \subseteq V(\tilde{\mathcal{N}})$  داشته باشیم  $E(\tilde{G}(A_p^*)) \leq E(\tilde{G}(A_p))$ .

براساس تعریف ۲.۴ و قضیه ۷.۲، قضیه زیر برای حل مسئله‌ی  $p$ -میانه مورد انتظار دوفازی منظم نتیجه می‌شود.

قضیه ۳.۴. شبکه‌ی غیرقطعی  $\tilde{N}$  را در نظر بگیرید. فرض کنید برای هر  $v_i$ ، وزن  $\tilde{\zeta}_i$  یک متغیر دوفازی منظم مستقل و عدد فازی اولیه  $\tilde{\zeta}_i$  از  $\tilde{\zeta}_i$  دارای توزیع اعتبار معکوس  $\Gamma_{\tilde{\zeta}_i}^{-1}$  باشد. در این صورت  $p$ -میانه مورد انتظار دوفازی منظم شبکه‌ی  $\tilde{N}$ ،  $p$ -میانه شبکه‌ی  $N$  است به طوری که  $E(N) = E(\tilde{N})$ ،  $V(N) = V(\tilde{N})$  و وزن هر رأس  $v_i$  برابر با  $E(\tilde{\zeta}_i)$  باشد. با توجه به  $NP$ -سخت بودن مسئله‌ی  $p$ -میانه روی گراف‌های کلی و قضیه ۳.۴، قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۴.۴. مسئله‌ی  $p$ -میانه دوفازی منظم روی شبکه‌ها  $NP$ -سخت است.

چون مسئله‌ی  $p$ -میانه دوفازی منظم روی شبکه‌های کلی  $NP$ -سخت است، حالت خاص آن، یعنی مسئله‌ی ۱-میانه مورد انتظار دوفازی منظم روی شبکه‌های درختی غیرقطعی در نظر گرفته می‌شود و روش حلی برای آن ارائه می‌گردد. بدین منظور، ابتدا براساس قضیه ۳.۴، درخت قطعی متناظر ایجاد شده و سپس با استفاده از الگوریتم گلدمن [۱]، مکان ۱-میانه مقدار مورد انتظار دوفازی منظم تعیین می‌شود.

## ۵ نتایج

در این مقاله، مسئله‌ی مکان‌یابی  $p$ -میانه روی شبکه‌ای با وزن‌های رأسی دوفازی منظم بررسی شد. سپس با بیان مفهوم مکان  $p$ -میانه مورد انتظار دوفازی منظم نتیجه شد که یک رابطه‌ی معادل بین مسئله‌ی  $p$ -میانه مورد انتظار دوفازی منظم روی شبکه‌های غیرقطعی و مسئله‌ی  $p$ -میانه کلاسیک روی شبکه‌های قطعی وجود دارد. در آخر یک روش حل برای مسئله‌ی ۱-میانه مورد انتظار دوفازی منظم ارائه شد.

## ۶ مراجع

- [1] A.J. Goldman, "Optimal center location in simple networks," *Transportation Science*, vol. 5, pp. 212-221, May 1971.
- [2] S.L. Hakimi, "Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems," *Oper. Res.*, vol. 13, pp. 462-475, Jun. 1965.
- [3] O. Kariv, S.L. Hakimi, "An algorithmic approach to network location problems. I: The  $p$ -centers," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 37, pp. 513-538, Dec. 1979.
- [4] B. Liu, "Toward fuzzy optimization without mathematical ambiguity," *Fuzzy Optimization and Decision Making*, vol. 1, pp. 43-63, Feb. 2002.
- [5] B. Liu, "Uncertainty Theory," Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [6] S. Nahmias, "Fuzzy variables," *Fuzzy Sets Syst*, vol. 1, pp. 97-110, Apr. 1978.
- [7] G. Wang, Y. Shen, Y. Jiang, J. Chen, "The scalar mean chance and expected value of regular bifuzzy variables," *Symmetry*, vol. 13, pp. 1428, Aug. 2021.
- [8] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, Jun. 1965.

## مدل ریاضی برای مسأله بازیافت زباله خشک در شرایط عدم قطعیت

مائده غلامی اوریمی<sup>۱</sup>، دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

[maedehgholamiorimi1364@gmail.com](mailto:maedehgholamiorimi1364@gmail.com)

سید هادی ناصری<sup>۲</sup>، دانشیار گروه علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران. [nhadi57@gmail.com](mailto:nhadi57@gmail.com)

گوهر شکوری<sup>۳\*</sup>، استادیار گروه علوم پایه، مؤسسه آموزش عالی رحمان، رامسر، ایران. [gshakoori2@gmail.com](mailto:gshakoori2@gmail.com)

**چکیده:** در دنیای امروز، افزایش تولید زباله‌های خشک به دلیل مصرف گسترده از مصنوعات مصرفی در صنایع مختلف مانند چاپ، بسته‌بندی و... به یکی از چالش‌های مهم زیست‌محیطی تبدیل شده است. مدیریت ناکارآمد این نوع پسماندها باعث افزایش اتلاف منابع طبیعی، افزایش آلاینده‌های زیست‌محیطی و فشار بر زیرساخت‌های شهری و همچنین افزایش انتشار گازهای گلخانه‌ای ناشی از دفن این زباله‌ها می‌شود. طراحی یک مدل ریاضی کارآمد، نقش حیاتی در بهبود این فرآیند و کاهش اثرات منفی زیست‌محیطی داشته که علاوه بر مزایای زیست‌محیطی، فرصت‌های اقتصادی مهمی نیز ایجاد می‌کند. طراحی یک مدل ریاضی در شرایط عدم قطعیت ضرورتی انکارناپذیر است. در این راستا، پژوهش حاضر به ارائه یک مدل ریاضی برای طراحی و بهینه‌سازی سیستم بازیافت زباله خشک در شرایط عدم قطعیت می‌پردازد.

**کلمات کلیدی:** پسماند، مدیریت زباله خشک، برنامه ریزی آرمانی.

### ۱. مقدمه

با توجه به افزایش مصرف منابع در نتیجه افزایش جمعیت جهان، تولید زباله های خشک ابعاد زیادی به خود گرفته است. در سال‌های اخیر، رشد مصرف محصولات بسته‌بندی و صنعتی منجر به افزایش چشمگیر زباله‌های خشک شده است. در ایران، با رشد جمعیت و شهرنشینی، مدیریت ناکارآمد این پسماندها موجب تخریب محیط زیست، اتلاف منابع طبیعی و افزایش گازهای گلخانه‌ای شده است. در سایه تحولات تکنولوژی و افزایش آگاهی‌های عمومی، سیستم‌های جدید مدیریت پسماند در کشورهای صنعتی و سایر کشورهای دنیا به تدریج توسعه یافت. در این دگرگونی‌ها توجه به مسایل زیست محیطی و شرایط سیاسی و اقتصادی آن، مسایلی نظیر صرفه‌جویی در مصرف مواد انرژی و بازیافت آن‌ها از پسماند شهری به طور جدی مورد توجه قرار گرفته و به مرور زمان فرآیند پردازش و

<sup>\*</sup>[gshakoori2@gmail.com](mailto:gshakoori2@gmail.com)

بازیافت پسماند جایگاه کلیدی تری در مدیریت پسماند پیدا کرد. طراحی یک مدل ریاضی که بتواند در شرایط واقعی و متغیر عملکرد بهینه‌ای داشته باشد، ضرورتی انکارناپذیر است.

پتی و همکاران [۳] یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی (MIGP) برای مسئله مکان‌یابی پیشنهاد داده است. این مدل می‌تواند در تجزیه و تحلیل تعادل بین دستیابی به اهداف در استراتژی‌های ترکیبی مختلف استفاده کند. شریف و همکاران [۴] یک مدل تصمیم‌گیری برای سه تصمیم مکان، تخصیص و مسیریابی انواع مختلف بازیافت اراده دادند. نقاط جمع‌آوری بازیافت را بر اساس ظرفیت مرکز بازگشت متمرکز موجود، به آن اختصاص داده و تخصیص مشابه به همه مراکز را از طریق مسیریابی بهینه برای کامیون‌ها تضمین کرد. این مطالعه به بررسی کاهش هزینه جمع‌آوری، کاهش هزینه‌های عملیاتی همراه با دستیابی به مزایای زیست‌محیطی بالاتر پرداخت. برای مدل یک مطالعه موردی در هند با استفاده از داده‌های بازیابی شده و با رویکرد مدل‌سازی تجزیه‌شده مرسوم، ارائه دادند. بال و ساتوجلا [۱] به مطالعه ای برای فرآیند جمع‌آوری محصولات WEEE از نقاط خدماتی، انتقال آنها به مراکز بازیافت و بازیابی مواد زائد پرداخت و یک مدل ریاضی چند تأسیساتی، چند محصولی و چند دوره‌ای با در نظر گرفتن شرایط واقعی ارائه داد. برای حل آن رویکرد سه‌گانه را در نظر گرفته و از برنامه‌ریزی آرمانی برای دستیابی به اهداف اقتصادی، اجتماعی و زیست‌محیطی استفاده کرد. تسنگ و همکاران [۵] برای کاهش آلودگی و اثرات نامطلوب آن، یک مدل تصمیم‌گیری چندهدفه را اراده دادند و برای این مدل لجستیک رو به جلو و معکوس را ادغام کرده تا بهترین روش برای گنجاندن بازیافت و کاهش هزینه‌های تولید را تعیین کند. هوسین و همکاران [۲] یک مدل جدید برنامه‌ریزی آرمانی چندگزینه‌ای فازی وزنی-جمعی (WA-FMCGP) را برای حل مسئله تصمیم‌گیری غیردقیق پیشنهاد دادند که در آن چندین هدف متضاد وجود دارد. برای هر هدف سطوح آرمانی چندگزینه‌ای در نظر گرفتند و پارامترهای فازی را بر حسب توابع عضویت (MF) بیان نمودند و از یک تابع هدف که مجموع وزنی-جمعی انحرافات نرمال شده را به حداقل می‌رساند، استفاده نمودند که از مزایای این مدل FGP-MCGP برنامه‌ریزی آرمانی فازی چندگزینه‌ای است.

با توجه به ناکارآمدی بسیاری از روش‌های سنتی بازیافت، پژوهش حاضر به دنبال طراحی و توسعه یک مدل ریاضی پیشرفته برای مدیریت بهینه بازیافت زباله‌های خشک در شرایط عدم قطعیت است. هدف از این مدل چند هدفه، هم‌راستا کردن اهداف اقتصادی (کاهش هزینه)، زیست‌محیطی (کاهش ضایعات بی‌کیفیت)، و عملکردی (افزایش نرخ بازیافت) می‌باشد. با رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی به حل آن می‌پردازیم.

## ۲. بیان مسأله

یکی از کاربردهای دیگر برنامه‌ریزی خطی، مدیریت پسماند می‌باشد که امروزه به عنوان یک مسأله مهم و جدایی‌ناپذیر از زندگی انسانها است. اما برنامه‌ریزی ریاضی فازی فرصتی برای مدل‌سازی داده‌هایی که دارای شرایط عدم قطعیت با مقادیر تخطی مجاز که تصمیم‌گیرنده مناسب می‌داند، فراهم می‌کند. در واقع با به کارگیری برنامه‌ریزی خطی فازی با در نظر گرفتن مفروضاتی که به طور کامل شرایط مسائل دنیای واقعی را منعکس می‌کند، به بهره‌وری بهتر از منابع موجود و اهداف بهینه می‌توان دست یافت. مدل پیشنهادی علاوه بر در نظر گرفتن چندین دوره زمانی (بحرانی، عادی، و فصلی)، قابلیت اعمال محدودیت‌های متنوع عملیاتی، ظرفیتی، انتقال، منابع انسانی، و مراکز میان‌دوره‌ای را داراست که به واقع‌گرایی و انعطاف‌پذیری آن کمک شایانی می‌کند.

تابع هدف (۱) انحرافات از اهداف پیشنهادی را به حداقل می‌رساند،



$$\min z_1 = \alpha_1 dc^+ + \alpha_2 \sum_{b \in B} \sum_{t \in T} dd_{bt}^+ + \alpha_3 \sum_{i \in I} \sum_{c \in C} \sum_{t \in T} df_{ict}^- + \alpha_4 \sum_{i \in I} dq_i^- + \alpha_5 \sum_{t \in T} da_t^- + \alpha_6 db^- + \alpha_7 \sum_{b \in B} \sum_{v \in V} \sum_{t \in T} dv_{bvt}^- + \alpha_8 \sum_{b \in B} \sum_{d \in D} \sum_{v \in V} \sum_{t \in T} dg_{dbvt}^- \quad (1)$$

هزینه کل در هر دوره :

$$r_t = \sum_{i \in I} h_i(en_{it} + ef_{it}) + \sum_{i \in I} \sum_{b \in B} \sum_{d \in D} \sum_{v \in V} cq_{idt} q_{idbvt} (1 - w_i) + \sum_{f \in F} \sum_{i \in I} cf_{ift} qr_{ift} (1 - w_i) + \sum_{c \in C} \sum_{i \in I} frqv_{ict} + \sum_{d \in D} \sum_{j \in J} \sum_{b \in B} \sum_{v \in V} ctdt_{dj} \chi_{djvbt} + ck \sum_{i \in I} qt_{it} w_i, t \in T \quad (2)$$

محدودیت‌های جمع‌آوری و حمل و نقل مواد، مسیریابی وسایل نقلیه و تعداد سفرها :

$$\sum_{j \in J} x_{djvbt} \leq 1, d \neq j, b \in B, v \in V, t \in T \quad (3)$$

$$\sum_{j \in J} x_{d_0 jvbt} \geq \sum_{d \in D} x_{dkbvt}, k \in K, k \neq d, b \in B, v \in V, j \neq d_0, d \neq d_0, t \in T \quad (4)$$

$$\sum_{d \in D} x_{dkbvt} = \sum_{j \in J} x_{kjvbt}, k \in K, k \neq d, j \neq k, b \in B, v \in V, t \in T \quad (5)$$

$$\delta_{bvt} = \sum_{j \in J, j \neq d_0} x_{d_0 jvbt}, b \in B, v \in V, t \in T \quad (6)$$

$$\sum_{v \in V} \delta_{bvt} \leq \theta_{bvt}, b \in B, t \in T \quad (7)$$

$$\sum_{j \in J} x_{djvbt} = \gamma_{dbvt}, d \in D, d \neq d_0, d \neq j, b \in B, v \in V, t \in T \quad (8)$$

$$\sum_{j \in J, j \neq d_0} x_{d_0 jvbt} \leq \sum_{j \in J, j \neq d_0} x_{jd_0 bv-t}, b \in B, v \in V, v \neq 1, t \in T \quad (9)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{d \in D, d \neq d_0} q_{idbvt} \leq kt_b \delta_{bvt}, b \in B, v \in V, t \in T \quad (10)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{d \in D} q_{idbvt} + dv_{bvt}^- \leq ktm_{bvt} \delta_{bvt}, b \in B, v \in V, d \neq d_0, t \in T \quad (11)$$

$$\sum_{i \in I} q_{idbvt} + dg_{dbvt}^- \leq khm_{dbvt} \gamma_{dbvt}, d \in D, b \in B, v \in V, t \in T \quad (12)$$

$$\sum_{i \in I} q_{idbvt} \geq kd \gamma_{dbvt}, d \in D, b \in B, v \in V, t \in T \quad (13)$$

$$\sum_{i \in I} q_{idbvt} \leq qc_{dbvt}, d \in D, d \neq d_0, b \in B, v \in V, t \in T \quad (14)$$

$$qc_{jbvt} \geq qc_{dbvt} + kt_b (x_{djvbt} - 1) + \sum_{i \in I} q_{ijvbt}, d \in D, d \neq d_0, j \in J, j \neq d_0, j \neq d, b \in B, v \in V, t \in T \quad (15)$$



$$qc_{jvbt} \leq kt_b \sum_{i \in I} x_{djvbt}, j \in J, j \neq d_0, j \neq d, b \in B, v \in V, t \in T \quad (16)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{j \in J, j \neq d} dt_{dj} x_{djbt} - dd_{bvt}^+ \leq l_{bvt}, b \in B, v \in V, t \in T \quad (17)$$

$$kh_{idt} + ed_{idt-1} = kq_{idt}, i \in I, d \in D, t \in T \quad (18)$$

$$kq_{idt} - \sum_{b \in B} \sum_{v \in V} q_{idbvt} = ed_{idt}, i \in I, d \in D, t \in T \quad (19)$$

$$\sum_{b \in B} q_{idbvt} \leq kq_{idt} - \sum_{b \in B} q_{idv-1t}, i \in I, d \in D, v \in V, v \geq 2, t \in T \quad (20)$$

$$\sum_{b \in B} \sum_{v \in V} q_{idbvt} \leq kq_{idt}, i \in I, d \in D, t \in T \quad (21)$$

$$\sum_{b \in B} \sum_{d \in D} \sum_{b \in B} \sum_{v \in V} \sum_{t \in T} q_{idbvt} - db^- \geq \pi \quad (22)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{b \in B} \sum_{v \in V} q_{idbvt} + \sum_{f \in F} qr_{ift} = qf_{it}, i \in I, t \in T \quad (23)$$

$$qf_{it}(1-w_i) + en_{it-1} - en_{it} = qf_{it}, i \in I, t \in T \quad (24)$$

$$\sum_{c \in C} qv_{ict} = qf_{it} + ef_{it-1} - ef_{it}, i \in I, t \in T \quad (25)$$

$$\sum_{c \in C} qv_{ict} \leq \sum_{t \in T} dq_{ict}, i \in I, c \in C \quad (26)$$

$$\sum_{i \in I} qf_{it} \leq ko_t, t \in T \quad (27)$$

$$\sum_{i \in I} en_{it} \leq ken, t \in T \quad (28)$$

$$\sum_{i \in I} ef_{it} \leq kef, t \in T \quad (29)$$

$$\kappa_{ift} \leq qr_{ift} \leq \eta_{ift} \quad (30)$$

$$\sum_{c \in C} \sum_{t \in T} qv_{ict} + dq_i^- \geq \chi_i, i \in I \quad (31)$$

$$qv_{ict} + df_{ict}^- \geq \lambda_{ict}, i \in I, c \in C, t \in T \quad (32)$$

$$\sum_{i \in I} qf_{it} + da_t^- \geq \varphi_t, t \in T \quad (33)$$

$$\sum_{i \in I} r_i + dc^+ \leq od \quad (34)$$

محدودیت‌های باینری و نامنفی بودن متغیرها

$$\begin{aligned}
 &ed_{idt}, q_{idbvt}, qc_{dbvt} \geq 0; x_{djbvt}, \gamma_{dbvt}, \delta_{bvt} \in \{0, 1\} \\
 &db^-, da_t^-, dd_t^+, dv_{bvt}^-, dg_{dbvt}^-, dq_i^-, df_{ict}^-, dc^+ \geq 0 \\
 &qf_{it}, en_{it}, ef_{it}, qv_{ict} \geq 0 \\
 &i \in I, d \in D, c \in C, f \in F, j \in J, b \in B, v \in V, t \in T
 \end{aligned} \tag{۳۵}$$

در این تحقیق یک مدل ریاضی جدید با مفروضات در نظر گرفته شد که شامل متغیرهای تصمیم، تعداد وسایل جمع‌آوری، مکان‌های بازیافت، مقدار زباله بازیافتی بوده و هدف آن، حداقل‌سازی هزینه‌ها و حداکثرسازی سود با محدودیت‌های ظرفیت وسایل حمل‌ونقل، محدودیت منابع و زمان و نوسانات در نرخ تولید زباله است.

#### ۴. تشریح نتایج

این پژوهش با طراحی یک مدل ریاضی چندهدفه در شرایط عدم قطعیت، راهکاری علمی و عملی برای مدیریت بهینه بازیافت پسماند خشک ارائه می‌دهد. مدل پیشنهادی با در نظر گرفتن عوامل واقعی و متغیر، می‌تواند به تحقق اهداف توسعه پایدار، حفظ منابع طبیعی و ارتقای بهره‌وری اقتصادی کمک کند. با توجه به پیچیدگی‌های موجود در فرآیند بازیافت، از جمله نوسانات در حجم و کیفیت زباله، تغییرات هزینه‌های عملیاتی، و ناپایداری بازار مواد بازیافتی، استفاده از رویکردهای تصمیم‌گیری تحت عدم قطعیت مانند برنامه‌ریزی آرمانی فازی ضروری به نظر می‌رسد. مدل پیشنهادی با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از پارامترها، متغیرهای تصمیم‌گیری و محدودیت‌های عملیاتی، توانست ساختار شبکه لجستیکی بازیافت را به صورت واقع‌گرایانه و انعطاف‌پذیر شبیه‌سازی کند. این مدل نه تنها مسیرهای بهینه جمع‌آوری و تخصیص منابع را تعیین کرد، بلکه با تحلیل حساسیت، تأثیر تغییرات پارامترها را بر عملکرد سیستم ارزیابی کرده و راهکارهایی برای کاهش هزینه‌ها و افزایش نرخ بازیافت ارائه داد.

#### منابع

- Bal, A., & Satoglu, S. I. (2018). A goal programming model for sustainable reverse logistics operations planning and an application. *Journal of cleaner production*, 201, 1081-1091.
- Hocine, A., Zhuang, Z. Y., Kouaissah, N., & Li, D. C. (2020). Weighted-additive fuzzy multi-choice goal programming (WA-FMCGP) for supporting renewable energy site selection decisions. *European Journal of Operational Research*, 285(2), 642-654.
- Pati, R. K., Vrat, P., & Kumar, P. (2008). A goal programming model for paper recycling system. *Omega*, 36(3), 405-417.
- Sheriff, K. M., Subramanian, N., Rahman, S., & Jayaram, J. (2017). Integrated optimization model and methodology for plastics recycling: Indian empirical evidence. *Journal of Cleaner Production*, 153, 707-717
- Tseng, S. H., Wee, H. M., Song, P. S., & Jeng, S. (2019). Optimal green supply-chain model design considering full truckload. *Kybernetes*, 48(9), 2150-2174.

# ارائه یک مدل فازی برای زنجیره تأمین معکوس با در نظر گرفتن معیارهای زیست محیطی

<sup>۱</sup> محقق پسا دکترا، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه مازندران، بابلسر mariyatoofan74@gmail.com  
<sup>۲</sup> سید هادی ناصری اوجاکی، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه مازندران، بابلسر nhadi57@gmail.com

**چکیده:** در این پژوهش، مدلی برای بهینه‌سازی زنجیره تأمین معکوس در شرایط عدم قطعیت ارائه شده است. در این مدل، پارامترهایی مانند هزینه‌ها، ظرفیت‌ها و زمان‌ها به صورت فازی و با استفاده از اعداد مثلثی فازی در نظر گرفته شده‌اند. اهداف مدل شامل کمینه‌سازی هزینه‌های کل شبکه و کاهش انتشار گاز CO<sub>2</sub> است. برای حل مدل از رویکرد دو مرحله‌ای خیمینز و همکاران به همراه روش  $\epsilon$ -constraint استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد در نظر گرفتن ابهام در داده‌ها باعث تصمیم‌گیری‌های واقع‌گرایانه‌تر و افزایش پایداری زیست‌محیطی می‌شود. این مدل می‌تواند به عنوان ابزاری مؤثر برای مدیران زنجیره تأمین در مواجهه با شرایط عدم قطعیت مورد استفاده قرار گیرد.

**کلمات کلیدی:** زنجیره تأمین معکوس، بهینه‌سازی فازی، عدم قطعیت، نظریه امکان، روش خیمینز.

## ۱. مقدمه

افزایش نگرانی‌های زیست‌محیطی و الزام سازمان‌ها به رعایت اصول توسعه پایدار، منجر به ظهور مفاهیمی نظیر زنجیره تأمین سبز و معکوس شده است. زنجیره تأمین معکوس به فرآیند بازگردانی محصولات معیوب یا مستعمل از مشتری به تولیدکننده به منظور بازیافت، بازتولید یا دفع بهینه اشاره دارد. در محیط‌های واقعی، بسیاری از پارامترهای زنجیره تأمین مانند هزینه‌ها و ظرفیت‌ها دقیق نیستند؛ از این رو استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی برای مدل‌سازی ابهام منطقی است. در این تحقیق با هدف کاهش هزینه‌ها و اثرات زیست‌محیطی، مدلی فازی برای زنجیره تأمین معکوس ارائه و با روش‌های ریاضی حل شده است.

## ۲. پیشینه پژوهش

در سال‌های اخیر، طراحی و بهینه‌سازی شبکه‌های زنجیره تأمین حلقه‌بسته و شبکه‌های لجستیک معکوس با رویکردهای فازی و محوریت پایداری، به یکی از مهم‌ترین زمینه‌های پژوهشی در حوزه مدیریت زنجیره تأمین و مهندسی صنایع تبدیل شده است. این حوزه از دو جهت اهمیت دارد: اول، ضرورت پاسخ به چالش‌های زیست‌محیطی، اقتصادی و اجتماعی ناشی از بازگردانی، بازیافت و بازتولید محصولات؛ دوم، وجود عدم قطعیت و ابهام در بسیاری از پارامترهای تصمیم‌گیری (مانند میزان برگشت محصولات، کیفیت بازگشتی، هزینه‌ها و ...) که استفاده از روش‌های کلاسیک قطعی را با محدودیت مواجه می‌سازد. پژوهشگران مختلف با ترکیب منطق فازی، بهینه‌سازی چندهدفه و مدل‌های شبکه‌ای، تلاش کرده‌اند تا این شکاف‌ها را پر نمایند.

در سال‌های اخیر، طراحی و بهینه‌سازی شبکه‌های زنجیره تأمین حلقه‌بسته و لجستیک معکوس با رویکرد پایداری، مورد توجه گسترده‌ای در حوزه مدیریت زنجیره تأمین قرار گرفته است. این مدل‌ها عموماً چندهدفه و چندمرحله‌ای بوده و برای مواجهه با عدم قطعیت داده‌ها از منطق فازی و روش‌های بهینه‌سازی پیشرفته استفاده می‌کنند.

<sup>۱</sup> . ماریا طوفان، محقق پسا دکترا، گروه ریاضی کاربردی، بابلسر

یکی از پژوهش‌های شاخص در این زمینه، مطالعه «ژانگ و همکاران (۲۰۱۹)» است که مدل ریاضی مختلطی را برای طراحی شبکه زنجیره تأمین حلقه‌بسته ارائه کردند. در این مدل، ابعاد اقتصادی، زیست‌محیطی و اجتماعی به طور هم‌زمان در نظر گرفته شد و هدف‌هایی چون حداقل‌سازی هزینه کل شبکه، کاهش انتشار آلاینده‌ها و بهبود شرایط اجتماعی مدنظر قرار گرفت. در این تحقیق، عدم‌قطعیت پارامترها با استفاده از ترکیب منطق فازی و بهینه‌سازی مقاوم مدیریت شد. یافته‌ها نشان داد ساختار بهینه شبکه و مکان مراکز با تغییر سطح محافظه‌کاری تصمیم‌گیرنده تغییر می‌کند که اهمیت تحلیل حساسیت در شرایط نامطمئن را نشان می‌دهد. این پژوهش در زمره مدل‌های توسعه‌یافته بوده و رویکردی جامع اما غیرموردی دارد.

در پژوهشی دیگر، «گوویندان، پام و ابتاهی (۲۰۱۶)» به طراحی شبکه لجستیک معکوس پایدار پرداختند. مدل پیشنهادی آن‌ها چندهدفه و مبتنی بر منطق فازی بوده و سه هدف اصلی شامل حداقل‌سازی هزینه‌ها، کاهش اثرات زیست‌محیطی و ارتقای مسئولیت اجتماعی را دنبال می‌کرد. برای حل مدل از الگوریتم فراابتکاری بهینه‌سازی ازدحام ذرات استفاده شد. نتایج نشان داد روش پیشنهادی توانایی بالایی در ارائه جبهه پارتوی باکیفیت دارد. نقطه قوت این پژوهش، ساختار چندهدفه و جامع آن و نقطه ضعفش، استفاده از داده‌های فرضی و عدم اجرای مطالعه موردی واقعی است.

«هاشمی (۲۰۲۱)» نیز مدلی چندهدفه فازی برای طراحی شبکه لجستیک معکوس پسماندهای شهری ارائه داد. اهداف مدل شامل حداقل‌سازی هزینه‌های جمع‌آوری و ساخت تأسیسات، کاهش مصرف سوخت و انتشار آلاینده‌ها و افزایش پاسخ‌گویی به تقاضا بود. برای حل مدل از الگوریتم‌های ژنتیکی چندهدفه و کلونی زنبور عسل استفاده شد. نتایج نشان داد که روش دوم در یافتن پاسخ‌های بهینه‌تر کارا تر است. این پژوهش با داده‌های واقعی شهری انجام شده و از جمله مطالعات موردی کاربردی در این حوزه محسوب می‌شود.

در زمینه انتخاب تأمین‌کنندگان پایدار در زنجیره تأمین سبز، «تانا و همکاران (۲۰۲۱)» چارچوبی فازی برای ارزیابی و رتبه‌بندی تأمین‌کنندگان در بخش لجستیک معکوس ارائه کردند. در این مطالعه از روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره فازی برای وزن‌دهی و رتبه‌بندی استفاده شد. یافته‌ها نشان داد استفاده از روش ترکیبی فازی موجب دقت و پایداری بیشتر نتایج تصمیم‌گیری می‌شود. نقطه قوت این مطالعه، کاربرد مستقیم آن در ارزیابی تأمین‌کنندگان واقعی و نقطه ضعفش، تمرکز صرف بر بخش تصمیم‌گیری و نه طراحی شبکه است.

از دیگر پژوهش‌های تکمیلی در این حوزه می‌توان به «درباری و همکاران» اشاره کرد که مدلی فازی چندهدفه برای پیکربندی شبکه لجستیک معکوس با تأکید بر ظرفیت مراکز بازتوزیع و بازیافت ارائه دادند. همچنین «نیک‌نژاد و پیتروویچ (۲۰۱۱)» با ترکیب الگوریتم ژنتیک و منطق فازی، چارچوبی برای بهینه‌سازی شبکه لجستیک معکوس با مسیرهای متعدد بازیابی پیشنهاد کردند که در آن کیفیت اقلام برگشتی بر انتخاب مسیر بازیافت تأثیرگذار بود. مطالعه دیگری نیز توسط «وانگ و لیاو (۲۰۲۳)» در صنعت مواد غذایی انجام شد که با استفاده از روش‌های تصمیم‌گیری فازی و برنامه‌ریزی هدف چندبخشی، ارائه‌دهندگان خدمات لجستیک معکوس را از منظر شاخص‌های پایداری ارزیابی نمود.

بررسی مجموعه این پژوهش‌ها نشان می‌دهد که اکثر مدل‌های ارائه‌شده از نوع چندهدفه فازی و چندمرحله‌ای هستند که ابعاد اقتصادی، زیست‌محیطی و اجتماعی را به‌طور هم‌زمان در بر می‌گیرند. نقاط قوت عمده این مطالعات، جامعیت مدل، توانایی در مدیریت عدم‌قطعیت‌ها و به‌کارگیری روش‌های فراابتکاری برای حل مسائل پیچیده است. در مقابل، نقاط ضعف مشترک آن‌ها عبارت‌اند از: استفاده محدود از داده‌های واقعی، فرض ایستایی پارامترها در طول زمان، و پیچیدگی بالای محاسبات در مسائل بزرگ‌مقیاس.

در مجموع، مرور پژوهش‌های پیشین نشان می‌دهد خلأ قابل توجهی در زمینه توسعه مدل‌های قطعی چندمرحله‌ای مبتنی بر داده‌های واقعی وجود دارد که بتوانند علاوه بر پایداری اقتصادی و زیست‌محیطی، پویایی و قابلیت‌اجرای عملی در محیط‌های

واقعی را نیز لحاظ نمایند. توسعه چنین مدلی می‌تواند گام مؤثری در تکمیل ادبیات علمی زنجیره تأمین پایدار و لجستیک معکوس باشد.

### نقاط اشتراک و شکاف‌های موجود

با بررسی مجموعه مقالات فوق می‌توان به چند نکته کلیدی دست یافت:

- تمامی این پژوهش‌ها تلاش دارند بین سه بعد پایداری — یعنی اقتصادی، زیست‌محیطی و اجتماعی — تعادلی برقرار کنند.
- اکثر مطالعات از روش فازی به‌عنوان ابزار مقابله با عدم قطعیت‌ها بهره برده‌اند (مثلاً پارامترهای برگشتی، کیفیت، تقاضا، نرخ بازتولید)؛
- بسیاری از مدل‌ها چندهدفه هستند (مثلاً حداقل هزینه، حداقل انتشار، حداکثر مسئولیت اجتماعی)؛
- فضای تصمیم‌گیری غالباً در قالب شبکه‌های چندمرحله‌ای (مراکز اولیه، توزیع، جمع‌آوری، بازتولید) یا طراحی تأسیسات قرار دارد؛
- با این حال، برخی شکاف‌ها نیز دیده می‌شوند:
  - اثربخشی روش‌های فازی در شرایط دانستن دقیق داده‌ها نسبت به شرایط بسیار مبهم، هنوز به‌طور کامل تحلیل نشده است؛
  - بسیاری از مدل‌ها با داده‌های فرضی یا مراحل آزمایشی ارائه شده‌اند و کمبود مطالعات موردی واقعی در صنایع مختلف دیده می‌شود؛
  - تعامل بین تأثیرات اجتماعی و زیست‌محیطی در شبکه‌های لجستیک معکوس، مخصوصاً در کشورهای در حال توسعه، کمتر مورد پژوهش قرار گرفته است؛
  - بررسی حساسیت و پایداری مدل‌ها در شرایط بحران (مثلاً پاندمی، تغییرات شدید بازار) هنوز به‌طور فراگیر انجام نشده است.

در مجموع، می‌توان گفت که فضای پژوهش طراحی شبکه‌های لجستیک معکوس و زنجیره تأمین حلقه‌بسته با رویکرد فازی و پایداری همچنان یکی از حوزه‌های پرتحرک و رو به رشد است. رویکردهای فازی به دلیل توانایی‌شان در مدل‌سازی عدم قطعیت‌های زبان‌شناختی و کمی، ابزار مناسبی برای این حوزه محسوب می‌شوند. اگرچه پیشرفت قابل توجهی حاصل شده، اما نیاز به مطالعات موردی گسترده‌تر، توسعه الگوریتم‌های کارا برای مقیاس بزرگ، و توجه بیشتر به ابعاد اجتماعی-فراملی (مثل عدالت توزیع، ایجاد اشتغال، تأثیر بر جامعه محلی) احساس می‌شود. از این رو پژوهش شما می‌تواند با تمرکز بر یکی از این شکاف‌ها، مانند ایجاد الگوریتمی ویژه برای محیط‌های با داده‌های بسیار محدود یا شرایط بحران در کشور ایران، سهم قابل توجهی در این حوزه داشته باشد.

### ۳. بیان مساله

مدل پیشنهادی شامل دو تابع هدف است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

تابع هدف اول: کمینه سازی هزینه های کل

$$\min Z_1 = A + B + C + D - E$$

تابع هدف دوم: کمینه سازی انتشار  $CO_2$

$$\min Z_2 = \sum_i \sum_j \sum_t z_{jt}^i \cdot L_j^i + \sum_m \sum_o \sum_j \sum_t m_{jmt}^o \cdot \varepsilon_j^o$$

که در آن  $A, B, C, D$  به ترتیب هزینه ثابت احداث، خرید تجهیزات، تولید و حمل و نقل هستند و  $E$  درآمد حاصل از فروش مواد بازیافتی است.

این مقاله مشتمل بر ۱۴ قید کارکردی است که به محدودیت های سیستم دلالت دارد. به منظور اختصار در ارائه مدل در اینجا صرفاً به نوع قیود اشاره می شود.

قید اول: تضمین میکند هر دوره زمانی، خواسته مشتری برای هر نوعی از محصول برآورده شود.

قید دوم: تولیدات کارخانه کمتر از ظرفیت آن است.

قید سوم: تعادل بین ورودی و خروجی مراکز تولید.

قید چهارم: تعادل میان مرکز توزیع

قید پنجم: تعادل کالاهای مرجوعی با تعداد کل کالاها

قید ششم: برابری میان ورودی و خروجی مراکز جمع آوری

قید هفتم: تقسیم کالاهایی معیوب به کالاهای ناقص و ناقص قابل بازیافت

قید هشتم: تعادل بین ورودی و خروجی مراکز بهبود

قید نهم: تضمین تعمیر محصولات با یک نوع تکنولوژی

قید دهم: تعادل بین محصولات موجود در مراکز توزیع با ظرفیت مراکز توزیع

قید یازدهم: تعادل بین زمان مورد نیاز برای بهبود محصول و زمان در دسترس

قید دوازدهم: مراکز توزیع از یک نوع سطح ظرفیت استفاده می شود

قید سیزدهم: تضمین ارسال نشدن محصول به مراکز جمع آوری که ساخته نشده

قید چهاردهم: تضمین ارسال نشدن محصول برای بهبود به مراکز ساخته نشده و خریداری نشدن تکنولوژی برای آن مراکز

مدل ارائه شده با ماهیت عدم قطعیت در نظر گرفته شده است، و از اینرو برای ساختن یک فرایند حل لازم است از ابزارهای متداول قطعی سازی استفاده شود. با توجه به فازی بودن نوع پارامترهای مدل، ابتدا از رویکرد دومرحله ای خیمنز برای غیرفازی استفاده شد که ابتدا مقادیر پارامترهای فازی را محاسبه کرده و سپس با استفاده از روش  $\varepsilon$ -constrain مجموعه ای از جواب های پارتو به دست می آید. کلیه فرایندهای حل در محیط لینگو پیاده سازی می شود و نتایج عددی گزارش می شود.

#### ۴. مساله مورد مطالعه

برای ارزیابی مدل و تشریح فرایند حل، یک مطالعه موردی شامل سه مرکز توزیع، دو مرکز جمع‌آوری و دو مرکز بهبود انجام شد. با توجه به مدل پیشنهادی که ساختاری ترکیبی شامل پارامترهای دقیق و فازی نمایان شده است، در ابتدا مدل قطعی مرتبط ساخته شده و سپس در ادامه با رویکرد پیشنهادی، مساله حل می‌شود. شایان ذکر است مدل با استفاده از نرم‌افزار لینگو حل شد و نتایج عددی نشان داد که با افزایش درجه فازی بودن پارامترها، هزینه کل شبکه از ۸۴۵۰ به ۸۷۳۰ واحد افزایش یافت، اما میزان انحراف از قیود ظرفیت و تقاضا کاهش پیدا کرد. همچنین سطح انتشار گاز CO<sub>2</sub> در حالت فازی حدود ۵٪ کمتر از حالت قطعی بود که نشان‌دهنده تأثیر مثبت لحاظ نمودن عدم قطعیت است

#### ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدلی فازی برای زنجیره تأمین معکوس با در نظر گرفتن معیارهای اقتصادی و زیست‌محیطی ارائه شد. نتایج نشان داد که استفاده از منطق فازی در مدل‌سازی زنجیره تأمین موجب افزایش دقت تصمیم‌گیری و کاهش ریسک ناشی از تغییرات داده‌ها می‌شود. در آینده می‌توان از الگوریتم‌های فراابتکاری برای حل مدل‌های بزرگ‌تر و چنددوره‌ای بهره‌گرفت تا کارایی محاسباتی افزایش یابد.

#### منابع

- Xin Zhang, Gang Zhao, Yingxiu Qi, Botang Li, (2019). A Robust Fuzzy Optimization Model for Closed-Loop Supply Chain Networks Considering Sustainability, Sustainability, 2019, 11, 5726.
- Tavana, M., Shaabani, A., Santos-Arteaga, F.J. *et al.* (2021). An integrated fuzzy sustainable supplier evaluation and selection framework for green supply chains in reverse logistics, Environ Sci Pollut Res, 28, 53953–53982.
- Kannan Govindan, Parichehr Paam, Amir-Reza Abtahi, (2016). A fuzzy multi-objective optimization model for sustainable reverse logistics network design, Ecological Indicators, 67, 753-768.
- S.E. Hashemi (2021), A fuzzy multi-objective optimization model for a sustainable reverse logistics network design of municipal waste-collecting considering the reduction of emissions, Journal of Cleaner Production, 318, 128577.

## سیستم های چند سطحی فازی در هوش مصنوعی و ریاضیات

داوود درویشی سلوکلائی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشگاه پیام نور ساری  
[d-darvishi@pnu.ac.ir](mailto:d-darvishi@pnu.ac.ir)  
سیده سمیه موسوی اوریمی فارغ التحصیل کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات  
[ss.mousaviourimi@gmail.com](mailto:ss.mousaviourimi@gmail.com)

### چکیده:

سیستم های فازی در هوش مصنوعی برای مدل سازی و استدلال تقریبی به کار می رود. ساختار و اصول سیستم های فازی چند سطحی در بسیاری کاربرد های پیچیده مانند کنترل هوشمند، سیستم های عصبی-فازی مورد بررسی قرار گرفته است. سیستم های هوش مصنوعی در محیط های پیچیده نیاز به استدلال تقریبی افزایش داده است. و مبانی فازی یکی از ابزار های موثر در مدلسازی عدم قطعیت و دانش انسانی است. در این مقاله قصد داریم مفاهیم، ساختار و کاربرد های سیستم های فازی چند سطحی در هوش مصنوعی مورد بررسی قرار گیرد  
کلمات کلیدی: کنترل فازی، کنترل سطحی، هوش مصنوعی

### ۱. مقدمه:

برنامه ریزی چند سطحی بر اساس برنامه ریزی ریاضی فازی، توسعه میابد. در این روش هدف ها به صورت دنباله ای از سلسله مراتب به کار می برد و در هر سطح تصمیم گیری ها حساب می کند. در این فصل روش شیبه و همکاران بیان می شود که هدف اصلی این است با استفاده از روش برنامه ریزی ریاضی فازی جواب بهینه برای مسائل برنامه ریزی خطی غیر خطی چند سطحی بدست می آید. برنامه ریزی ریاضی فازی کاربردهای

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

گوناگون رایج توسط وال و همکارانش دارد. سه روش برش تکنیکی متفاوت برای محافظ  $BR_3$  راکتور هسته ای بلژیک در چهار چوب بهترین نمونه‌به طور کاربردی پیاده سازی کردند. اسکاوا و همکارانش مرکز مقیاس بزرگ LPPS چهارچوب گوشه ای از ساختمان برنامه ریزی چندسطحی براساس برنامه ریزی ریاضی فازی، توسعه میابد. در این روش هدف ها به صورت دنباله ای از سلسله مراتب به کار می برد و در هر سطح تصمیم گیری ها حساب می کند. در این فصل روش شیبه و همکاران بیان می شود که هدف اصلی این است با استفاده از روش برنامه ریزی ریاضی فازی جواب بهینه برای مسائل برنامه ریزی خطی غیر خطی چند سطحی بدست می آید. برنامه ریزی ریاضی فازی کاربردها ی گوناگون رایج توسط وال و همکارانش دارد. سه روش برش تکنیکی متفاوت برای محافظ  $BR_3$  راکتور هسته ای بلژیک در چهار چوب بهترین نمونه‌به طور کاربردی پیاده سازی کردند. اسکاوا و همکارانش مرکز مقیاس بزرگ LPPS چهارچوب گوشه ای از ساختمان است آن ها تصمیم فازی محدب، برای ترکیب فازی، برای هدف ها و قیدهای فازی محدودیت اتخاذ می کند. اسکاوا همچنین یک روش رضایت بخش فازی برای حل مسائل کنترل بهینه خطی چند هدفی پیشنهاد کرد. آن ها تصمیم های فازی برای ترکیب هدف های مسائل برنامه ریزی خطی به کار می برند. و جواب قابل قبول از روش سیمپلکس بدست می آورد. در روش برنامه ریزی فازی ابتدا از سطح دوم ( $p=2$ ) شروع می کنیم و یک جواب قابل قبول بدست می آوریم به طور متوالی در سطح پائین تر یعنی ( $p=3$ ) جواب قابل بدست می آوریم و این مراحل را ادامه می دهیم. در  $p=3$  کران پائین ( $f_p^L$  و  $p=2,3$ ) را صفر فرض می کنیم و برای کران بالا. ( $f_p^u$ ) جواب قابل قبول بدست می آوریم. سپس تابع مشخصه خطی را نشان می دهیم.

$$\mu_{fp} \left[ f_p(\bar{x}) \right] = \frac{f_p(\bar{x}) - f_p^L}{f_p^u - f_p^L} \geq \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_p^L \leq f_p(\bar{x}) \leq f_p^u \leq f_p^u \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$f_p(\bar{x}) \geq f_p'' \cdot \lambda$  بنابراین  $\lambda = 0$  و  $f_p(\bar{x}) \geq 0$  و  $\lambda = 1$  و  $f_p(\bar{x}) = F_p''$  از آن جایی که  $f_p''$  کران بالا می باشد. بنابراین مقدار هدف در  $P=3$  از  $P=2$  تغییر نخواهد کرد. جواب قابل قبولی بدست می آید که تغییر نخواهد کرد. انتظار نداشتیم مقدار مینیم سطح فرایند قابل قبول  $\lambda$  در  $P=3$  بیشتر از  $P=2$  است. از این رو  $\lambda=1$  سطح های دیگر در سیستم روی جواب معادله تاثیر نمی گذارد. در این مقاله ما کاربرد روش FMP برای حل مسائل برنامه ریزی چند سطحی که تابع هدف از نوع ماکزیمم و مینیمم می پردازیم

### ۱- مسائل برنامه ریزی فازی برای حل مسائل برنامه ریزی چند سطحی:

ترتیب کلی از مسائل ماکزیمم -P سطحی در زیر نشان داده شده است.

$$\max_{\bar{x}_1} f_1(\bar{x}) = \bar{C}_{11} \bar{x}_1 + \bar{C}_{12} \bar{x}_2 + \dots + \bar{C}_{1P} \bar{x}_P$$

$$\max_{\bar{x}_2} f_2(\bar{x}) = \bar{C}_{21} \bar{x}_1 + \bar{C}_{22} \bar{x}_2 + \dots + \bar{C}_{2P} \bar{x}_P$$

$$\max_{\bar{x}_P} f_P(\bar{x}) = \bar{C}_{P1} \bar{x}_1 + \bar{C}_{P2} \bar{x}_2 + \dots + \bar{C}_{PP} \bar{x}_P$$

$$S. t.$$

$$\bar{A}_{i1} \bar{x}_1 + \bar{A}_{i2} \bar{x}_2 + \dots + \bar{A}_{iP} \bar{x}_P (\leq, \geq, =) \bar{b}_i, i = 1, \dots, m \quad \bar{x}_1 \geq 0, \bar{x}_2 \geq 0 \dots \bar{x}_P \geq 0$$

$$\bar{X}_1 = \{x_1^1, \dots, x_1^m\}^T$$

$$\bar{X}_2 = \{x_2^1, \dots, x_2^{n_2}\}^T$$

$$\bar{X}_P = \{x_P^1, \dots, x_P^{n_P}\}^T$$

$$\bar{A}_{i1}, i = 1, \dots, m \text{ بردار های } m \text{ سطری در بعد } (1 \times n_1) \quad \bar{A}_{i2}, i = 1, \dots, m \text{ بردار های } m \text{ سطری در بعد } (1 \times n_2)$$

### ۲. کاربرد ها در هوش مصنوعی

سیستم های فازی چند سطحی کاربرد گسترده ای در حوزه های مختلف هوش مصنوعی دارد

کنترل هوشمند: کنترل تطبیقی برای ربات و فرایند صنعتی

سیستم های خبره: تصمیم گیریهای پزشکی با استفاده از مدل های فازی چندسطحی در تشخیص بیماری

مدیریت ریسک و مالی: تحلیل داده های نامطمئن در پیش بینی و ارزیابی ریسک

### ۳. نتیجه گیری:

در این الگوریتم پیشنهادی کران های تابع هدف، جوابهای قابل قبول برای جواب بهین انتخاب می کند. جواب های بهتر می سنجد. در این فرایند وقتی یکی از کران ها صفر می شود کران صفر جواب قابل قبول را به سمت جواب بهین حرکت می دهد. این اشکال ناشی از سلسله مراتبی از سطح های معادله بعد از سطح دوم قابل شرح نیست. بنابراین در حقیقت معادله های چند سطحی ( $\rho \geq 3$ ) به دو سطحی کاهش می یابند تا زمانی که  $\lambda = 1$ . جوابهایی در  $P=3$  تغییر نخواهد کرد، مقدار  $\lambda$  را در سطح  $P=3$  بیشتر از سطح  $P=2$  است. تعداد سطح های آغازین را در معادله نشان می دهد. جواب قابل قبول در  $P=2$  تغییر نمی کند. (تنها  $\lambda$  بهتر می شود) بنابراین مسائل برنامه ریزی چند سطحی مسائل برنامه ریزی دو سطحی، کاهش می یابد. این فرایند پیشنهادی کران بالا و پائین (ماکزیمم یا مینیمم هدف) محاسبه می کند. به طور متوالی شامل سطح پائین می باشد. زمانی که سطح های بیشتر برای مقایسه سنجش تعداد سطوح مورد محاسبه قرار می گیرند مقدار  $\lambda$  کاهش می یابد. در آینده ترکیب این سیستم ها با فناوری نوین موجب شکل گیری نسل جدیدی از سامانه های سامانه های هوش مصنوعی تطبیق می گردد

### ۴. منابع

- [۱]. L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Informat. Control ۸ (۱۹۶۵) ۳۳۸-۳۵۳.
- [۲]. S. Sinha, Fuzzy programming approach to multi-level programming problems, Fuzzy Sets Syst. ۱۳۶ (۲۰۰۳) ۱۸۹-۲۰۲.
- [۳]. S. Sinha, Fuzzy mathematical programming applied to multi-level programming problems, Comput. Operat. Res. ۳۰ (۲۰۰۳) ۱۲۵۹-۱۲۶۸.

## اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری و رتبه بندی آنها

مهدی عینی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران  
 داوود درویشی سلوکلائی، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران،

### چکیده

در این مقاله، روشی بر اساس عرض هسته از کران پایین، عرض هسته از کران بالا و عرض هسته از مرکز ثقل برای رتبه بندی اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری ارائه می شود. در ادامه روش ارائه شده با یک مثال عددی توضیح داده می شود.

**کلمات کلیدی:** عدد خاکستری بازه ای سه پارامتری، رتبه بندی، هسته خاکستری.

### ۱. مقدمه

عدد خاکستری بازه ای سه پارامتری یکی از انواع اعداد خاکستری است که در مسائل تصمیم گیری خاکستری استفاده می شود. لئو (Luo, 2009) اولین کسی است که عدد خاکستری بازه ای سه پارامتری را معرفی کرد و روش تصمیم گیری چند شاخصه با اطلاعات خاکستری بازه ای سه پارامتری ارائه کرد [1]. در سال های اخیر، محققین در حوزه مسائل تصمیم گیری چند شاخصه با مقادیر خاکستری بازه ای سه پارامتری، مطالعاتی انجام داده اند [2]. در اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری علاوه بر مشخص بودن حد کران پایین و بالای آن، محتمل ترین مقدار آن یعنی، نقطه "مرکز ثقل" معلوم است. این از برجسته ترین ویژگی های عدد خاکستری بازه ای سه پارامتری است که نقص اطلاعات ضعیف عدد خاکستری درباره واحد تصمیم گیری را بر طرف می سازد. رتبه بندی و مقایسه این اعداد در نظریه سیستم های خاکستری همانند سایر اعداد در نظریه های دیگر روش های مخصوص به خود را دارد. لی و همکاران برای مقایسه اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری از هسته خاکستری این اعداد استفاده کرد [3]. فو روش مجموع مرکز ثقل با میانگین کران پایین و بالا را برای مقایسه اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری پیشنهاد کرد [4]. روش لی و همکاران اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری با هسته های یکسان را مساوی معرفی می کند. روش فو نمی تواند اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری با هسته های یکسان مقایسه کند. در این مقاله برای چالش موجود، روشی بر اساس عرض هسته از کران پایین، عرض هسته از کران بالا و عرض هسته از مرکز ثقل برای مقایسه اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری پیشنهاد می شود. در ادامه سازمان دهی مقاله به صورت زیر است:

در بخش ۲، روش پیشنهادی مقایسه اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری ارائه می شود. در بخش ۳، با یک مثال عددی روش پیشنهادی توضیح داده می شود. بخش ۴، به یافته های این مطالعه به همراه ایده هایی برای تحقیقات آینده می پردازد.

### ۳ روش پیشنهادی برای مقایسه اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

در این بخش، ابتدا مفاهیم عرض هسته از کران پایین، مرکز ثقل و کران بالا بیان می شود. سپس با استفاده از این مفاهیم، روش پیشنهادی برای مقایسه اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت ارائه می شود.

تعریف ۳. برای هر عدد خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت  $G(\otimes) \in [\underline{g}, \tilde{g}, \bar{g}]$  عرض هسته از کران پایین، عرض هسته از کران بالا و عرض هسته از مرکز ثقل به صورت زیر تعریف است:

$$\underline{K}_{wG} = (K_G - \underline{g}) = \frac{-3\underline{g} + 2\tilde{g} + \bar{g}}{4}, \quad \tilde{K}_{wG} = (\tilde{g} - K_G) = \frac{\underline{g} - 2\tilde{g} + \bar{g}}{4}, \quad \bar{K}_{wG} = (\bar{g} - K_G) = \frac{-\underline{g} - 2\tilde{g} + 3\bar{g}}{4}$$

عرض هسته از مرکز ثقل می تواند مثبت یا منفی شود، اگر  $K_G > \tilde{g}$  مثبت و یا  $K_G < \tilde{g}$  منفی است. به سادگی می توان بررسی کرد که  $\bar{g} = K_G + \bar{K}_{wG}$  و  $\tilde{g} = K_G - \tilde{K}_{wG}$ ،  $\underline{g} = K_G - \underline{K}_{wG}$

حال بر اساس تعریف فوق، روشی برای مقایسه اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری به صورت زیر پیشنهاد می شود:

فرض کنید  $G_1(\otimes) \in [\underline{g}_1, \tilde{g}_1, \bar{g}_1]$  و  $G_2(\otimes) \in [\underline{g}_2, \tilde{g}_2, \bar{g}_2]$  دو عدد خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت با هسته خاکستری به ترتیب  $K_{G_1}$  و  $K_{G_2}$  باشند. مقایسه دو عدد خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت  $G_1(\otimes)$  و  $G_2(\otimes)$  به صورت زیر پیشنهاد می شود:

تعریف ۴. مقایسه دو عدد خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت  $G_1(\otimes) \in [\underline{g}_1, \tilde{g}_1, \bar{g}_1]$  و  $G_2(\otimes) \in [\underline{g}_2, \tilde{g}_2, \bar{g}_2]$  با هسته های خاکستری به ترتیب  $K_{G_1}$  و  $K_{G_2}$  به صورت زیر تعریف می شود:

الف) اگر  $K_{G_1} > K_{G_2}$  آنگاه  $G_1(\otimes) >_G G_2(\otimes)$ .

ب) اگر  $K_{G_1} < K_{G_2}$  آنگاه  $G_1(\otimes) <_G G_2(\otimes)$ .

ج) اگر  $K_{G_1} = K_{G_2}$  آنگاه

ج-۱)  $G_1(\otimes) \leq_G G_2(\otimes)$  در این صورت  $\bar{K}_{wG_1} \geq \bar{K}_{wG_2}$  و  $\tilde{K}_{wG_1} \geq \tilde{K}_{wG_2}$ ،  $\underline{K}_{wG_1} \geq \underline{K}_{wG_2}$

ج-۲)  $G_1(\otimes) \geq_G G_2(\otimes)$  در این صورت  $\bar{K}_{wG_1} \leq \bar{K}_{wG_2}$  و  $\tilde{K}_{wG_1} \leq \tilde{K}_{wG_2}$ ،  $\underline{K}_{wG_1} \leq \underline{K}_{wG_2}$

ج-۳)  $G_1(\otimes) =_G G_2(\otimes)$  در این صورت  $\bar{K}_{wG_1} = \bar{K}_{wG_2}$  و  $\tilde{K}_{wG_1} = \tilde{K}_{wG_2}$ ،  $\underline{K}_{wG_1} = \underline{K}_{wG_2}$



بر اساس تعریف ۴، در حالت  $K_{G_1} \neq K_{G_2}$ ،  $G_1(\otimes)$  و  $G_2(\otimes)$  را می‌توان از (۱) یا (۲) مقایسه کرد. در حالت  $K_{G_1} = K_{G_2}$ ، ابتدا باید مقادیر عرض هسته نسبت به حد پایین، مرکز ثقل و حد بالا محاسبه شوند، سپس می‌توان  $G_1(\otimes)$  و  $G_2(\otimes)$  را طبق ج-۱، ج-۲ و ج-۳ مقایسه کرد.

#### ۴ مثال عددی

در این بخش روش پیشنهادی برای مقایسه و رتبه بندی اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت با یک مثال عددی توضیح داده می‌شود. چهارده خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت برای در نظر گرفته شده اند. این اعداد در جدول ۱ قابل مشاهده است.

جدول ۱. اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت همراه با ویژگی مشترک

ردیف	اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت		ویژگی مشترک اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت	
	عدد خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت	عدد خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت	هسته خاکستری یکسان	مرکز ثقل یکسان
۱	$G_1(\otimes) \in [60, 73, 80]$	$G_2(\otimes) \in [70, 91, 105]$	×	×
۲	$G_3(\otimes) \in [7, 11, 11]$	$G_4(\otimes) \in [8, 10, 12]$	✓	×
۳	$G_5(\otimes) \in [13, 28, 45]$	$G_6(\otimes) \in [15, 28, 38]$	×	✓
۴	$G_7(\otimes) \in [0, 3, 6]$	$G_8(\otimes) \in [3, 3, 3]$	✓	✓
۵	$G_9(\otimes) \in [3, 8, 23]$	$G_{10}(\otimes) \in [27, 48, 52]$	×	×
۶	$G_{11}(\otimes) \in [20, 35, 50]$	$G_{12}(\otimes) \in [21, 35, 49]$	✓	✓
۷	$G_{13}(\otimes) \in [4, 10, 16]$	$G_{14}(\otimes) \in [6, 8, 13]$	×	×

با توجه به جدول ۱، مشاهده می‌شود که  $G_1(\otimes)$  با  $G_2(\otimes)$ ، دارای اشتراک است.  $G_3(\otimes)$  و  $G_4(\otimes)$  دارای اشتراک هستند، هسته های خاکستری یکسان اما مرکز ثقل آنها متفاوت است.  $G_6(\otimes)$  زیر مجموعه  $G_5(\otimes)$  با مرکز ثقل آنها یکسان است.  $G_8(\otimes)$  یک عدد قطعی است که با مرکز ثقل و هسته خاکستری  $G_7(\otimes)$  یکسان است.  $G_{10}(\otimes)$  با  $G_9(\otimes)$  اشتراکی ندارد.  $G_{12}(\otimes)$  زیر مجموعه  $G_{11}(\otimes)$  که مرکز ثقل و هسته خاکستری آنها یکسان است.  $G_{14}(\otimes)$  زیر مجموعه  $G_{13}(\otimes)$  است.

حال می خواهیم این اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت را با روش های لی و همکاران، فو و روش پیشنهادی در این مقاله

را با هم مقایسه کنیم. جدول (۲) را مقایسه این اعداد را نشان می دهد. در این جدول ، ستون دوم داده های خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت قرار دارند.

در ردیف های ۷ و ۳ مقدار هسته خاکستری  $G_{13}(\otimes)$  و  $G_5(\otimes)$  به ترتیب بزرگتر از مقدار هسته خاکستری  $G_{14}(\otimes)$  و  $G_6(\otimes)$  است. مقایسه آنها در هر سه روش به صورت  $G_{13}(\otimes) >_G G_{14}(\otimes)$  و  $G_5(\otimes) >_G G_6(\otimes)$  است. در ردیف های ۵ و ۱۰ مقدار هسته خاکستری  $G_9(\otimes)$  و  $G_1(\otimes)$  به ترتیب کمتر از مقدار هسته خاکستری  $G_{10}(\otimes)$  و  $G_2(\otimes)$  است. بنابراین مقایسه آنها در هر سه روش به صورت  $G_9(\otimes) <_G G_{10}(\otimes)$  و  $G_1(\otimes) <_G G_2(\otimes)$  است. در ردیف های ۴ و ۲ مرکز ثقل و مقدار هسته خاکستری اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری مثبت  $G_{11}(\otimes)$  با  $G_{12}(\otimes)$ ،  $G_7(\otimes)$  با  $G_8(\otimes)$ ، و  $G_3(\otimes)$  با  $G_4(\otimes)$  یکسان است. روش فو نمی تواند این سه جفت عدد خاکستری را باهم مقایسه کند. روش لی و همکاران این سه جفت عدد را یکسان در نظر می گیرد، یعنی  $G_{11}(\otimes) =_G G_{12}(\otimes)$ ،  $G_7(\otimes) =_G G_8(\otimes)$  و  $G_3(\otimes) = G_4(\otimes)$ . روش پیشنهادی ما آنها را به صورت  $G_{11}(\otimes) \leq_G G_{12}(\otimes)$ ،  $G_7(\otimes) \leq_G G_8(\otimes)$  و  $G_3(\otimes) \geq_G G_4(\otimes)$  مقایسه می کند.

## ۵ نتیجه گیری

در این مقاله، روش جدیدی برای مقایسه و رتبه بندی اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری ارائه شد. مبنای روش پیشنهادی استفاده از مفاهیم عرض هسته از کران پایین، عرض هسته از کران بالا و عرض هسته از مرکز ثقل هست که قادر هست اعداد خاکستری بازه سه پارامتری مثبت را دقیق تر مقایسه کند. برای تحقیقات آینده می توان از روش پیشنهادی برای رتبه بندی اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری براساس مفاهیم احتمالی استفاده کرد.

## مراجع

- [1] Luo, D. (2009). Decision-making methods with three-parameter interval grey number. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 29(1), 124-130, 2009.
- [2] Pourmahmoud, J., Eini, M., Darvishi, D., & Mehrabian, S. (2025). A new approach in DEA with three-parameter interval grey numbers: investigating the effect of the drug-TPA on stroke patients. *Grey Systems: Theory and Application*, 15(3), 547-573.
- [3] Fu, S. (۲۰۱۶), "Three-parameter interval grey number multi-attribute decision making method based on information entropy", *Mathematical and Computational Applications*, Vol. ۲۱ No. ۲, p. ۱۷,
- [4] Li, Y., Zhu, S. and Guo, S.D. (۲۰۱۶), "Multi-attribute grey target decision method with three-parameter interval grey number", *Grey Systems: Theory and Application*, Vol. ۶ No. ۲, pp. ۲۷۰-۲۸۰,

## فاکتورهای نامطلوب و تحلیل پوششی داده های خاکستری

مهدی عینی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

داوود درویشی سلوکلائی، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران،

### چکیده

در این مقاله، برای محاسبه کارایی واحدهای تصمیم گیری در حضور هسته عدد خاکستری شاخص های نامطلوب خاکستری بازه ای سه پارامتری، بر اساس ترکیب اصل دسترس پذیری ضعیف، ارائه می شود. به همین منظور با یک مثال کاربردی در مورد سیستم سلامت روش پیشنهادی مورد بحث و بررسی قرار می گیرد.

**کلمات کلیدی:** ارزیابی، شاخص نامطلوب، تحلیل پوششی داده ها، عدد خاکستری بازه ای سه پارامتری.

### ۱. مقدمه

در مسائل دنیای واقعی DMUs وجود دارند که داده های آنها به صورت قطعی نیست، و به صورت خاکستری است. در واقع نظریه سیستم خاکستری برای اولین بار توسط دنگ مطرح شد [4]. با کمک نظریه سیستم خاکستری، می توان مسئله تصمیم گیری غیر قطعی، با اطلاعات ضعیف و یا اطلاعات جزئی و محدود را حل کرد [5]. داده های خاکستری، داده های نامشخصی هستند که مقدار دقیقی ندارند که مقدار ممکن خود را از یک بازه یا مجموعه ای از اعداد اتخاذ می کند [6]. عدد خاکستری بازه ای سه پارامتری یکی از انواع اعداد خاکستری است که در مسائل تصمیم گیری خاکستری استفاده می شود. لئو [7] اولین کسی است که عدد خاکستری بازه ای سه پارامتری را معرفی کرد. از برجسته ترین ویژگی های عدد خاکستری بازه ای سه پارامتری اینست که علاوه بر مشخص بودن حد کران پایین و بالای آن، محتمل ترین مقدار آن یعنی، نقطه "هسته عدد خاکستری" معلوم است. هنگام ارزیابی DMUs با داده های خاکستری بازه ای سه پارامتری، می توان ورودی ها و خروجی ها را از هسته عدد خاکستری این داده ها انتخاب کرد، در این صورت نتایج برای مدیران قابل اعتماد تر است. گاهی اوقات برای بعضی از خروجی های واحد تصمیم گیری وضعیتی به وجود می آید که به جای افزایش تولید خروجی ها باید تولید آنها را کاهش داد. بر این اساس ممکن است در فرآیند تولید، خروجی های نامطلوب نیز مانند آلودگی و ضایعات به وجود آید که برای بهبود کارایی می بایست کاهش داده شوند [8]. شفرد برای اولین بار نحوه برخورد با خروجی های مطلوب و نامطلوب با استفاده از اصل دسترس پذیری ضعیف را ارائه کرد [9]. در این مقاله، با استفاده از اصل دسترس پذیری ضعیف، مدلی برای محاسبه کارایی DMUs در حضور هسته عدد خاکستری فاکتورهای نامطلوب خاکستری بازه ای سه پارامتری پیشنهاد می شود.

سازماندهی این مقاله چنین است: روش محاسبه کارایی واحدها در حضور هسته عدد خاکستری فاکتورهای نامطلوب خاکستری بازه ای سه پارامتری، در بخش ۲ بیان می شود. در بخش ۳، به بررسی مثال عملی در ارتباط چهارده بیمارستان خصوصی در پرداخته می شود. در بخش ۴، نتیجه گیری ارائه می شود.

### 2- ارزیابی واحدها در حضور هسته عدد خاکستری شاخص های نامطلوب خاکستری بازه ای سه پارامتری

فرض کنید با مصرف هسته عدد خاکستری ورودی های واحدهای تصمیم گیری،  $\tilde{X}_i, i = 1, \dots, m$ ، تا از هسته عدد خاکستری خروجی ها مطلوب  $(\tilde{Y}_r^g, r = 1, \dots, s_2)$  و  $s_1$  تا از هسته عدد خاکستری خروجی ها نامطلوب  $(\tilde{Y}_r^b, r = 1, \dots, s_1)$  تولید شوند

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

. با این مفروضات مدل پیشنهادی ، تحت دسترس پذیری ضعیف هسته عدد خاکستری ورودی ها و هسته عدد خاکستری خروجی ها در حضور هسته عدد خاکستری فاکتور های نامطلوب را می توان به صورت زیر است:

$$\theta_o^* = \min \theta$$

s t. (3)

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) \tilde{x}_{ij} \leq \theta \tilde{x}_{io}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{y}_{rj}^b = \theta \tilde{y}_r^b, \quad r = 1, \dots, s_1,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{y}_{rj}^g \geq \tilde{y}_r^g, \quad r = 1, \dots, s_2,$$

$$\sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) = 1,$$

$$\lambda_j, \mu_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n.$$

#### ۴-مثال کاربردی .

داده های چهارده بیمارستان شامل دو ورودی و دو خروجی به صورت خاکستری بازه ای سه پارامتری هستند که در جدول ۱ لیست شده است.

جدول ۱. داده های ورودی و خروجی ۱۴ بیمارستان خصوصی

کارایی	خروجی نامطلوب	خروجی مطلوب	ورودی مطلوب دوم	ورودی مطلوب اول	
1.00	تعداد بیماران فوت شده در اورژانس در هر ۶ ماه	تعداد بیماران بهبود یافته در هر ماه	تعداد پرستاران و دکترهای روزانه اورژانس	تعداد تخت های مورد استفاده در اورژانس در هر ماه	
1.00	[26,27,29]	[102,112,125]	[23,28,33]	[ 37,40,45]	1
1.00	[14,16,19]	[115,124,130]	[18,22,24]	[27,30,34]	2
0.97	[7,10,12]	[210,220,225]	[41,42,47]	[31,36,39]	3
1.00	[3,7,9]	[125, ۱۳۷ ,142]	[32,34,38]	[22,28,33]	4

1.00	[7,8,9]	[160,170,178]	[31,31,35]	[20,25,26]	5
0.94	[10,13,17]	[245,256,265]	[30,36,38]	[37,42,46]	6
1.00	[13,17,22]	[235,240,255]	[20,30,35]	[41,41,43]	7
0.97	[11,15,16]	[250,255,265]	[22,29,32]	[33,37,38]	8
1.00	[10,14,19]	[252,260,264]	[34,35,38]	[42,47,51]	9
0.93	[15,19,22]	[295,305,312]	[37,42,36]	[47,52,55]	10
1.00	[16,22,25]	[285,292,300]	[37,42,54]	[50,53,58]	11
1.00	[15,18,24]	[224,232,245]	[23,27,29]	[32,39,44]	12
1.00	[17,21,26]	[260,275,280]	[33,36,40]	[40,49,56]	13
efficiency	[24,26,32]	[290,302,305]	[42,47,53]	[55,58,62]	14

ستون ششم جدول مقادیر کارایی ۱۴ واحد تصمیم‌گیری را نشان می‌دهد. بر اساس نتایج:

- ده واحد (DMU) های ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۴ دارای کارایی کامل (۱،۰۰) هستند؛
- چهار واحد ۴، ۷، ۹، ۱۱ ناکارا هستند و مقادیر کارایی آن‌ها به ترتیب ۰،۹۷، ۰،۹۴، ۰،۹۷ و ۰،۹۳ است.

### ۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، بر اساس اصل دسترس‌پذیری ضعیف، مدل برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه کارایی واحدهای تحت ارزیابی در حضور هسته عدد خاکستری ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب و نامطلوب، ارائه شد. مدل پیشنهادی روی داده‌های چهارده بیمارستان خصوصی مورد بحث و بررسی قرار گرفت که با استفاده از آن واحدهای کارا و ناکارا مشخص شدند. بر اساس نتایج حاصله از مدل، واحد کارا که باید سطح خروجی نامطلوب خود را کاهش دهند تا همچنان کارا بماند، معرفی شد. برای واحدهای ناکارا، با استفاده از واحدهای مرجع، استراتژی‌هایی لازم مشخص شد که بتوانند شرایط موجود خود را بهبود دهند.

### References

[1] Charnes, A., Cooper, W.W., and Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2: 429-444 .

[2] Ilyas, H.M.A., Safa, M., Bailey, A., Rauf, S. and Khan, A. (2020), “Energy efficiency outlook of New Zealand dairy farming systems: an application of data envelopment analysis (DEA) approach”, *Energies*, Vol. 13 No. 1, p. 251.

[3] Wang, C.N., Imperial, K.N.C., Huang, C.C. and Dang, T.T. (2022), “Output targeting and runway utilization of major international airports: a comparative analysis using DEA”, *Mathematics*, Vol. 10 No. 4, p. 551,

[۴] Deng, J.L, “The control problems of grey systems”, *Systems and Control Letters*, 1(5), 288-294, 1982.

[۵] Li, Q., and Lin, Y. A briefing to grey systems theory. *Journal of Systems Science and Information*, 2(2), 178-192, 2014.

[۶] Liu, S., and Lin, Y. *Grey information: theory and practical applications*: Springer Science & Business Media, 2006.

[۷] Luo, D. (2009). Decision-making methods with three-parameter interval grey number. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 29(1), 124-130, 2009.

[۸] Allen, K.. DEA in the ecological context—an overview. *Data envelopment analysis in the service sector*, 203-235, 1999.

[۹] Shephard, R. W. *Theory of cost and production functions*. Princeton University Press, 2015.

[۱۰] Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30 (9), 1078–1092.

## رتبه بندی بندی مجتمع پالایشگاهی با تحلیل پوششی داده ها

مهدی عینی<sup>۱</sup>،

<sup>۱</sup>عضوهیئت علمی دانشگاه پیام نور تهران، گروه ریاضی تهران، ایران

### چکیده

در این مقاله، ما برای مقایسه عملکرد مجتمع پالایشگاهی از روش رتبه بندی با مجموعه وزن مشترک در تحلیل پوششی داده ها استفاده می شود. این روش برای بالا بردن کارایی های گروهی ارائه شده است.

**کلمات کلیدی:** کارایی، وزن مشترک، رتبه بندی.

### 1. مقدمه

مجموعه وزن های مشترک (CSW) به یک مجموعه واحد از وزن های ورودی و خروجی اشاره دارد که برای ارزیابی کارایی تمام DMU ها به طور همزمان استفاده می شود. برخلاف رویکرد استاندارد DEA که وزن ها برای هر DMU جداگانه بهینه سازی می شوند، CSW با هدف ایجاد یک چارچوب ارزیابی عادلانه تر و یکپارچه معرفی شده است. این مفهوم برای حل مشکلات زیر در DEA کلاسیک مفید است:

**(الف) عدم تمایز بین DMU های کارا:** در DEA استاندارد، چندین DMU ممکن است کارایی 1 (کارا) داشته باشند، اما بدون CSW، رتبه بندی آن ها دشوار است.

**(ب) وزن های نامناسب یا صفر:** برخی DMU ها ممکن است وزن های صفر به متغیرهای مهم اختصاص دهند تا کارایی شان افزایش یابد، که این امر با واقعیت های مدیریتی ناسازگار است.

**(ج) نیاز به ارزیابی کلی CSW:** اجازه می دهد تا کارایی همه DMU ها تحت یک سیستم وزنی مشترک محاسبه شود، که این امر برای تصمیم گیری های گروهی یا مقایسه های بین سازمانی مفید است. [1,2,3, 4,5] در این مقاله، به معرفی روش جهانشاهلو پرداخته و سپس با استفاده از این روش عملکرد مجتمع پالایشگاهی را بررسی و مقایسه می شود.

### 2. روش پیشنهادی

در این روش با استفاده از مدل (1)، مجموعه وزن مشترک را تعیین می کشود. هدف این مدل، یافتن مجموعه وزنی است که با به کار بردن آن بالاترین کارایی گروهی به دست آید. مدل زیر یک مسئله برنامه ریزی غیر خطی است اما می توان آن را با نرم افزار های نظیر GAMS آن را به راحتی حل کرد که در آن  $\epsilon$  یک ثابت مثبت غیر ارشمیدسی است.



$$\begin{aligned}
 & \max z \\
 & s.t. \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u_o - z \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \geq 0 \quad j=1\dots n \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u_o - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1\dots n \\
 & z \geq 0 \\
 & u_r \geq \varepsilon \quad r = 1\dots s \\
 & v_i \geq 0 \quad i = 1\dots m \\
 & u_o \text{ free}
 \end{aligned} \tag{1}$$

تعریف. اگر در مدل (1)،  $\frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj} + u_o^*}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij}} = 1$ ، آنگاه  $DMU_j$  کارا می‌گوییم.

$$A = \{DMU_j \text{ بر اساس تعریف فوق کاراست} : DMU_j\}$$

برای رتبه بندی واحد ها، قیود مربوطه واحد های کارای مجموعه A از ناحیه شدنی مدل (1) حذف می‌گردد. مدل (1) بر روی باقی مانده قید ها اجرا می‌گردد و در آن سعی می‌شود کارایی واحد های مجموعه A ماکزیمم گردد. حال با در نظر گرفتن مدل غیر خطی زیر مقدار کارایی واحد ها را به دست آورده و بر اساس مقدار کارایی ها واحد ها رتبه بندی می‌شود..

$$\begin{aligned}
 & \max z \\
 & s.t. \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u_o - z \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \geq 0 \quad j \in A \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u_o - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j \notin A \\
 & z \geq 0 \\
 & u_r \geq \varepsilon \quad r = 1\dots s \\
 & v_i \geq 0 \quad i = 1\dots m \\
 & u_o \text{ free}
 \end{aligned} \tag{2}$$

### 3. مثال عددی

مجتمع پالایشگاهی را با پارامترهای ورودی و خروجی در نظر بگیرید در این پالایشگاه، واحد بازیافت میعانات گازی طبیعی به منظور تولید گاز، برش اتان و هیدروکربن های سنگین تر در نظر گرفته شده اند برای طراحی این واحد دو حالت در نظر گرفته شده است:

شرایط تابستانی و شرایط زمستانی. در این واحد قسمتی از مایع سازی گاز، توسط توربوآکسپندر صورت می‌گیرد اما در شرایط گذار همچون آغاز به کار و متوقف کردن ویا تحت شرایط توقف عملیات توربوآکسپندر گاز پر فشار ورودی به واحد از شیر فشار شکن عبور می‌کند. سه حالت زیر را در نظر بگیرید:

- ✓ حالت 1: شرایط تابستان و توربوآکسپندر در عملیات
- ✓ حالت 2: شرایط زمستان و توربوآکسپندر در عملیات
- ✓ حالت 3: شرایط تابستان و در مدار نبودن توربوآکسپندر

در هر یک از سه حالت ذکر شده پارامترهای در نظر گرفته شده در جدول (1) بیان شده است. مقادیر ورودی و خروجی هر یک از پارامترها به ترتیب در جدول (2) ارائه شده است.

جدول (1)



# دوازدهمین همایش ملی ریاضی دانشگاه پیام نور

12<sup>th</sup>

National Mathematics Conference of

Payame Noor University  
Sari-Iran



۱۵ و ۱۶ آبان ماه ۱۴۰۴ مازندران - ساری

حالت 3	حالت 2	حالت 1	
20614.54	20616.02	20616.02	(I1)
1317.49	1317.90	1317.90	(I2)
797.04	857.77	857.77	(I3)
597.32	638.29	602.87	(I4)
422.63	436.27	423.26	(I5)
2866	3175	2856	(I6)
7420	4230	8151	(I7)
4026	5233	3504	(O1)
20611.96	20613.73	20607.13	(O2)
880.54	151.85	884.78	(O3)
766.40	880.54	827.96	(O4)

(I1): دبی مولی متان موجود در خوراک	پارا متر های ورودی
(I2): دبی مولی اتان موجود در خوراک	
(I3): دبی مولی هیدرو کربن های سنگین تر از پروپان موجود در خوراک	
(I4): دبی مولی مبرد سطح فشاری پایین	
(I5): دبی مولی مبرد سطح فشاری پایین	
(I6): بار حرارتی مورد نیاز در برج متان زا	
(I7): بار حرارتی مورد نیاز در برج متان زا	
(O1): دبی مولی متان موجود در گاز خروجی از برج متان زدا	پارا متر های خروجی
(O2): دبی مولی اتان موجود در گاز خروجی از برج متان زا	
(O3): دبی مولی هیدروکربن های سنگین تر از پروپان موجود در مایع خروجی برج متان زدا	
(O4): بار حرارتی منتقل شده از واحد رطوبت زدایی به گاز خروجی از واحد مورد بررسی	

جدول (2)

حال با استفاده از روش ارائه شده به رتبه بندی حالت هایی که در جدول (2) وجود دارد می پردازیم که در جدول (3) قابل مشاهده است.

جدول (3)

	حالت 1	حالت 2	حالت 3
کارایی	.741536	.850523	.772290
مجموعه وزن مشترک	.01	.01	.01

#### 4. نتیجه گیری

به منظور رتبه بندی برای بالاترین بردن کارایی های گروهی ، می توان رتبه بندی با مجموعه وزن مشترک در تحلیل پوششی داده ها را به کار گرفت. در این مقاله از روش ارائه شده برای رتبه بندی مجموعه ای از مجتمع پالایشگاهی استفاده شد.

#### 5. مراجع

- [1]Franklin Liu, F. H. and Peng, H. H., 2008, Ranking of units on the DEA frontier with common weight, Computers & Operations Research 35, 1624- 1637.
- [2]Makui, A. Alinezhad, R. Kiani Mavi, M. Zohrehbandian, 2008. A Goal programming Method for finding Common Weights in DEA With an Improved Discriminating Power for Efficiency, Journal of Industrial and system Engineering, Vol. 1, NO. 4, pp 293- 303.
- [3] Jahanshahloo, G. R., Memariani, A., Hosseinzadeh Lotfi, F., rezai, H. Z, 2005, A note on some of DEA models and finding efficiency and complete ranking using common Set of weights. Applied Mathematics and computation 166, 265- 281.
- [4] Contreras, I. (2020). A review of the literature on DEA models under common set of weights. *Journal of Modelling in Management*, 15(4), 1277-1300.
- [5] Ramezani-Tarkhorani, S., & Eini, M. (2022). A novel ranking approach with common weights: An implementation in the presence of interval data and flexible measures. *RAIRO-Operations Research*, 56(6), 3915-3940.
- [6] Peykani, P., Esmacili, F. S. S., Pishvae, M. S., Rostamy-Malkhalifeh, M., & Lotfi, F. H. (2024). Matrix-based network data envelopment analysis: A common set of weights approach. *Socio-economic planning sciences*, 95, 102044.

پیش بینی ترک تحصیل دانشجویان با استفاده از چارچوب ترکیبی گرافی مبتنی بر تعمیم پشته‌ای  
 سپیده صبوری، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد معماری کامپیوتر  
 Sepidesaboori46@gmail.com

چکیده:

پیش بینی ترک تحصیل دانشجویان از چالش‌های اساسی در نظام‌های آموزش عالی است، زیرا شناسایی زود هنگام دانشجویان در معرض خطر، زمینه‌ساز مداخلات آموزشی مؤثر و بهبود نرخ ماندگاری تحصیلی می‌شود. در این پژوهش، رویکردی ترکیبی برای پیش بینی ترک تحصیل دانشجویان ارائه شده است که بر پایه‌ی چارچوب گرافی مبتنی بر تعمیم پشته‌ای طراحی گردیده است. در مرحله نخست، داده‌های فردی، تحصیلی و اجتماعی-اقتصادی دانشجویان پردازش و مدل‌سازی شد. سپس مدل‌های یادگیری ماشین شامل Random Forest، XGBoost و TabNet به عنوان لایه پایه برای استخراج الگوهای ساختاری داده به کار رفتند. در ادامه، با بهره‌گیری از مدل‌های گرافی مانند GCN و GraphSAGE، وابستگی‌های پنهان میان دانشجویان در فرایند یادگیری لحاظ گردید. در گام نهایی، خروجی مدل‌های پایه از طریق مکانیزم تعمیم پشته‌ای ترکیب و مدل نهایی برای افزایش دقت و پایداری آموزش داده شد. نتایج نشان می‌دهد چارچوب پیشنهادی نسبت به مدل‌های مستقل، بهبود معناداری در معیارهای Accuracy، Recall و F1-score ایجاد کرده است. یافته‌ها حاکی از آن است که ترکیب یادگیری گرافی و مدل‌های سنتی جدولی می‌تواند ابزاری کارآمد برای پیش بینی و مدیریت افت تحصیلی در آموزش عالی باشد.

کلمات کلیدی: پیش بینی ترک تحصیل دانشجویان، یادگیری ماشین، شبکه‌های عصبی گرافی، تعمیم پشته‌ای، مدل‌های ترکیبی

۱. مقدمه:

ترک تحصیل دانشجویان از چالش‌های مهم آموزش عالی است که پیامدهای اقتصادی و اجتماعی گسترده‌ای به همراه دارد. شناسایی زود هنگام دانشجویان در معرض خطر می‌تواند به بهبود تصمیم‌گیری‌های مدیریتی و ارتقای کیفیت خدمات آموزشی منجر شود. با گسترش داده‌های آموزشی و پیشرفت یادگیری ماشین، استفاده از مدل‌های داده‌محور برای پیش بینی رفتار تحصیلی به حوزه‌ای فعال در پژوهش‌های آموزشی تبدیل شده است. مطالعات پیشین از الگوریتم‌هایی مانند درخت تصمیم، Random Forest و XGBoost برای تحلیل داده‌های تحصیلی بهره برده‌اند، اما اغلب روابط تعاملی میان دانشجویان را نادیده گرفته‌اند. در سال‌های اخیر، شبکه‌های عصبی گرافی مانند GCN و GraphSAGE توانسته‌اند ساختارهای پنهان میان داده‌ها را شناسایی و عملکرد پیش بینی را بهبود دهند. در این پژوهش، چارچوبی ترکیبی بر پایه‌ی تعمیم پشته‌ای پیشنهاد شده است که مدل‌های کلاسیک یادگیری ماشین و مدل‌های گرافی را در یک ساختار چندلایه تلفیق می‌کند. این رویکرد با بهره‌گیری هم‌زمان از ویژگی‌های فردی و روابط گرافی، دقت پیش بینی ترک تحصیل را به طور قابل توجهی افزایش داده است. نتایج نشان می‌دهد مدل پیشنهادی در شاخص‌های Accuracy، Recall و F1-score عملکرد برتری نسبت به مدل‌های مستقل دارد.

• متن اصلی :

### ۲/۱ - مفاهیم اولیه:

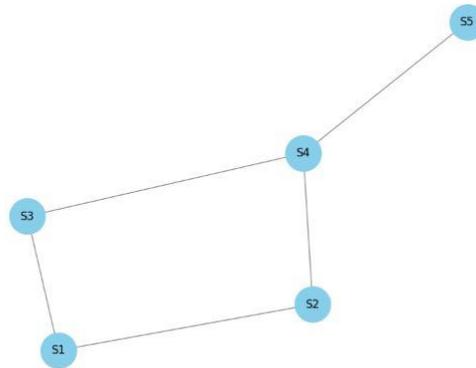
ترک تحصیل دانشجویان: توقف تحصیل دانشجو قبل از پایان برنامه تحصیلی که پیامدهای اقتصادی و اجتماعی دارد. یادگیری ماشین: شاخه‌ای از هوش مصنوعی که با استفاده از داده‌ها، الگوها را شناسایی و پیش‌بینی انجام می‌دهد؛ شامل الگوریتم‌هایی مانند Random Forest، XGBoost و TabNet شبکه‌های عصبی گرافی: شبکه‌هایی که از داده‌های گراف‌محور (گره‌ها و یال‌ها) یاد می‌گیرند، مانند GCN و GraphSAGE، برای مدل‌سازی روابط میان دانشجویان. تعمیم پشته‌ای: روش ترکیب چند مدل پایه با یک مدل متا برای بهبود دقت و کاهش خطای پیش‌بینی. داده‌های ترکیبی: استفاده همزمان از ویژگی‌های عددی/دسته‌ای و روابط گرافی برای تحلیل کامل‌تر داده‌ها و افزایش دقت پیش‌بینی.

### ۲/۲ - طرح مسئله:

ترک تحصیل دانشجویان باعث هدررفت منابع مالی و انسانی دانشگاه و کاهش کیفیت آموزش می‌شود. مطالعات گذشته عمدتاً بر داده‌های جدولی تمرکز داشتند و روابط میان دانشجویان را نادیده گرفتند، بنابراین نیاز به رویکردی ترکیبی که هم داده‌های ویژگی‌محور و هم روابط گرافی دانشجویان را مدنظر قرار دهد احساس شد. هدف اصلی پژوهش، شناسایی دانشجویان در معرض خطر ترک تحصیل است و هدف جانبی، افزایش دقت پیش‌بینی با استفاده از چارچوب Stacked Generalization می‌باشد.

جدول ۱. نمونه ویژگی‌های دانشجویان و کاربرد آن‌ها در مدل‌های پیش‌بینی ترک تحصیل

نوع ویژگی	نمونه ویژگی	کاربرد در مدل
عددی	سن، معدل، تعداد واحدها	مدل‌های جدولی (RF, XGB, TabNet)
دسته‌ای	جنسیت، وضعیت مالی، رشته تحصیلی	مدل‌های جدولی و one-hot encoding
گرافی	هم‌کلاسی بودن، پروژه‌های گروهی	مدل‌های گرافی (GCN, GraphSAGE)



شکل ۱. شبکه گرافی نمونه روابط دانشجویان بر اساس هم‌کلاسی و فعالیت‌های گروهی

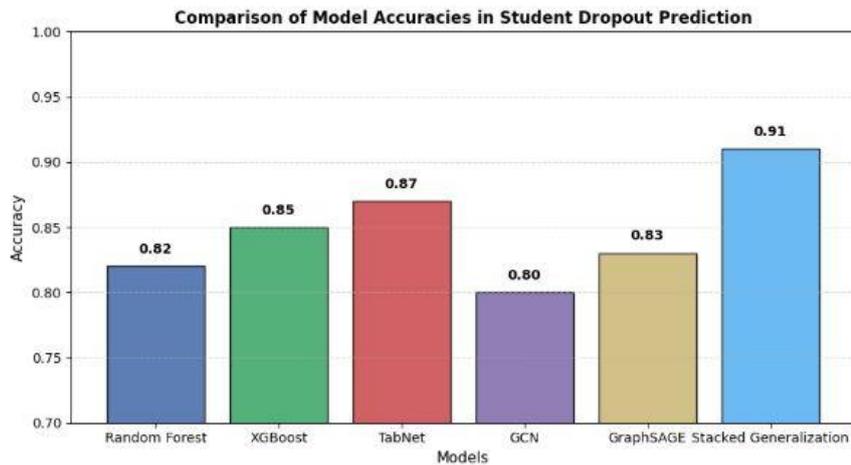
این شبکه گرافی نمونه روابط میان دانشجویان را نشان می‌دهد؛ هر گره نماینده یک دانشجو و هر یال نشان‌دهنده رابطه هم‌کلاسی یا همکاری در پروژه‌های گروهی است. این روابط به مدل‌های گرافی کمک می‌کنند تا وابستگی‌ها و تعاملات دانشجویان را در پیش‌بینی ترک تحصیل لحاظ کنند.

#### ۲/۳ - مرور مطالعات گذشته:

مطالعات متعددی در زمینه پیش‌بینی ترک تحصیل دانشجویان انجام شده است که بیشتر بر مدل‌های یادگیری ماشین سنتی مانند درخت تصمیم، Random Forest و XGBoost تمرکز داشته‌اند. برخی پژوهش‌های اخیر از شبکه‌های عصبی گرافی (GCN, GraphSAGE) برای تحلیل روابط میان دانشجویان استفاده کرده‌اند. با این حال، اغلب این مطالعات یا تنها داده‌های جدولی را مدنظر قرار داده‌اند و یا روابط گرافی را به طور کامل نادیده گرفته‌اند، که باعث کاهش دقت و قابلیت تعمیم مدل‌ها شده است. پژوهش حاضر با ترکیب داده‌های ویژگی‌محور و گرافی و استفاده از چارچوب Stacked Generalization، خلا موجود را برطرف کرده و جایگاه جدیدی در تحلیل ترک تحصیل دانشجویان ارائه می‌دهد.

#### ۲/۴ - روش پژوهش:

در این پژوهش، داده‌های دانشجویان پس از پیش‌پردازش (حذف مقادیر گمشده، نرمال‌سازی و کدگذاری ویژگی‌ها) با مدل‌های یادگیری ماشین جدولی مانند Random Forest، XGBoost و TabNet تحلیل شدند. سپس برای استخراج روابط میان دانشجویان، داده‌ها به صورت گرافی مدل‌سازی و با الگوریتم‌های GCN و GraphSAGE بررسی گردید. در نهایت، با استفاده از چارچوب Stacked Generalization نتایج مدل‌ها ترکیب شده و با معیارهای Accuracy، Precision، Recall و F1-score ارزیابی شد.



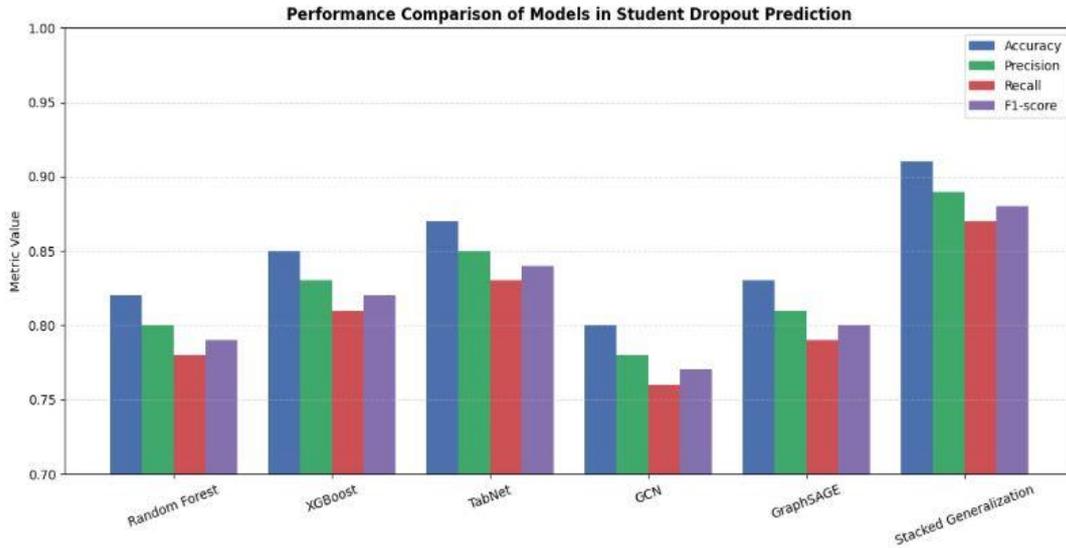
شکل ۲. مقایسه عملکرد مدل‌های مختلف در چارچوب ترکیبی پیشنهادی برای پیش‌بینی ترک تحصیل

### ۳- نتایج:

پژوهش حاضر با ترکیب داده‌های جدولی و گرافی و استفاده از Stacked Generalization نوآوری قابل توجهی در پیش‌بینی ترک تحصیل دانشجویان ارائه می‌دهد. مدل ترکیبی توانسته دقت پیش‌بینی را نسبت به مدل‌های منفرد جدولی یا گرافی بهبود دهد و نقاط قوت هر دو نوع مدل را همزمان لحاظ کند. تحلیل اولیه نشان می‌دهد که ادغام داده‌های ویژگی‌محور و روابط دانشجویان (گراف) باعث افزایش عملکرد مدل و کاهش اشتباهات پیش‌بینی شده است.

جدول ۲. مقایسه معیارهای عملکرد مدل‌های جدولی، گرافی و چارچوب ترکیبی پیشنهادی در پیش‌بینی ترک تحصیل دانشجویان

معیار F1-Score	بازیابی	دقت مثبت	دقت	مدل
0.79	0.78	0.80	0.82	Random Forest
0.82	0.81	0.83	0.85	XGBoost
0.84	0.83	0.85	0.87	TabNet
0.77	0.76	0.78	0.80	GCN
0.80	0.79	0.81	0.83	GraphSAGE
0.88	0.87	0.89	0.91	Stacked Generalization



شکل ۳. مقایسه معیارهای عملکرد Accuracy، Precision، Recall، F1 مدل‌های جدولی، گرافی و چارچوب ترکیبی پیشنهادی

مراجع:

1. López, M., Romero, C., Ventura, S., & de Castro, J. (2020). *Predicting student's dropout in university classes using two-layer ensemble machine learning approach: A novel stacked generalization*. *Computers & Education*, 150, 103840.
2. Xiong, F., Zhang, X., & Wang, Y. (2019). *Graph neural networks for student performance prediction in educational systems*. *IEEE Access*, 7, 141653–141662.
3. Ramesh, A., & Sridhar, V. (2021). *Tabular data learning using TabNet for early identification of at-risk students*. *Expert Systems with Applications*, 174, 114786.
4. Chen, T., & Guestrin, C. (2016). *XGBoost: A scalable tree boosting system*. *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, 785–794.



# بهینه سازی و کنترل

## طراحی کنترل کننده تطبیقی برای مسئله توافق یک سیستم چندعامله با دینامیک‌های غیرخطی یکسان

آرش جدائی\*؛ عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

jodaei۵۶@pnu.ac.ir

محمدرضا نیکنام، عضو هیأت علمی گروه علوم پایه، واحد خلخال، دانشگاه آزاد اسلامی، خلخال، ایران

Rezanik۸۲@yahoo.com

**چکیده:** در این مقاله، طراحی کنترل کننده تطبیقی برای مسئله توافق یک سیستم چندعامله با دینامیک‌های یکسان، مستقل زمانی، پیوسته زمانی، غیرخطی و گراف ارتباطی بی جهت و ثابت مطالعه می‌شود. می‌خواهیم عامل‌ها طوری کنترل شوند که از نظر مکانی و بصورت مجانبی همدیگر را ردیابی کنند، لذا کنترل کننده‌ای جهت رسیدن به این هدف پیشنهاد می‌شود. با استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف، نظریه گراف و نامساوی خطی ماتریسی، الگوریتم دومرحله‌ای جهت طراحی ماتریس‌های بهره کنترل کننده ارائه می‌شود.  
**کلمات کلیدی:** کنترل تطبیقی، سیستم‌های چندعامله، توافق، نامساوی خطی ماتریسی.

### ۱ مقدمه

یک سیستم چندعامله با  $N$  عامل، با دینامیک‌های یکسان، غیرخطی، زمان پیوسته و ثابت با زمان بصورت زیر مفروض است:

$$\dot{x}_i = Ax_i + Df(x_i) + Bu_i = F(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

به ترتیب بردارهای حالت و کنترل عامل  $i$  ام هستند،  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک تابع برداری پیوسته غیر خطی بوده و  $A, B, D$  ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب هستند. عامل‌ها را با اندیس‌های  $1, 2, \dots, N$  نشان می‌دهیم. می‌خواهیم عامل‌ها را طوری کنترل کنیم که همدیگر را از نظر مکانی ردیابی کنند. یعنی برای هر شرایط اولیه  $x_i(0)$  داشته باشیم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad i \neq j \quad (2)$$

**فرض ۱.۱.** گراف سیستم چندعامله، بی جهت و همبند فرض می‌شود.

**فرض ۲.۱.** تابع غیرخطی و برداری  $f$  در شرط لیپ شیتز با ثابت  $l$  صدق می‌کند:

$$\exists l > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq l \|x - y\| \quad (3)$$

Author Corresponding\*



یادآوری ۱.۱. از فرض ۲.۱ نتیجه می شود که تابع  $F$  نیز در شرط لیب شیتز صدق می کند. طبق قضیه وجود و یکتایی، برای هر شرط اولیه و بردار کنترلی  $u_i$  پیشنهادشده، سیستم غیرخطی (۱)، دارای جواب یکتاست. در هر گراف بی جهت، ماتریس لاپلاسیان  $L = [L_{ij}]_{N \times N}$  متقارن است.

تعریف ۱.۱. شدت اثر ارتباطی مابین عامل ها را با پارامتری بنام ضریب اتصالی نشان می دهند

## ۲ طراحی کنترل کننده برای مسئله توافق مجانبی تطبیقی

در این بخش یک پروتکل کنترلی تطبیقی جهت توافق عامل ها بصورت زیر معرفی می شود:

$$u_i = F \sum_{j=1}^N c_{ij} a_{ij} (x_i - x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

$$\dot{c}_{ij} = k_{ij} a_{ij} (x_i - x_j)^T \Gamma (x_i - x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

که در آن،  $k_{ij} = k_{ji}$  ضرایب مثبت،  $c_{ij}$  ضرائب اتصالی جفتی متغیر با زمان مابین عامل های  $i, j$  است،  $c_{ij}(0) = c_{ji}(0)$ ،  $F \in R^{m \times n}$  و  $\Gamma \in R^{n \times n}$  ماتریس های بهره فیدبک گویند. تحت فرضیات ۱.۱ و ۲.۱ ماتریس های  $F, \Gamma$  را برای پروتکل کنترلی (۴) و (۵) بصورت الگوریتم زیر طراحی می کنیم:

• گام ۱: محاسبه کنید ماتریس  $Q > 0$  و ماتریس قطری  $T > 0$  و پارامتر مثبت  $\alpha$  که جواب های نامساوی خطی ماتریسی زیر می باشند ( $l$  ثابت لیب شیتس است):

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T - \alpha BB^T + l^2 DTD^T & Q \\ Q & -T \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

• گام ۲: قرار دهید:  $F = -B^T Q^{-1}$ ,  $\Gamma = Q^{-1} B B^T Q^{-1}$

قضیه ۱.۲. سیستم های چندعامله با دینامیک های (۱) را در نظر می گیریم. تحت فرضیات ۱.۱ و ۲.۱ اگر نامساوی خطی ماتریسی (۶) حل شدنی باشد آنگاه عامل ها در سیستم چندعامله فوق تحت پروتکل کنترلی تطبیقی (۴) و (۵) به توافق می رسند و ضرائب اتصالی جفتی  $c_{ij}$  به یک مقدار ثابت و متناهی همگرا می شوند.

برهان. فرض می کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^N x_j}{N}, \quad e_i = x_i - \bar{x}, \quad e = [e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T]^T \quad (7)$$

و  $c_{ij} = \tilde{c}_{ij} + \beta \quad \beta > 0$

با جایگذاری پروتکل تطبیقی (۴) و (۵) در سیستم غیرخطی (۱) داریم:

$$\dot{x}_i = Ax_i + Df(x_i) + \sum_{j=1}^N c_{ij} a_{ij} BF(x_i - x_j) \quad (8)$$

با مشتق گیری از نسبت به زمان در رابطه (۷) و جایگذاری رابطه (۸) در آن داریم:

$$\dot{e}_i = Ae_i + Df(x_i) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Df(x_j) + \sum_{j=1}^N (\tilde{c}_{ij} + \beta) a_{ij} BF(e_i - e_j) \quad (9)$$

$$\dot{\tilde{c}}_{ij} = k_{ij} a_{ij} (e_i - e_j)^T \Gamma (e_i - e_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

بنابراین حل مسئله توافق تحت پروتکل (۴) و (۵) معادل اثبات پایداری مجانبی سیستم (۹) و (۱۰) است.

ماتریس  $\Gamma$  یک ماتریس نیمه معین مثبت می باشد. چون گراف ارتباطی سیستم چندعامله در این حالت، غیرجهت دار فرض شده است لذا  $a_{ij} = a_{ji}$ . از (۵) نتیجه می شود  $\dot{c}_{ij}(t) = \dot{c}_{ji}(t)$  و با فرض  $c_{ij}(0) = c_{ji}(0)$ ، نتیجه می شود که  $\forall t > 0, c_{ij}(t) = c_{ji}(t)$ ، لذا نتیجه می گیریم:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{c}_{ij} a_{ij} (e_i - e_j)^T \Gamma (e_i - e_j) = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{c}_{ij} a_{ij} e_i^T \Gamma (e_i - e_j) \quad (11)$$

تابع لیپانوف زیر را برای سیستم خطای (۹) و (۱۰) در نظر می گیریم:

$$V = \sum_{i=1}^N e_i^T Q^{-1} e_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\tilde{c}_{ij}^2}{2k_{ij}} \quad (12)$$

با مشتق گیری از تابع  $V$  نسبت به زمان در طول مسیرهای سیستم خطای (۹) و استفاده از رابطه (۱۱) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2 \sum_{i=1}^N e_i^T Q^{-1} e_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\tilde{c}_{ij}^2}{2k_{ij}} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^N e_i^T Q^{-1} \left[ A e_i + D f(x_i) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D f(x_j) + \sum_{j=1}^N (\tilde{c}_{ij} + \beta) a_{ij} B f(e_i - e_j) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{c}_{ij} a_{ij} (e_i - e_j)^T \Gamma (e_i - e_j) \quad (13) \\ &= 2 \sum_{i=1}^N e_i^T Q^{-1} A e_i - 2\beta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N L_{ij} e_i^T Q^{-1} B B^T Q^{-1} e_j + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T Q^{-1} D [f(x_i) - f(\bar{x}) \\ &+ f(\bar{x}) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j)] \end{aligned}$$

با استفاده از فرض ۲.۱ داریم:

$$2e_i^T Q^{-1} D [f(x_i) - f(\bar{x})] \leq 2l \left\| e_i^T Q D T^{\frac{1}{2}} \right\| \left\| T^{-\frac{1}{2}} e_i \right\| \leq e_i^T (l^2 Q^{-1} D T D^T Q^{-1} + T^{-1}) e_i \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^N e_i = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \bar{x} = N\bar{x} - N\bar{x} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N e_i^T = 0 \quad (15)$$

از رابطه (۱۵) نتیجه می گیریم:

$$\sum_{i=1}^N e_i^T Q^{-1} D \left( f(\bar{x}) - \frac{\sum_{j=1}^N f(x_j)}{N} \right) = 0 \quad (16)$$

تغییر متغیر اول  $\hat{e} = [\hat{e}_1^T, \dots, \hat{e}_N^T]^T$  و  $\hat{e}_i = Q^{-1} e_i$  را نظر می گیریم. با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۴) و (۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sum_{i=1}^N \hat{e}_i^T \left( (A Q + Q A^T + l^2 D T D^T + Q T^{-1} Q) \hat{e}_i - 2\beta \sum_{j=1}^N L_{ij} B B^T \hat{e}_j \right) \\ &= \hat{e}^T (I_N \otimes ((A Q + Q A^T + l^2 D T D^T + Q T^{-1} Q) - 2\beta L \otimes B B^T)) \hat{e} \quad (17) \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه (قدسیل-رویل) [۲]، ماتریس متعامد  $U$  وجود دارد بطوریکه داشته باشیم:

$$U^T L U = \Lambda = \text{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \quad (18)$$

$\lambda_i$ ها مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین  $L$  می باشند. ماتریس لاپلاسین  $L$  متقارن بوده و لذا مقادیر ویژه آن، حقیقی هستند.

$$\lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad \lambda_1 = 0 \quad (19)$$

چون بردارهای ویژه راست و چپ ماتریس  $L$  متناظر مقدار ویژه  $\lambda_1 = 0$  و  $1$  و  $1^T$  هستند لذا ماتریس متعامد  $U$  بصورت زیر پیشنهاد می کنیم:

$$U = \left[ \frac{1}{\sqrt{N}}, Y_1 \right], \quad U^T = \begin{bmatrix} \frac{1^T}{\sqrt{N}} \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad Y_1 \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}, \quad Y_2 \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N} \quad (20)$$

تغییر متغیر دوم را بصورت زیر نظر می گیریم:

$$\zeta = [\zeta_1^T, \dots, \zeta_N^T] = (U^T \otimes I_N) \hat{e} \quad (21)$$

لذا نتیجه می شود:

$$\zeta_1 = \left( \frac{1^T}{\sqrt{N}} \otimes I_n \right) \hat{e} = \left( \frac{1^T}{\sqrt{N}} \otimes Q^{-1} \right) e = 0 \quad (22)$$

از (۱۷)، (۲۱) و (۲۲) نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \zeta^T (I_N \otimes (AQ + QA^T + l^2 DTD^T + QT^{-1}Q) - 2\beta\Lambda \otimes BB^T) \zeta \\ &= \sum_{i=2}^N \zeta_i^T (AQ + QA^T + l^2 DTD^T + QT^{-1}Q - 2\beta\lambda_i BB^T) \zeta_i = -(-W(\zeta)) \end{aligned} \quad (23)$$

با استفاده از نامساوی خطی ماتریسی (۶) و قضیه مکمل شور [۳] نتیجه می گیریم:

$$AQ + QA^T + l^2 DTD^T + QT^{-1}Q - \alpha BB^T < 0 \quad (24)$$

با انتخاب  $\beta$  به اندازه کافی بزرگ بطوریکه  $2\beta\lambda_i \geq \alpha, i = 2, \dots, N$  نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} &AQ + QA^T + l^2 DTD^T + QT^{-1}Q - 2\beta\lambda_i BB^T \leq \\ &AQ + QA^T + l^2 DTD^T + QT^{-1}Q - \alpha BB^T < 0 \quad i = 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (25)$$

در نتیجه از روابط (۲۳) و (۲۵) نتیجه می شود که  $\dot{V} \leq -(-W(\zeta)) \leq 0$  چون  $\dot{V}(t) \leq 0$  پس با انتگرال گیری در بازه  $[0, t]$  نتیجه می شود که تابع لیاپانوف  $V(t)$  کراندار از بالا بوده در نتیجه دنباله متغیرهای  $c_{ij}$  و به طبع آن دنباله متغیرهای  $c_{ij}$  کراندار از بالا است. از رابطه (۵) نتیجه می شود که چون ماتریس  $\Gamma$  نیمه معین مثبت است پس  $c_{ij}(t) \geq 0$  و در نتیجه دنباله صعودی و یکنوا است لذا به یک مقدار متناهی همگراست. تابع  $-W(\zeta)$  معین مثبت و بیکران شعاعی است. با استفاده از قضیه (لاسال-یوشیزاوا) [۱] نتیجه می شود که  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(\zeta) = 0$ . اگر  $t \rightarrow \infty$  آنگاه برای  $i = 2, 3, \dots, N$ ،  $\zeta_i \rightarrow 0$ ، لذا نتیجه می شود که  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  و در نتیجه  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \bar{x}) = 0$ . □

### ۳ نتایج

در این مقاله مسئله توافق یک سیستم چندعامله با دینامیک های غیر خطی یکسان و گراف ارتباطی بدون جهت و ثابت بررسی شد. برای کنترل عامل ها، کنترل کننده تطبیقی شامل دو ماتریس بهره پیشنهاد شد و الگوریتمی جهت طراحی آنها ارائه گردید. صحت الگوریتم پیشنهاد شده نیز در شبیه سازی مورد بررسی قرار گرفت.

### مراجع

- [1] Z. Chen, "LaSalle-Yoshizawa Theorem for nonlinear systems with external inputs: A counter-example," *Automatica*, vol. 147, 2023.
- [2] C. Godsil and G. Royle, "Algebraic Graph theory," Springer-Verlag, New York, 2001.
- [3] W. Hou, M.Y. Fu, and H. Zhang, "Consensusability of Linear Multi-Agent Systems with Time Delay," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 26, pp. 2529-2541, 2016.



## بررسی مهار یک سیستم چندعامله با دینامیک‌های غیرخطی

آرش جدائی عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

jodaei56@pnu.ac.ir

محمدرضا نیکنام، عضو هیأت علمی گروه علوم پایه، واحد خلخال، دانشگاه آزاد اسلامی، خلخال، ایران

Rezanik82@yahoo.com

**چکیده:** در این مقاله، طراحی کنترل کننده برای مسئله مهار یک سیستم چندعامله با دینامیک‌های یکسان، مستقل از زمان، پیوسته زمان، غیرخطی و گراف ارتباطی جهت دار ثابت مطالعه می‌شود. الگوریتم چهار مرحله‌ای جهت طراحی ضریب اتصالی و ماتریس بهره کنترل کننده ارائه شده و موارد ذکر شده بصورت شرایط کافی تحت قضیه اثبات می‌شود. در اثبات این مسئله از قضیه پایداری لیاپانوف، نظریه گراف و نامساوی خطی ماتریسی استفاده می‌شود. **کلمات کلیدی:** سیستمهای چندعامله، مهار، پیشرو، دنباله‌رو.

### ۱ مقدمه

یک سیستم چندعامله با دینامیک‌های یکسان، غیرخطی، زمان پیوسته و ثابت با زمان بصورت زیر مفروض است:

$$\dot{x}_i = Ax_i + Df(t, x_i) + Bu_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

که در آن  $u_i \in R^m$ ,  $x_i \in R^n$  به ترتیب بردارهای حالت و کنترل عامل  $i$ ام، تابع  $f: R \times R^n \rightarrow R^n$  یک تابع برداری پیوسته غیرخطی،  $A$  و  $D$  و  $B$  ماتریس‌های با ابعاد مناسب هستند. عامل‌ها با اندیس‌های  $1, 2, 3, \dots, M$  را دنباله‌رو و با اندیس‌های  $M+1, \dots, N$  را پیشرو در نظر گرفته و مجموعه‌های  $v_F = \{1, 2, \dots, M\}$  و  $v_L = \{M+1, \dots, N\}$  به ترتیب مجموعه عامل‌های دنباله‌رو و پیشرو در نظر می‌گیریم.

**تعریف ۱.۱.** پوش محدب مجموعه متناهی  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset R^n$  عبارت است از کوچکترین مجموعه محدب شامل  $X$  و با نماد  $CO(X)$  نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$CO(X) = CO\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in R, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\} \quad (2)$$

**یادآوری ۱.۱.** در فضای برداری  $R^n$ ، پوش محدب تولید شده توسط یک مجموعه متناهی، بصورت یک چندضلعی محدب  $n$  بعدی می‌باشد.



تعریف ۲.۱. در سیستم چندعامله شامل  $N$  عامل بصورت  $M$  عامل دنباله‌رو و  $N - M$  عامل پیشرو مسئله مهار عامل‌های دنباله‌رو یعنی برای هر شرایط اولیه مکانی عامل‌های دنباله‌رو، ثابت‌های  $\alpha_i$  با شرط  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  چنان موجود باشند بطوریکه داشته باشیم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| x_i(t) - \sum_{j=M+1}^N \alpha_j x_j(t) \right\| = 0 \quad \forall x_i(0) \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3)$$

به عبارت ساده‌تر در یک سیستم چندعامله برای هر حالت اولیه مکانی عامل‌های دنباله‌رو، همگرایی عامل‌های دنباله‌رو به پوش محدب تولید شده توسط عامل‌های پیشرو را مسئله مهار عامل‌های دنباله‌رو گویند [۴].

فرض ۱.۱. برای  $M + 1 \leq i \leq N$  یعنی بردار کنترل پیشروها صفر می‌باشد.

فرض ۲.۱. گراف سیستم چندعامله، جهت‌دار بوده و برای هر عامل دنباله‌رو حداقل یک عامل پیشرو وجود دارد بطوریکه یک مسیر جهت‌دار از عامل پیشرو به عامل دنباله‌رو موجود است و هیچ یال مابین پیشروها وجود ندارد.

فرض ۳.۱. برای ثابت‌های نامنفی  $\eta_i (i = 1, 2, \dots, N - M)$  با  $\sum_{i=1}^{N-M} \eta_i = 1$  عدد ثابت و مثبت  $l$  وجود دارد بطوریکه برای هر  $x, y_i \in \mathbb{R}^n$  داشته باشیم:

$$\left\| f(t, x) - \sum_{i=1}^{N-M} \eta_i f(t, y_i) \right\| \leq l \left\| x - \sum_{i=1}^{N-M} \eta_i y_i \right\| \quad (4)$$

فرض ۴.۱. برای ماتریس متقارن حقیقی  $A$ ،  $A > 0$  و  $A < 0$  به ترتیب یعنی ماتریس  $A$  معین مثبت و معین منفی است.

یادآوری ۲.۱. از فرض ۳.۱ نتیجه می‌شود که تابع غیرخطی و دومتغیره  $f$  در شرط لیپ شیتس صدق می‌کند ولی برعکس آن در حالت کلی صحیح نیست. با این فرض، طبق قضیه وجود و یکتایی، سیستم (۱) برای هر شرط اولیه و  $u_i$  ارائه شده، دارای جواب یکتا می‌باشد.

تعریف ۳.۱. ماتریس نامنفرد حقیقی  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  را  $M$  ماتریس گویند هرگاه همه عناصر غیرقطری آن نامثبت بوده و همه مقادیر ویژه آن دارای قسمت حقیقی مثبت باشند [۱].

قضیه ۱.۱. برای یک ماتریس نامنفرد  $E = [e_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  عبارات زیر معادلند:

- یک  $M$  ماتریس است.
- ماتریس قطری و معین مثبت  $\Theta = \text{diag} \{ \theta_1, \dots, \theta_n \}$  وجود دارد بطوریکه  $\Theta E + E^T \Theta$  ماتریس معین مثبت است [۲].

یادآوری ۳.۱.

- ماتریس لاپلاسیان  $L$  سیستم‌های چندعامله با  $M$  عامل دنباله‌رو و  $N - M$  عامل پیشرو بصورت ماتریس بلوکی زیر نشان داده می‌شود:

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ 0_{M \times (N-M)} & 0_{(N-M) \times (N-M)} \end{bmatrix}, L_2 \in \mathbb{R}^{M \times (N-M)}, L_1 \in \mathbb{R}^{M \times M} \quad (5)$$

- ماتریس  $\Theta E + E^T \Theta$  در قضیه ۱.۱، علاوه بر معین مثبت بودن، اکیدا قطر غالب بوده و عناصر قطری و مقادیر ویژه آن، مثبت می‌باشند. مقادیر ویژه ماتریس‌های معین مثبت حقیقی، اعدادی حقیقی و مثبت هستند.

قضیه ۲.۱. ماتریس نامنفرد  $L_1$  یک  $M$  ماتریس است اگر و تنها اگر فرض ۲.۱ برقرار باشد. با این فرض، هر درایه ماتریس  $L_2^{-1} L_1$  نامنفی است و جمع هر سطر این ماتریس برابر ۱ است [۴].



## ۲ طراحی کنترل کننده برای مسئله مهار

در این بخش مسئله مهار یک سیستم چندعامله با دینامیک‌های غیرخطی بررسی شده و الگوریتمی جهت طراحی کنترل کننده معرفی می‌گردد.

**قضیه ۱.۲.** سیستم‌های چندعامله با دینامیک‌های (۱) را در نظر می‌گیریم. تحت فرضیات ۲.۱ و ۳.۱ و اینکه نامساوی خطی ماتریسی (۱۱) دارای جواب باشد آنگاه برای هر شرایط اولیه، همه عامل‌های دنباله‌رو پوش محدب متحرک تولید شده توسط عامل‌های پیشرو را ردیابی می‌کنند.

برهان. کنترل کننده زیر را برای همه عامل‌های دنباله‌رو در نظر می‌گیریم:

$$u_i = \alpha K \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i - x_j) \quad i \in V_F \quad (6)$$

که  $\alpha$  ضریب اتصالی است که عددی مثبت می‌باشد و  $K$  ماتریس بهره فیدبک می‌باشد که هر دو باید طراحی شوند.  $a_{ij}$ ها عناصر ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار ارتباطی مابین عامل‌ها هستند. ثابت می‌کنیم با کنترل کننده (۶)، عامل‌های دنباله‌رو با سیستم (۱) پوش محدب تولید شده توسط عامل‌های پیشرو را ردیابی می‌کنند. تحت کنترل کننده (۶) سیستم (۱) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_i^o = Ax_i + Df(t, x_i) & i \in V_L \\ \dot{x}_i^o = Ax_i + Df(t, x_i) + \alpha K \sum_{j=1}^N Ba_{ij} (x_j - x_i) & i \in V_F \end{cases} \quad (7)$$

با فرض  $x_L = [x_{M+1}^T, \dots, x_N^T]^T$  و  $x_F = [x_1^T, \dots, x_M^T]^T$  و  $F(t, x_L) = [f(t, x_{M+1}), \dots, f(t, x_N)]^T$  سیستم (۷) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_L^o = (I_{N-M} \otimes A) x_L + (I_{N-M} \otimes D) F(t, x_L) \\ \dot{x}_F^o = (I_M \otimes A) x_F + (I_M \otimes D) F(t, x_L) - \alpha (L_1 \otimes BK) x_F - \alpha (L_2 \otimes BK) x_L \end{cases} \quad (8)$$

فرض می‌کنیم:

$$e(t) = x_F - (- (L_1^{-1} L_2 \otimes I_n) x_L) = x_F + (L_1^{-1} L_2 \otimes I_n) x_L \quad (9)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۹) و استفاده از رابطه (۸) و فرض  $F(t, x_L, x_F) = (L_1^{-1} L_2 \otimes I_n) F(t, x_L) + F(t, x_F)$  نتیجه می‌گیریم:

$$\dot{e}^o(t) = (I_M \otimes A) e(t) + (I_M \otimes D) F(t, x_L, x_F) - \alpha (L_1 \otimes BK) e(t). \quad (10)$$

بنابراین حل مسئله معادل اثبات پایداری مجانبی سیستم (۱۰) است. تحت فرضیات ۲.۱ و ۳.۱، پارامتر مثبت  $\alpha$  و ماتریس بهره  $K$  را برای کنترل کننده (۶) بصورت الگوریتم زیر طراحی می‌کنیم:

• گام ۱: محاسبه ماتریس قطری  $\Theta = \text{diag} \{ \theta_1, \dots, \theta_n \}$  در قضیه ۱.۱ متناظر با  $E = L_1$ . بنابر قضیه ۱.۲، ماتریس  $M, E = L_1$  است.

• گام ۲: محاسبه ماتریس معین مثبت  $Q$  و پارامتر مثبت  $c$  که جواب‌های نامساوی خطی ماتریسی زیر می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T - cBB^T + l^2DD^T & Q \\ & Q \\ & & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (11)$$

• گام ۳: قرار دهید  $K = B^T Q^{-1}$  و  $\alpha \geq \frac{c\theta_{\max}}{\lambda_0}$  که  $\lambda_0$  کوچکترین مقدار ویژه ماتریس معین مثبت  $\Theta L_1 + L_1^T \Theta$  است.

برای اثبات پایداری مجانبی سیستم خطای (۱۰)، تابع لیپانوف زیر را در نظر می‌گیریم:

$$V(t) = e^T(t) (\Theta \otimes Q^{-1}) e(t) \quad (12)$$



با مشتق گیری از تابع لیاپانوف (۱۲) نسبت به زمان و در طول مسیرهای سیستم خطای (۱۰) نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} V^\circ(t) &= 2e^T(t) (\Theta \otimes Q^{-1}) [(I_M \otimes A) e(t) + (I_M \otimes D) F(t, x_L, x_F) - \alpha (L_1 \otimes BK) e(t)] \\ &= e^T(t) [\Theta \otimes (Q^{-1} A + A^T Q^{-1})] e(t) - \alpha e^T(t) [(\Theta L_1 + L_1^T \Theta) \otimes Q^{-1} BK] e(t) \\ &\quad + 2e^T(t) (\Theta \otimes Q^{-1} D) F(t, x_L, x_F) \end{aligned} \quad (13)$$

از فرض ۳.۱ نتیجه می شود:

$$2e^T(t) (\Theta \otimes Q^{-1} D) F(t, x_L, x_F) \leq e^T(t) [\Theta \otimes (l^2 Q^{-1} D D^T Q^{-1} + I_n)] e(t). \quad (14)$$

با جایگذاری  $K = B^T Q^{-1}$  در رابطه (۱۳) و استفاده از رابطه (۱۴) نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} V^\circ(t) &\leq e^T(t) [\Theta \otimes (Q^{-1} A + A^T Q^{-1} + l^2 Q^{-1} D D^T Q^{-1} + I_n)] e(t) - \alpha e^T(t) \\ &\quad [(\Theta L_1 + L_1^T \Theta) \otimes Q^{-1} B B^T Q^{-1}] e(t). \end{aligned} \quad (15)$$

با فرض  $\delta(t) = (I_M \otimes Q^{-1}) e(t)$  نتیجه می گیریم:

$$e(t) = (I_M \otimes Q) \delta(t) \quad (16)$$

با استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶) نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} V^\circ(t) &\leq \delta^T(t) [\Theta \otimes (AQ + QA^T + l^2 D D^T + Q Q^T)] \delta(t) - \\ &\quad \alpha \delta^T(t) [(\Theta L_1 + L_1^T \Theta) \otimes B B^T] \delta(t) \end{aligned} \quad (17)$$

با استفاده از گام های ۱ و ۳ الگوریتم و قضیه ۲.۱ نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} \alpha \delta^T(t) [(\Theta L_1 + L_1^T \Theta) \otimes B B^T] \delta(t) &\geq \frac{\alpha \lambda_0}{\theta_{\max}} \delta^T(t) (\Theta \otimes B B^T) \delta(t) \\ &\geq c \delta^T(t) (\Theta \otimes B B^T) \delta(t). \end{aligned} \quad (18)$$

از روابط (۱۷) و (۱۸) نتیجه می گیریم:

$$V^\circ(t) \leq \delta^T(t) [\Theta \otimes (AQ + QA^T + l^2 D D^T + Q Q^T - c B B^T)] \delta(t) \quad (19)$$

با استفاده از گام های ۱ و ۲ الگوریتم و قضیه مکمل شور [۳] نتیجه می شود:

$$AQ + QA^T + l^2 D D^T + Q Q^T - c B B^T < 0 \quad (20)$$

با استفاده از روابط (۱۹) و (۲۰) نتیجه می گیریم  $V^\circ(t) < 0$ ، با استفاده از قضیه پایداری لیاپانوف نتیجه می گیریم

که سیستم (۱۰) در مبدا پایدار مجانبی است لذا  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  و در نتیجه  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_F + (L_1^{-1} L_2 \otimes I_n) x_L = 0$

از قضیه ۲.۱ نتیجه می شود که  $(L_1^{-1} L_2 \otimes I_n) x_L \in CO(x_L)$  و قضیه اثبات می شود. □

### ۳ نتایج

در این مقاله مسئله مهار یک سیستم چندعامله با دینامیک های غیر خطی یکسان و گراف ارتباطی جهت دار و ثابت بررسی شد. برای کنترل عامل ها، کنترل کننده ای شامل یک ضریب اتصالی و یک ماتریس بهره پیشنهاد شد و الگوریتمی جهت طراحی آنها ارائه گردید. صحت الگوریتم پیشنهاد شده نیز در شبیه سازی مورد بررسی قرار گرفت.

### مراجع

- [1] A. Berman, R. J. Plemmons, "Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences," New York: Academic Press, INC, 1970.
- [2] R. A. Horn and C.R. Johnson, "Topics in Matrix Analysis," Cambridge University Press, Oxford, 1991.
- [3] W. Hou, M. Y. Fu and H. Zhang, "Consensusability of Linear Multi-Agent Systems with Time Delay," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 26, pp. 2529-2541, 2016.
- [4] X. Xu, H. Luo, W. Chen and L. Gao, "Containment Control Problem of Linear Multiagent Systems With External Disturbance and DoS Attacks," MDPI, 2023.



## حل مساله کوتاهترین زمان با حل دستگاه معادله دیفرانسیل اولر-لاگرانژ و مقایسه جواب آن با منحنی چرخزاد

آذر السادات شعبانی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه علوم پایه، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران  
[shabani\\_azarsadat@pnu.ac.ir](mailto:shabani_azarsadat@pnu.ac.ir)

**چکیده:** در این مقاله، یک روش پیشنهادی برای حل مساله کوتاهترین زمان ارائه شده است. این روش بر تبدیل معادله دیفرانسیل مساله کوتاهترین زمان، به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل استوار است. جواب بهینه به دست آمده در امتداد مسیر پیشنهادی دقیقاً با مقدار به دست آمده در امتداد مسیر بهینه منحنی چرخزاد برابری می کند.  
**کلمات کلیدی:** مساله کوتاهترین زمان، حساب تغییرات، منحنی چرخزاد، معادله دیفرانسیل اولر-لاگرانژ.

### ۱. مقدمه

برنولی با طرح مساله کوتاهترین زمان ریاضیدانان اروپایی را برای زورآزمایی فکری به مبارزه طلبید. لایبنتز، نیوتن، هوییتال، یوهان و ژاکوب راه حل هایی برای مساله کوتاهترین زمان ارائه کردند [1]. اولر در سال ۱۷۷۴ طی ارایه ی مقاله ای تحت عنوان "روشهای یافتن منحنیهای مسطح که نشان دهنده ی خواص بیشینه یا کمینه می باشند" روشی اساسی را برای حل مسائل کنترلی ارایه نمود [2]. این روش دارای یک مبنای تحلیلی میباشد که منجر به تبدیل مساله حساب تغییرات به معادله معروف اولر-لاگرانژ گردید. کوشنر و همکاران در [3] به استفاده از زنجیره مارکوف برای حل مسائل مختلف و از جمله مسائل حساب تغییرات پرداخته و این روش در [4] برای مسائل کنترل مورد استفاده قرار گرفت.  
در این مقاله پس از معرفی مساله کوتاهترین زمان، منحنی چرخزاد معرفی گردیده است. در بخش چهارم پس از بیان شکل کلی مساله حساب تغییرات، به معرفی معادله ی معروف اولر-لاگرانژ به عنوان شرط لازم برای حل این دسته مسائل پرداخته شده است. یافتن جواب معادله دیفرانسیل کوتاهترین زمان در بخش پنجم مورد بررسی قرار گرفت و در بخش ششم روش پیشنهادی بر پایه تبدیل معادله دیفرانسیل به یک دستگاه معادلات ارائه گردیده است. در بخش هفتم این مقاله، به محاسبه مسیر مناسب گذرا از دو نقطه مفروض از صفحه دکارتی پرداخته شد و مقدار شاخص عملکرد مساله کوتاهترین زمان در امتداد هر مسیر به طور جداگانه محاسبه شده است. نکته قابل توجه اینکه جواب به دست آمده از روش پیشنهادی، دارای جوابی منطبق بر جواب بهینه ای است که در امتداد مسیر چرخزاد حاصل می شود. در نهایت، نتیجه گیری بخش پایانی مقاله است که به ارائه گزارش مختصری از کل مراحل مقاله پرداخته شده است.

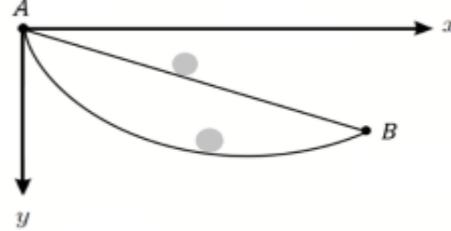
### ۲. مساله کوتاهترین زمان

مساله کوتاهترین زمان گذشته از این که به خودی خود مساله جالبی است بیشتر از این نظر اهمیت دارد که منشاء تاریخی حساب تغییرات بوده است. مطابق شکل (۱) فرض شده است که نقطه  $A$  به وسیله دو مسیر یکی در امتداد خط مستقیم و دیگری روی قوس دایره ای به نقطه پایین تر  $B$  متصل باشد و مهره ای بتواند بدون اصطکاک از  $A$  تا  $B$  روی این دو مسیر بلغزد. همانطور که در شکل (۱) ملاحظه می شود در این نمودار، جهت مثبت محور  $y$  ها در امتداد نیروی جاذبه و به سمت پائین در نظر گرفته شده است. سوالی که مطرح میشود به این صورت است که در امتداد کدامیک از این دو مسیر، مهره کمترین زمان را برای طی نمودن مسیر بین این دو نقطه لازم دارد؟ در نگاه اول، شاید اینگونه به نظر برسد که خط مستقیم واصل بین این دو نقطه که فاصله کمتری بین این دو نقطه دارد، مسیر کوتاهترین زمان طی شدن بین نقاط

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

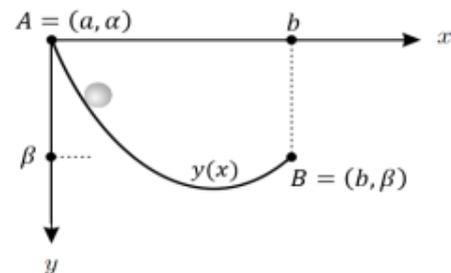


ابتدایی و انتهایی است. یک رویکرد دیگر این است که شاید بهتر باشد ابتدا مهره به صورت عمودی سقوط کند تا سرعت گرفته و با این سرعت بیشتر مسیر طولانی تری را در زمان کمتری طی کند و زودتر به نقطه پایانی برسد.



شکل ۱. دو مسیر در امتداد مستقیم و دایره ای بین نقاط  $A$  و  $B$

فرض کنید یک مهره مطابق شکل (۲)، تحت نیروی جاذبه با شتاب  $g$  در امتداد مسیر یک منحنی دلخواه از نقطه  $A(a, \alpha)$  با سرعت  $v_a$  به نقطه  $B(b, \beta)$  منتقل شود. سوال این است که معادله مسیر چگونه باشد تا انتقال مهره در کوتاهترین زمان صورت گیرد. با فرض اینکه جهت مثبت محور  $y$ ها در امتداد نیروی جاذبه و به سمت پایین باشد، برای حرکت مهره از نقطه  $A$  به نقطه  $B$  باید  $a < b$  و  $\alpha < \beta$  باشد. برای مدل سازی مساله کوتاهترین زمان، معادله مسیر حرکت مهره  $y(x)$  می باشد.



شکل ۲. مسیری در امتداد منحنی دلخواه  $y(x)$  بین نقاط  $A$  و  $B$

انرژی کل نقطه ابتدایی از مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل از رابطه زیر بدست می آید:

$$E_a = \frac{1}{2}mv_a^2 - mgy(a) \quad (1)$$

همچنین انرژی کل در یک نقطه دلخواه به طول  $a < x < b$  به صورت زیر محاسبه می شود:

$$E_x = \frac{1}{2}mv(x)^2 - mgy(x) \quad (2)$$

از طرفی با توجه به قانون بقای انرژی و ثابت ماندن انرژی کل نتیجه زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 - mgy(a) = \frac{1}{2}mv(x)^2 - mgy(x) \quad (3)$$

با توجه به رابطه فوق، سرعت لحظه ای مهره در نقطه ای به طول  $x$  به صورت زیر بدست می آید:

$$v(x) = \sqrt{v_a^2 + 2g(y(x) - y(a))} \quad (4)$$

از طرفی با توجه به این که سرعت در طول یک منحنی برابر  $v = \frac{ds}{dt}$  است می توان کل زمان طی شده روی منحنی

را با استفاده از رابطه (۴) به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$T(y) = \int_A^B \frac{ds}{dv} = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}}{\sqrt{v_a^2 + 2g(y(x) - \alpha)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}}{\sqrt{y(x) - (\alpha - \frac{v_a^2}{2g})}} dx \quad (5)$$

در نتیجه منحنی  $y(x)$  باید به گونه ای انتخاب شود که علاوه بر اینکه از نقاط  $A$  و  $B$  می گذرد، تابع (۵) را نیز کمینه کند. به عبارتی مساله کوتاهترین زمان به شکل زیر بیان می گردد [5]:

$$\min_y T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}}{\sqrt{y(x) - (\alpha - \frac{v_a^2}{2g})}} dx \quad (6)$$

$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta$$



در حلت خاص اگر مهره از حالت سکون و از مبدا به  $(b, \beta)$  رها شود، مدل زیر را خواهیم داشت:

$$\min_y T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}}{\sqrt{y(x)}} dx \quad (7)$$

$$y(0) = 0, y(b)$$

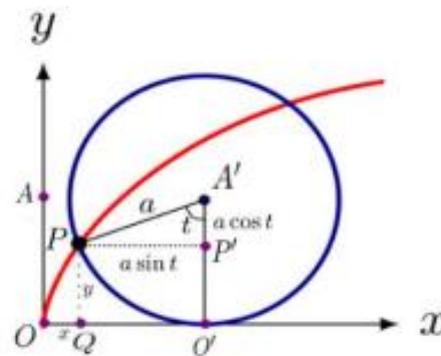
### ۳. مساله چرخزاد

برای اولین بار نام چرخزاد در سال ۱۵۰۱ در مقاله ای با موضوع تربیع دایره توسط شارل بوول مطرح گردیده است دلیل این نامگذاری آن است که منحنی چرخزاد از حرکت یک چرخ یا دایره، به دست می آید. باید توجه داشت که نمودار این منحنی را میتوان مسیر حرکت سنگ ریزه ای تصور کرد که به شیار لاستیک یک اتومبیل در حال حرکت، چسبیده است. معمولاً چرخزاد با یک سری معادلت پارامتری نمایش داده می شود.

گزاره ۱: چرخزاد به عنوان مکان هندسی نقاطی از صفحه که از حرکت یک چرخ یا دایره به شعاع  $a$  به دست می آید و معادله پارامتری به شکل زیر دارد:

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(t - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi a \quad (8)$$

به کمک نرم افزار مپیل و اجرای دستور  $Cycloid(3,4\pi, 12)$ ، با بکارگیری دایره مولد به شعاع  $a = 3$  در بازه  $t \in [0, 4\pi]$  با ایجاد ۱۲ نقطه از منحنی چرخزاد شکل (۳) دیده می شود.



شکل ۳. مکان هندسی نقطه P برای تشکیل منحنی چرخ زاد

### ۴. حساب تغییرات

یک مساله حساب تغییرات را می توان به این صورت بیان نمود [3]، مطلوب است محاسبه منحنی  $y(x)$  که تحت شرایط اولیه  $y(x_0)$  و  $y(x_1)$  تابعی زیر را مینیمم کند:

$$J(y) = \varphi(y(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), \dot{y}(x)) dx \quad (9)$$

نتیجه ۱: مساله کوتاهترین زمان (۶) و (۷) به شکل یک مساله حساب تغییرات با نقاط مرزی ثابت و تابع انتگرالده مساله (۷) به صورت  $L(y, \dot{y}) = \frac{\sqrt{1 + (\dot{y}(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}}$  می باشد. برای اینکه  $y = y^*(x)$  جوابی از مساله باشد لازم است که در هر نقطه از این منحنی شرط زیر برقرار باشد [1] و [4]:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (10)$$

این معادله دیفرانسیل، معادله اوپلر-لاگرانژ است که شرطی لازم برای اکسترمم نسبی است.  
گزاره ۲: اگر تابع انتگرالده در رابطه (۹)، مستقل از متغیر  $x$  و به شکل  $L(y, \dot{y})$  باشد، شرط اکسترمال به صورت زیر است:

$$L - \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = C \quad \text{مقدار ثابت} \quad (11)$$



## ۵. جواب معادله دیفرانسیل کوتاهترین زمان

طبق نتیجه ۱ تابع انتگرالده مربوط به مساله کوتاهترین زمان به صورت  $L(y, \dot{y})$  است و معادله اویلر-لاگرانژ طبق گزاره ۲ به شکل زیر قابل بازنویسی است:

$$L - \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left( \frac{\sqrt{1+(\dot{y})^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(\dot{y})^2}{\sqrt{y(1+(\dot{y})^2)}} \right) = C \quad (12)$$

با ساده کردن رابطه فوق، معادله دیفرانسیل زیر بدست می آید:

$$y(1+(\dot{y})^2) = c, c = \frac{1}{2gC^2} \quad (13)$$

که به آن معادله دیفرانسیل مساله کوتاهترین زمان گفته می شود. با حل این معادله مشخص می شود که منحنی کوتاهترین زمان چه شکلی است. با حل معادله دیفرانسیل فوق با استفاده از تغییرمتغیر  $\dot{y} = \cot \theta$  و شرط اولیه  $x(0) = 0$  داریم:

$$x = \frac{c}{2} (2\theta - \sin 2\theta) \quad (14)$$

در نتیجه بدیهی است با تغییر متغیرهای  $t = 2\theta$  و  $a = \frac{c}{2}$  معادله پارامتری رابطه (۸) حاصل می شود که همان نمایش پارامتری منحنی چرخزاد است. به عبارتی بهترین مسیر رسیدن از نقطه A به B در کوتاهترین زمان ممکن، پیمودن مسیر در امتداد منحنی چرخزاد است.

گزاره ۳: مدت زمانی که طول می کشد تا مهره‌ای که از مبدا رها شده و بدون اصطکاک بر روی مسیری به شکل چرخزاد به طرف پایین بلغزد و به نقطه  $(\pi a, 2a)$  برسد برابر با  $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$  است.

روش پیشنهادی: با جایگذاری  $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$  در معادله دیفرانسیل (۱۳) و اینکه  $c = \alpha^2$ ، رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - y}}{\sqrt{y}} \quad (15)$$

با انتخاب نظیر به نظیر صورت و مخرج در رابطه فوق به دستگاه معادلات زیر می رسیم:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \sqrt{\alpha^2 - y} & y(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} = \sqrt{y} & x(0) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

با حل دستگاه جواب زیر حاصل می شود: (معادله مسیر مربوط به مساله کوتاهترین زمان)

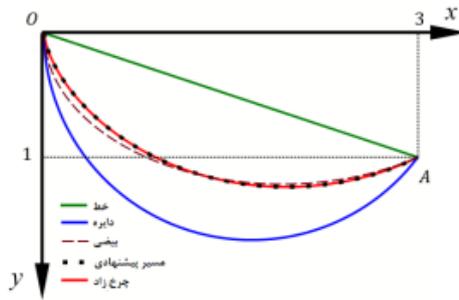
$$y(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \alpha t, x(t) = -\frac{4\alpha - 2t}{8} \sqrt{4\alpha t - t^2} - \alpha^2 \arcsin\left(1 - \frac{t}{2\alpha}\right) + \frac{\alpha^2 \pi}{2} \quad (17)$$

## ۶. مقایسه عددی مساله کوتاهترین زمان در امتداد مسیرهای مختلف

برای پیاده سازی و مقایسه عددی زمان در مساله کوتاهترین زمان، نقطه ابتدایی  $O = (0,0)$  و مقصد  $A = (3,1)$  را در نظر بگیرید. به منظور مقایسه، مسیرهای مختلف واصل بین این دو نقطه خط، دایره، بیضی و مسیر چرخزاد در نظر گرفته شده است. نتایج مقایسه در جدول (۱) و شکل (۴) آورده شده است.

جدول (۱). شاخص عملکرد مساله کوتاهترین زمان در امتداد مسیرهای مختلف

مسیر	مقدار شاخص عملکرد	خطای نسبی
خط مستقیم	1.428571428	$4.0E - 1$
دایره	1.058085217	$3.9E - 2$
بیضی	1.021892992	$3.0E - 3$
مسیر پیشنهادی	1.018832360	0
مسیر بهینه (چرخزاد)	1.018832360	0



شکل ۴. مسیرهای مختلف در حل مسأله کوتاهترین زمان در مقایسه با مسیر بهینه چرخزاد

## ۷. نتیجه گیری

در این مقاله، بعد از بیان مختصری از تاریخچه مسأله کوتاهترین زمان به بررسی ویژگیهای منحنی چرخزاد پرداخته شد. در ادامه پس از معرفی مسأله حساب تغییرات به بررسی معادله دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ به عنوان شرط لازم برای حل مسائل حساب تغییرات پرداخته شد. همچنین معادله دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ متناظر با مسأله کوتاهترین زمان تشکیل و جواب آن به دست آمد که حاکی از این است که جواب بهینه این مسأله، منحنی چرخزاد است. همچنین یک روش پیشنهادی برای حل معادله دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ بر پایه تبدیل آن به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل ارائه گردید. در نهایت در بخش مقایسه مسیرهای مختلف حل مسأله کوتاهترین زمان، مشخص گردید که جواب به دست آمده در قالب روش پیشنهادی با مقدار به دست آمده در امتداد مسیر بهینه یعنی منحنی چرخزاد برابری می‌کند.

## منابع

1. Brunt, B. (2004). The Calculus of Variations. Springer-Verlag, New York
2. Euler, L. (1744). The Method of Finding Plane Curves that Show Some Property of Maximum or Minimum, Lausanne and Geneva.
3. Kushner, H. J., Dupuis, P. (1992). Numerical methods for stochastic control problems in continuous time, Springer, New York.
4. Kafash, B., Nikoeenezhad, Z., & Delavarkhalafi, A. (2016). An iterative algorithm for solving stochastic optimal control via the Markov chain approximation. Journal of Control, 10(2), 35-43. (In Persian)
5. Russak, I. B. (2002). Calculus of variations MA 4311 lecture notes.
6. Kafash, B. (2024). Historical Approaches and Modern Methods in Analyzing the Brachistochrone Problem. Mathematics and Society, doi: 10.22108/msci.2024.142284.1678 (In Persian).

## تحلیل فرکانسی و تشخیص ناهنجاری در داده‌های گازی ترانس قدرت با استفاده از تبدیل موجک گسسته

طاهره زارع<sup>۱</sup>، گروه ریاضی، واحد بیضا، دانشگاه آزاد اسلامی، بیضا، ایران.

[Tahere.Zare@iau.ac.ir](mailto:Tahere.Zare@iau.ac.ir)

فرهاد بن محمد خواجه، دانشجوی دکتری گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران،

ایران

[Farzadmohamadi968@gmail.com](mailto:Farzadmohamadi968@gmail.com)

وصال ترنج، دانشجوی دکتری گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران.

[Vesaltoranj5959@gmail.com](mailto:Vesaltoranj5959@gmail.com)

**چکیده:** در این مقاله، رفتار فرکانسی داده‌های گازهای منواکسید کربن (CO) و دی‌اکسید کربن (CO<sub>2</sub>) تولید شده در ترانس‌های قدرت با استفاده از تبدیل موجک (DWT) مورد بررسی قرار گرفته است. هدف اصلی، شناسایی ناهنجاری‌ها و نویز در سطوح فرکانسی مختلف به منظور تشخیص زودهنگام تخریب عایق و سایر مشکلات داخلی ترانس است. با محاسبه انرژی سیگنال در سطوح فرکانسی مختلف، رفتار غیرعادی در سطح یک (فرکانس‌های بالا) شناسایی شد که نشان‌دهنده وجود نویز یا تخریب در اجزای داخلی ترانس می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که تحلیل فرکانسی با DWT ابزاری مؤثر برای پیش وضعیت ترانس و جلوگیری از خرابی‌های احتمالی است. [4]

**کلمات کلیدی:** تحلیل فرکانسی، تبدیل موجک گسسته (DWT)، ترانس قدرت، منواکسید کربن، دی‌اکسید کربن.

### ۱. مقدمه

ترانس‌های قدرت به‌عنوان اجزای حیاتی در شبکه‌های انتقال و توزیع انرژی الکتریکی، نیازمند پایش مستمر وضعیت عملکردی هستند. یکی از روش‌های متداول برای تشخیص faults در ترانس‌ها، تحلیل گازهای محلول در روغن (DGA) است. گازهایی مانند منواکسید کربن و دی‌اکسید کربن می‌توانند نشان‌دهنده تخریب عایق یا مشکلات حرارتی در ترانس باشند. با این حال، روش‌های سنتی تحلیل گازها قادر به تشخیص تغییرات ناگهانی و ناهنجاری‌های فرکانسی نیستند.

در این مقاله، از تبدیل موجک گسسته (DWT) برای تحلیل فرکانسی داده‌های گازی استفاده شده است. DWT قابلیت تجزیه سیگنال در سطوح فرکانسی مختلف، امکان شناسایی نویز و ناهنجاری‌ها را در بازه‌های فرکانسی بالا

<sup>۱</sup> طاهره زارع

فراهم می‌کند. این روش می‌تواند به‌عنوان یک ابزار کمکی در کنار روش‌های موجود، دقت و سرعت تشخیص faults را افزایش دهد.

## ۲: مبانی نظری تبدیل موجک گسسته

تبدیل موجک گسسته (DWT) قدرتمند در پردازش سیگنال است که بر پایه تحلیل چند رزولوشن (Multiresolution Analysis) است. برخلاف تبدیل فوریه که تنها اطلاعات فرکانسی را ارائه می‌دهد، DWT همزمان اطلاعات فرکانسی و زمانی را در اختیار قرار می‌دهد. در این بخش مبانی نظری DWT مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### ۱-۲: تبدیل موجک پیوسته و گسسته:

در ریاضیات، تبدیل موجک پیوسته برای تابع پیوسته  $x(t)$  که مربع آن انتگرال‌پذیر باشد در مقیاس  $a > 0$  و مکان  $b \in \mathbb{R}$  چنین تعریف می‌شود:

$$CWT(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt$$

که در آن  $\psi^*$  تابع موجک مادر و پارامترهای  $a, b$  به ترتیب مقیاس و انتقال هستند. در تبدیل موجک گسسته (DWT) مقیاس و انتقال به صورت گسسته انتخاب میشوند تا حجم داده‌ها کاهش یابد.

$$DWT(a, b) = \sum_n x[n] \psi_{a, b}[n]$$

### ۲-۲: تجزیه و تحلیل چند رزولوشن:

در DWT، سیگنال به سطوح مختلف فرکانسی تجزیه می‌شود. هر سطح نمایانگر یک بازه فرکانسی خاص است:

- سطح ۱: فرکانس‌های بالا (تغییرات سریع و نویز).
- سطح ۲: فرکانس‌های متوسط
- سطح ۳: فرکانس‌های پایین (روند کلی سیگنال) [4]
- ۲-۳: محاسبه انرژی در سطوح فرکانسی:

انرژی سیگنال در هر سطح از DWT با استفاده از رابطه زیر محاسبه میشود:

$$E_j = \sum_k |D_j[k]|^2$$

که در آن  $D_j[k]$  ضرایب جزئیات در سطح  $j$  هستند. سطوح با انرژی غیرعادی می‌توانند نشان‌دهنده ناهنجاری یا نویز در سیگنال باشند. [4]

### ۳: روش‌شناسی و شبیه‌سازی:

در این بخش، روش اجرای تحلیل فرکانسی بر روی داده‌های گازی منواکسید کربن و دی‌اکسید کربن ارائه شده است. داده‌های مورد استفاده شامل مقادیر گازهای CO و CO<sub>2</sub> در بازه‌های زمانی مختلف هستند.

#### ۱-۳. داده‌های مورد استفاده:

داده‌های منواکسید کربن: [353, 335, 356, 376, 357, 335]:

داده‌های دی‌اکسید کربن: [2775, 2586, 2689, 2810, 2741, 2601]:

**۲-۳. پیاده‌سازی در MATLAB :**

برای تحلیل فرکانسی داده‌ها از توابع موجود در جعبه ابزار موجک MATLAB استفاده شده است. مراحل پیاده‌سازی به شرح زیر هستند. [4]

**مرحله ۱: تجزیه سیگنال با DWT:**

داده های منوکسید کربن با استفاده از موجک سطح ۳ تجزیه شدند.

**مرحله ۲: محاسبه انرژی در سطوح مختلف:**

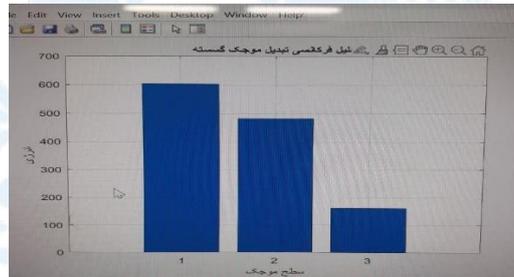
انرژی سیگنال در هر سطح با جمع مربعات ضرایب جزئیات محاسبه شد.

**مرحله ۳: رسم نمودارهای انرژی:**

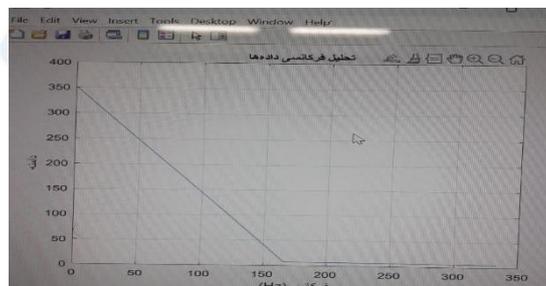
نمودارهای انرژی برای داده‌های CO<sub>2</sub> و CO<sub>2</sub> در سطوح مختلف ترسیم شدند.

**۳-۳: نتایج شبیه‌سازی:**

نتایج حاصل از شبیه‌سازی نشان داد که در سطح یک (فرکانس‌های بالا)، انرژی سیگنال به‌طور غیرعادی افزایش یافته است. این رفتار می‌تواند ناشی از نویز یا تخریب داخلی ترانس باشد. نمودارهای انرژی برای داده‌های CO<sub>2</sub> و CO<sub>2</sub> در شکل‌های ۱ و ۲ نمایش داده شده‌اند. [4]



شکل ۱



شکل ۲

**۴. نتایج اصلی**  
 بحث و تحلیل نتایج :

تحلیل انرژی در سطوح فرکانسی مختلف نشان داد که سطح یک (فرکانس‌های بالا) در هر دو CO و CO<sub>2</sub> دارای انرژی غیرعادی است. این رفتار می‌تواند به دلایل زیر رخ دهد [1,3]:

۱. نویز اندازه‌گیری: خطاهای سنسور یا تداخلات محیطی
۲. تخریب عایق: تولید گازهای اضافی ناشی از تخریب عایق یا روغن ترانس.
۳. تغییرات حرارتی: افزایش دما در اثر overload یا faults الکتریکی. مقایسه نتایج با استانداردهای بین‌المللی مانند IEC 60599 نشان می‌دهد که انرژی غیرعادی در فرکانس‌های بالا می‌تواند به‌عنوان یک شاخص early warning برای faults داخلی ترانس مورد استفاده قرار گیرد [3].

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، از تبدیل موجک گسسته برای تحلیل فرکانسی داده‌های گازی ترانس قدرت استفاده شد. نتایج نشان داد که سطح یک (فرکانس‌های بالا) دارای انرژی غیرعادی است که می‌تواند نشان‌دهنده نویز یا تخریب داخلی ترانس باشد. این روش می‌تواند به‌عنوان یک ابزار کمکی در کنار روش‌های سنتی DGA برای پایش وضعیت ترانس و جلوگیری از خرابی‌های احتمالی به کار رود [4,5]. پیشنهاد می‌شود آزمایش‌های تکمیلی نظیر تحلیل شیمیایی روغن و آزمون‌های الکتریکی برای تأیید نتایج انجام گیرد.

## منابع

1. Allan, D., & Whitmore, M. "Transformer Diagnostics Using Dissolved Gas Analysis (DGA)". IEEE Transactions on Power Delivery, 2023.
2. Mallat, S. "A Wavelet Tour of Signal Processing". Academic Press, 1999.
3. IEC Standard 60599: "Mineral Oil-Filled Electrical Equipment in Service - Guide to the Interpretation of Dissolved and Free Gases Analysis", 2015.
4. Mahajan, R., et al. "Detection of Transformer Anomalies Using Wavelet Transform". Journal of Electrical Engineering, 2021.
5. IEEE Guide C57.104-2019: "Guide for the Interpretation of Gases Generated in Oil-Immersed Transformers"



# حل مسائل کنترل بهینه کسری با استفاده از عملگر انتگرال کسری توابع ترکیبی چلیشکوف

سید مهدی شفیعی اف<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران،

ایران [smshafiof@pnu.ac.ir](mailto:smshafiof@pnu.ac.ir)

**چکیده:** در این مقاله، یک روش عددی کارآمد و ساده برای حل مسائل کنترل بهینه با مشتقات کسری ارائه می‌شود. اساس این روش بر استفاده از توابع ترکیبی چلیشکوف استوار است. ضمن محاسبه عملگر انتگرال کسری این توابع ترکیبی، نشان خواهیم داد که چگونه با به کارگیری عملگر انتگرال کسری روی این توابع، می‌توان یک مسأله کنترل بهینه کسری را به یک سیستم معادلات جبری تبدیل کرد که با هر الگوریتم تکراری قابل حل است. دقت و کارایی روش پیشنهادی با ارائه یک مثال عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

**کلمات کلیدی:** کنترل بهینه کسری، عملگر انتگرال کسری، توابع ترکیبی چلیشکوف

## ۱. مقدمه

کنترل بهینه به چگونگی هدایت رفتار یک سیستم دینامیکی در طول زمان، به گونه‌ای که یک شاخص عملکرد معین بهینه شود، می‌پردازد. حسابان کسری با تعمیم مفهوم مشتق و انتگرال به مرتبه‌های غیر صحیح، ابزار ریاضی قدرتمندی برای مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی پیچیده فراهم کرده است. مسائل کنترل بهینه کسری شامل مشتقات یا انتگرال‌های کسری در شاخص عملکرد یا سیستم‌های دینامیکی هستند. دو رویکرد کلی در حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری شامل روش‌های مستقیم و غیرمستقیم وجود دارد. روش غیرمستقیم مبتنی بر ایجاد سیستم همیلتونی بر پایه اصل ماکزیمم و روش مستقیم بر مبنای گسسته سازی با انتخاب توابع پایه می‌باشد. در این مقاله یک روش مستقیم با استفاده از محاسبه عملگر انتگرال کسری توابع ترکیبی چلیشکوف معرفی می‌گردد.

## ۲. تعاریف مقدماتی

**تعریف ۱-۲.** مشتق کسری کاپوتو از مرتبه  $\alpha$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود [۴]:

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول



$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (1)$$

تعریف ۲-۲. انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه  $\alpha$ . به صورت زیر تعریف می شود:

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2)$$

نکته ۲-۱. انتگرال کسری در رابطه زیر صدق می کند:

$${}_0 I_t^\alpha t^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1+\alpha)} t^{r+\alpha}, \quad r \in \mathbb{N}_0, \quad t > 0. \quad (3)$$

تعریف ۲-۳. چندجمله‌ای‌های چلیشکوف که دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد در بازه  $[0,1]$  را تشکیل می‌دهند، به صورت زیر تعریف می‌گردد [۳]:

$$C_m(t) = \sum_{j=0}^{M-m} \theta_{m,j} t^{m+j} \quad m = 0, 1, \dots, M, \theta_{m,j} = (-1)^j \binom{M-m}{j} \binom{M+m+j+1}{M-m}. \quad (4)$$

تعریف ۲-۴. توابع ترکیبی چلیشکوف،  $\psi_{nm}(t), n = 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, \dots, M$  در بازه  $[0,1]$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} \sqrt{N} C_m(Nt - n + 1), & t \in \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right), \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (5)$$

که  $n, m$  به ترتیب مرتبه چندجمله‌ای‌های چلیشکوف و توابع بلاک پالس می‌باشند.

### ۳. عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل توابع ترکیبی چلیشکوف

قضیه ۳-۱. عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه  $\alpha$  را با  $I^\alpha$  نمایش می‌دهیم. این عملگر برای توابع ترکیبی چلیشکوف به صورت زیر به دست می‌آید:

$$I^\alpha \psi_{nm}(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[ 0, \frac{n-1}{N} \right), \\ R_{nm}(t), & t \in \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right), \\ R_{nm}(t) - S_{nm}(t), & t \in \left[ \frac{n}{N}, 1 \right), \end{cases} \quad (6)$$

که در آن

$$R_{nm}(t) = \sqrt{N} \sum_{j=0}^{M-m} \theta_{m,j} N^{m+j} \frac{\Gamma(m+j+1)}{\Gamma(m+j+\alpha+1)} \left( t - \frac{n-1}{N} \right)^{m+j+\alpha},$$

$$S_{nm}(t) = \sqrt{N} \sum_{j=0}^{M-m} \sum_{k=0}^{m+j} \binom{m+j}{k} \theta_{m,j} N^{m+j-k} \frac{\Gamma(m+j-k+1)}{\Gamma(m+j-k+\alpha+1)} \left( t - \frac{n}{N} \right)^{m+j-k+\alpha}.$$

اثبات. در ابتدا  $I^\alpha \psi_{nm}(t)$  را برای  $t \in \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right)$  به ازای  $n = 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, 2, \dots, M$  به دست می‌آوریم. با استفاده از معادله (۲) خواهیم داشت:

$$I^\alpha \psi_{nm}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \psi_{nm}(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} \psi_{nm}(t-\tau) d\tau.$$

با توجه به تعریف توابع ترکیبی چلیشکوف (۵)، رابطه (۲) و تغییر متغیر  $T = t - \frac{n-1}{N}$  داریم:



$$I^\alpha \psi_{nm}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} \psi_{nm}(t-\tau) d\tau = \frac{\sqrt{N}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-\frac{n-1}{N}} \tau^{\alpha-1} C_m(N(t-\tau) - n + 1) d\tau$$

$$= \frac{\sqrt{N}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-\frac{n-1}{N}} \tau^{\alpha-1} C_m \left( N \left( \left( t - \frac{n-1}{N} \right) - \tau \right) \right) d\tau = \frac{\sqrt{N}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \tau^{\alpha-1} C_m(N(T-\tau)) d\tau = \sqrt{N} {}_0I_t^\alpha C_m(NT).$$

روابط (۳)، (۴) و (۵)، به دست می دهند:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-\frac{n-1}{N}} \tau^{\alpha-1} C_m(N(t-\tau) - n + 1) d\tau = \sqrt{N} \sum_{j=0}^{M-m} \theta_{m,j} N^{m+j} \frac{\Gamma(m+j+1)}{\Gamma(m+j+\alpha+1)} \left( t - \frac{n-1}{N} \right)^{m+j+\alpha}.$$

(۷)

همچنین به ازای  $t \in [\frac{n}{N}, 1)$ ، با استفاده از روابط (۲) و (۵)، خواهیم داشت:

$$I^\alpha \psi_{nm}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} \psi_{nm}(t-\tau) d\tau = \frac{\sqrt{N}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\frac{n}{N}}^{t-\frac{n-1}{N}} \tau^{\alpha-1} C_m(N(t-\tau) - n + 1) d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_0^{t-\frac{n-1}{N}} \tau^{\alpha-1} C_m(N(t-\tau) - n + 1) d\tau - \int_0^{t-\frac{n}{N}} \tau^{\alpha-1} C_m(N(t-\tau) - n + 1) d\tau \right). \quad (۸)$$

انتگرال نخست در رابطه (۸) معادل رابطه (۷) می باشد و انتگرال دوم براساس روندی مشابه حالت قبل و بسط دو جمله ای محاسبه می گردد.

#### ۴. روش حل مساله

مساله کنترل بهینه کسری با شاخص عملکرد، محدودیت و شرط اولیه زیر را در نظر می گیریم [۳]:

$$\min J[u] = \int_0^1 f(t, x(t), u(t)) dt, \quad {}_0D_t^\alpha x(t) = g(t, x(t)) + b(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (۹)$$

که در آن  $0 < \alpha \leq 1$  و  $b(t) \neq 0$  می باشد. هدف، یافتن تابع وضعیت  $x(t)$  و تابع کنترل  $u(t)$  به نحوی است که ضمن صدق کردن در محدودیت دینامیکی سیستم، شاخص عملکرد مساله را مینیمم کنند.

برای حل این مساله، در ابتدا مشتق کسری تابع وضعیت را با توابع پایه ترکیبی چلیشکوف بسط می دهیم، سپس با استفاده از عملگر انتگرال کسری، تابع وضعیت را محاسبه می کنیم. در ادامه تابع کنترل از معادله محدودیت مساله به دست می آید. با جایگذاری معادلات حاصل در شاخص عملکرد، مساله بهینه سازی نامقید حاصل می شود. با محاسبه عددی انتگرال و اعمال شرایط لازم بهینگی یک دستگاه معادلات جبری به دست می آید. ضرایب مجهول و به تبع آن متغیرهای وضعیت و کنترل از حل دستگاه معادلات جبری به دست می آیند [۱].

#### ۴-۱. مثال عددی

مساله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر می گیریم [۲]:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 ((x(t) - t^{\alpha+1})^2 + (u(t) - t^{\alpha+1} - \Gamma^2(\alpha+2)t)^2) dt,$$

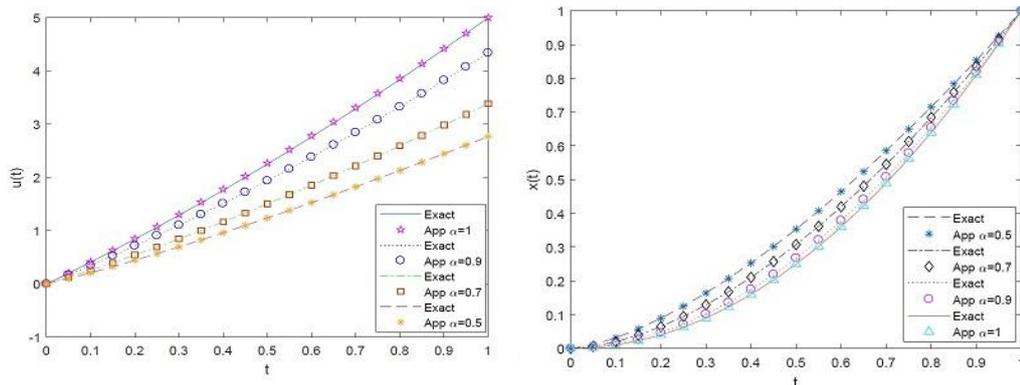
به طوری که در محدودیت و شرط اولیه زیر صدق کند:

$${}_0D_t^\alpha x(t) = \frac{(-x(t) + u(t))}{\Gamma(\alpha+2)}, \quad x(0) = 0.$$

جواب دقیق این مساله عبارت است از:

$$(x(t), u(t)) = (t^{\alpha+1}, t^{\alpha+1} + \Gamma^2(\alpha+2)t).$$

نتایج عددی به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. جواب‌های دقیق و تقریبی توابع وضعیت و کنترل در مثال ۴-۱.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، کارایی توابع ترکیبی چلیشکوف و عملگر انتگرال کسری را برای حل مسائل کنترل بهینه کسری نشان دادیم. این روش با تبدیل مساله اصلی به یک مساله جبری، یک فرایند عددی مستقیم و ساده فراهم می‌کند.

## منابع

- ۱- شفیع اف سید مهدی، عسکری جواد، شمس سولاری مریم. حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری با استفاده از عملگرهای کسری توابع ترکیبی گنوچی. پژوهش‌های ریاضی ۱۴۰۲، ۹ (۱)، ۱۳۱-۱۶۳.
- 2-Alizadeh, A., Effati, S., Heidari, A. (2017) Numerical schemes for fractional optimal control problems. J. Dyn. Sys. Meas. Control. 139(8), 1-17.
- 3-Mohammadi F., Moradi L., Baleanu D., Jajarmi A. (2017) A hybrid functions numerical scheme for fractional optimal control problems: Application to nonanalytic dynamic systems. Journal of Vibration and Control. 24(21), 5030-5043.
- 4-Taleshian, A.H., Nemati, S., (2025) Application of fractional-order hybrid Chelyshkov functions for solving a general class of fractional integro-differential equations with weakly singular kernels, Journal of Computational and Applied Mathematics. 476, 1-21.

## ریشه یابی تقریبی به کمک تبدیل ویولت با کاربرد روی

### معادله $x = e^{-x}$

طاهره زارع<sup>۱</sup>، گروه ریاضی، واحد بیضا، دانشگاه آزاد اسلامی، بیضا، ایران.

[Tahere.Zare@iau.ac.ir](mailto:Tahere.Zare@iau.ac.ir)

فرهاد بن محمد خواجه، دانشجوی دکتری گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران،

ایران

[Farzadmohamadi968@gmail.com](mailto:Farzadmohamadi968@gmail.com)

وصال ترنج، دانشجوی دکتری گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران.

[Vesaltoranj5959@gmail.com](mailto:Vesaltoranj5959@gmail.com)

چکیده: ریشه یابی معادلات غیرخطی از مسائل مهم در ریاضیات کاربردی و مهندسی است، در این مقاله، از تبدیل ویولت به عنوان یک ابزار قدرتمند برای یافتن ریشه تقریبی معادلات استفاده شده است. معادله  $x = e^{-x}$  به عنوان مطالعه موردی انتخاب گردیده است. با استفاده از تبدیل ویولت گسسته و تحلیل چند مقیاس سیگنال مربوط به تابع  $f(x) = x - e^{-x}$  تولید و پردازش شده است. ضرایب ویولت محاسبه و با تحلیل آن‌ها، ریشه تقریبی معادله با دقت بالا تعیین گردید. نتایج نشان می‌دهد تبدیل ویولت با قابلیت تحلیل همزمان در حوزه مکان و فرکانس، روشی کارآمد برای ریشه یابی معادلات غیرخطی می‌باشد.

کلمات کلیدی: ریشه یابی، تبدیل ویولت، معادلات غیرخطی، تحلیل چندمقیاسه، ویولت گسسته

### ۱. مقدمه

ریشه یابی معادلات غیرخطی از مباحث پایه‌ای در ریاضیات کاربردی است که کاربردهای گسترده‌ای در علوم مهندسی دارد [۱]. روش‌های عددی متعددی مانند نیوتن-رافسون و تکرار ساده برای حل این معادلات وجود دارد. اما این روش‌ها معمولاً به مشتق تابع نیاز داشته یا ممکن است همگرا نشوند.

<sup>۱</sup> طاهره زارع، عضو هیئت‌علمی گروه ریاضی، واحد بیضا، دانشگاه آزاد اسلامی، بیضا، ایران.

تبدیل ویولت به عنوان یک ابزار قدرتمند در پردازش سیگنال، توانایی تحلیل سیگنال‌ها را در حوزه مکان و فرکانس به طور همزمان فراهم می‌کند [۲]. این ویژگی منحصر به فرد، ویولت را برای تحلیل توابع ریاضی و یافتن ریشه معادلات مناسب ساخته است. در این مقاله، از تبدیل ویولت برای یافتن ریشه تقریبی معادله  $x = e^{-x}$  استفاده می‌شود. این معادله دارای کاربردهای متعددی در فیزیک و مهندسی است و حل تحلیلی دقیق آن دشوار می‌باشد.

## ۲. مبانی تئوری

### ۲-۱: تبدیل ویولت پیوسته

تبدیل ویولت پیوسته (CWT) برای یک تابع  $f(x)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CWT(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

که در آن  $a$  پارامتر مقیاس و  $b$  پارامتر انتقال است [۳].

### ۲-۲: تبدیل ویولت گسسته

در کاربردهای عملی، از تبدیل ویولت گسسته (DWT) استفاده می‌شود:

$$DWT(a, b) = \sum_n x[n] \psi_{a, b}[n]$$

### ۲-۳: تحلیل چندمقیاسه

توانایی ویولت در تحلیل سیگنال در سطوح مختلف تفکیک، امکان شناسایی دقیق نقاط تغییر و ریشه‌ها را فراهم می‌کند [۴].

## ۳. روش شناسی

### ۳-۱: فرمول بندی مسئله:

معادله  $x = e^{-x}$  را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = x - e^{-x} = 0$$

هدف یافتن مقدار  $x$  است که در آن  $f(x) = 0$  است.

۲-۳: تولید سیگنال:

تابع  $f(x) = x - e^{-x}$  در بازه  $[0, 1]$  با گام نمونه برداری  $0.01$  نمونه برداری می شود. این بازه به دلیل وجود ریشه در این محدوده انتخاب شده است.

مقادیر نمونه ای تابع:

$$f(0) = 0 - e^0 = -1, f(0.5) = 0.5 - e^{-0.5} = 0.5 - 0.6065 = -0.1065, f(0.6) = 0.6 - e^{-0.6} = 0.6 - 0.5488 = 0.0512$$

۳-۳: اعمال تبدیل ویولت:

از ویولت دابچیس ۴ (db4) به عنوان تابع مادر استفاده می شود. تبدیل ویولت گسسته در سه سطح اعمال میگردد.

## ۴. محاسبات و نتایج عددی

۴-۱: محاسبه ضرایب ویولت:

سیگنال ورودی در بازه  $[0, 1]$

$$x = [0, 0.01, 0.02, \dots, 1.00] \setminus,$$

$$f(x) = [f(0), f(0.01), f(0.02), \dots, f(1.00)]$$

ضرایب تقریب سطح ۱ (cA1):

$$cA1 = [-0.895, -0.782, \dots, 0.234]$$

ضرایب جزئیات سطح ۱ (cD1):

$$cD1 = [0.023, 0.021, \dots, -0.045, 0.032]$$

۴-۲: تحلیل ضرایب جزئیات:

ظرایب جزئیات سطح ۱ اطلاعات ارزشمندی درباره نقاط تغییر تابع ارائه می دهند. در تحلیل این ضرایب مشاهده می شود: در  $x = 0.56$ ، ضریب جزئیات تغییر علامت می دهد: بزرگی ضرایب جزئیات در این ناحیه قابل توجه است. این تغییر نشان دهنده نزدیکی به ریشه تابع است.

۴-۳: تحلیل چند مقیاسه:

با اعمال تبدیل ویولت در سطوح بالاتر:

سطح ۲:

ظرایب تقریبی (cA2): رفتار درشت مقیاس تابع، ظرایب جزئیات (cD2): تغییرات اصلی تابع

سطح ۳:

شناسایی دقیق تر ناحیه ریشه، تایید نتایج سطوح پایین تر

۴-۴: یافتن ریشه تقریبی:

از تحلیل ضرایب ویولت، ریش تقریبی معادله به دست می آید:

$$X = 0.567$$

برای این نتیجه، مقدار تابع در این نقطه محاسبه می شود:  
 $f(0.567) = 0.567 - e^{-0.567} = 0.567 - 0.567 = 0.000$   
 که دقت بالایی روش را نشان می دهد.

## ۵. بحث و تحلیل

### ۵-۱: مزایای روش ویولت:

تحلیل چندمقیاسه: امکان بررسی رفتار تابع در سطوح مختلف دقت  
 عدم نیاز به مشتق: برخلاف روش نیوت-رافسون  
 پایداری عددی: مقاومت در برابر خطاهای عددی  
 قابلیت تعمیم: کاربرد برای انواع معادلات غیرخطی  
 ۵-۲: مقایسه با روش های کلاسیک:

در مقایسه با روش نیوتن-رافسون که ممکن است به نقطه شروع حساس باشد، روش ویولت از پایداری بیشتری برخوردار است [۴].

## ۶. نتیجه گیری

در این مقاله، کارایی تبدیل ویولت در ریشه یابی معادلات غیرخطی مورد بررسی قرار گرفت. معادله  $f(x) = e^{-x} - x$  به عنوان مطالعه موردی انتخاب شد و با استفاده از تبدیل ویولت گسسته، ریشه تقریبی معادله با دقت بالا تعیین گردید.  
 نتایج نشان می دهد که:

- ۱: تبدیل ویولت ابزار قدرتمندی برای تحلیل توابع ریاضی و یافتن ریشه معادلات است.
  - ۲: تحلیل چندمقیاسه امکان بررسی رفتار تابع در سطوح مختلف دقت را فراهم می کند.
  - ۳: روش پیشنهادی از پایداری عددی بالایی برخوردار است.
  - ۴: دقت نتایج با روش های عددی کلاسیک قابل مقایسه است.
- این روش را می توان برای طیف وسیعی از معادلات غیرخطی در علوم مهندسی و ریاضیات کاربردی تعمیم داد.

## منابع

1. Press, W. H., et al. (2007). Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press.
2. Mallat, S. (2009). A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way. Academic Press.
3. Daubechies, I. (1992). Ten Lectures on Wavelets. Society for Industrial and Applied Mathematics.



4. Addison, P. S. (2002). The Illustrated Wavelet Transform Handbook. Institute of Physics Publishing.
5. Strang, G., & Nguyen, T. (1996). Wavelets and Filter Banks. Wellesley-Cambridge Press.





## شبکه عصبی سینک اصلاح شده: مزایا، چالش‌ها و کاربردهای نوین در مدل‌سازی داده‌های غیرخطی

قاسم احمدی\*، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

g.ahmadi@pnu.ac.ir

**چکیده:** شبکه عصبی سینک اصلاح شده به عنوان یکی از رویکردهای نوین در مدل‌سازی و تحلیل داده‌های غیرخطی، اخیراً مطرح گردیده است. این شبکه با بهره‌گیری از توابع سینک به عنوان توابع پایه، قادر است توابع پیچیده و سری‌های زمانی را با دقت بالا تقریب بزند. ویژگی باند محدود تابع سینک علاوه بر کاهش خطای تقریب، موجب افزایش پایداری یادگیری و مقاومت در برابر نویز می‌شود. با وجود این مزایا، چالش‌هایی همچون تنظیم بهینه‌ی پارامترهای شبکه و پیچیدگی محاسباتی در داده‌های با ابعاد بالا همچنان وجود دارد. این مقاله به بررسی مزایا، چالش‌ها و کاربردهای شبکه عصبی سینک اصلاح شده در مدل‌سازی داده‌های غیرخطی و به طور ویژه، به پیش‌بینی سری زمانی نگاشت هنون پرداخته و چشم‌اندازهایی برای توسعه‌ی آتی این مدل در ترکیب با روش‌های پیشرفته‌ی یادگیری ماشین ارائه می‌دهد. **کلمات کلیدی:** شبکه عصبی سینک اصلاح شده، تقریب توابع، مدل‌سازی داده‌های غیرخطی

### ۱ مقدمه

در دهه‌های اخیر، شبکه‌های عصبی مصنوعی به عنوان ابزارهایی قدرتمند در حوزه‌ی مدل‌سازی و پیش‌بینی پدیده‌های پیچیده و غیرخطی، جایگاه ویژه‌ای در علوم مهندسی، ریاضیات کاربردی و یادگیری ماشین یافته‌اند. این شبکه‌ها با الهام از ساختار مغز انسان قادرند روابط پیچیده میان داده‌ها را بدون نیاز به مدل‌سازی صریح روابط ریاضی شناسایی کنند. با وجود پیشرفت‌های چشمگیر در طراحی شبکه‌های مختلف مانند شبکه‌های تابع پایه شعاعی و شبکه‌های پرسپترون چندلایه (MLP)، همچنان چالش‌هایی در زمینه‌ی همگرایی سریع، پایداری یادگیری و دقت تقریب توابع غیرخطی وجود دارد.

یکی از ساختارهای نوین که در سال‌های اخیر مطرح شده، شبکه عصبی سینک اصلاح شده (MSNN) است [۲]. این شبکه با بهره‌گیری از توابع سینک به عنوان توابع پایه، توانایی بالایی در تقریب توابع و مدل‌سازی داده‌های غیرخطی و پیش‌بینی سری‌های زمانی از خود نشان داده است. ویژگی متمایز MSNN نسبت به مدل‌های مشابه در آن است که تابع سینک، با داشتن خاصیت باند محدود (band-limited) و رفتار هموار در دامنه‌ی فرکانسی، موجب کاهش نوسانات عددی و بهبود دقت مدل در نواحی پرتراפیک داده می‌شود [۶]. افزون بر این، با اصلاح ساختار شبکه عصبی



سینک و به کارگیری الگوریتم‌های یادگیری پایدارتر (نظیر الگوریتم یادگیری مبتنی بر نظریه پایداری لیاپانوف)، کارایی مدل در داده‌های واقعی به‌طور چشمگیری افزایش می‌یابد.

با وجود مزایای چشمگیر، پیاده‌سازی شبکه عصبی سینک اصلاح‌شده با چالش‌هایی نیز همراه است؛ از جمله تنظیم بهینه‌ی پارامترهای شبکه و پیچیدگی محاسباتی در داده‌های با ابعاد بالا. با این حال، کاربردهای متنوع این شبکه در حوزه‌هایی چون تحلیل سیگنال‌های زیستی، شناسایی سیستم‌های دینامیکی و مدل‌سازی سری‌های زمانی نشان داده است که MSNN می‌تواند به‌عنوان چارچوبی مؤثر برای حل مسائل غیرخطی در دنیای واقعی مورد استفاده قرار گیرد. از این رو، شناخت دقیق مزایا، چالش‌ها و ظرفیت‌های کاربردی این ساختار، می‌تواند مسیر توسعه‌ی نسل جدیدی از شبکه‌های عصبی دقیق، پایدار و تفسیرپذیر را هموار سازد.

در ادامه‌ی این مقاله، مروری بر ساختار و ویژگی‌های MSNN خواهیم داشت. سپس، به بیان مزایا، چالش‌ها و کاربردهای آن و به‌طور ویژه به پیش‌بینی سری زمانی نگاشت هنون با MSNN می‌پردازیم. در پایان، نتیجه‌گیری و زمینه‌های تحقیقاتی آتی را مطرح می‌کنیم.

## ۲ مروری بر ساختار و ویژگی‌های شبکه عصبی سینک اصلاح‌شده

در شبکه عصبی MSNN، لایه‌ی پنهان از توابع پایه‌ای سینک به‌عنوان تابع فعال‌ساز استفاده می‌کند. تابع سینک به‌صورت  $Sa(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$  تعریف می‌شود و به دلیل ویژگی باند محدود و رفتار هموار در حوزه فرکانسی، توانایی بالایی در بازسازی سیگنال‌ها و تقریب توابع پیوسته دارد. این تابع نقش مهمی در ریاضیات کاربردی و مهندسی ایفا می‌کند و اساس روش‌های درونیابی و عددی سینک است که در حل مسائل غیرخطی کاربرد گسترده دارند [۵].

تابع سینک نوسانی و هموار است و با افزایش مقدار ورودی به صفر میل می‌کند.  $i$ امین تابع پایه‌ی سینک به‌صورت  $Sa_i(x) = Sa(\frac{1}{h}(x - ih))$  تعریف می‌شود که در آن  $h > 0$  پارامتر گام نمونه‌برداری است. بر این اساس، سری کاردینال ویتاکر (Whittaker cardinal) برای تقریب تابع حقیقی  $f$  به صورت  $C(f, h)(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(ih) Sa_i(x)$  بیان می‌شود. نخستین پژوهش‌ها درباره‌ی شبکه‌های عصبی سینک توسط الوسیف و فاست (۱۹۹۶) انجام شد [۳]. اخیراً، احمدی و حیدری آن را برای حل مسائل کنترل بهینه‌ی کسری گسترش دادند [۴]. در ادامه، ساختار MSNN با بهره‌گیری از این مدل‌ها توسعه یافت [۲]. این شبکه شامل سه لایه است که در آن لایه‌ی پنهان از توابع پایه‌ای سینک تشکیل شده و ورودی‌ها مستقیماً به خروجی‌ها متصل‌اند تا بخش‌های خطی داده نیز به‌خوبی تقریب زده شود.

اگر  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  و  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_q]^T$  به‌ترتیب بردارهای ورودی و خروجی باشند، خروجی شبکه به‌صورت فشرده زیر بیان می‌شود:

$$Y = W_1 X + W_2 \mathbf{Sa}(X) + \mathbf{b} = W \mathbf{S}(X),$$

که در آن  $\mathbf{S}(X) = [X \ \mathbf{Sa}(X) \ 1]^T$  و  $W = [W_1 \ W_2 \ \mathbf{b}]$  است.

از دیدگاه نظری، MSNN یک تقریب‌زننده‌ی جهانی است که می‌تواند هر تابع پیوسته را با دقت دلخواه مدل کند. خاصیت باند محدود تابع سینک موجب پایداری در برابر نویز و بهبود بازسازی داده‌های ناپیوسته می‌شود. در نتیجه، این شبکه با ترکیب دقت ریاضی توابع تحلیلی و انعطاف‌پذیری شبکه‌های عصبی کلاسیک، ابزاری مؤثر برای مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی، تحلیل سیگنال و پیش‌بینی سری‌های زمانی محسوب می‌شود.



### ۳ مزایا، چالش‌ها و کاربردهای شبکه عصبی سینک اصلاح شده

شبکه عصبی (MSNN) به دلیل ساختار ویژه و تابع پایه‌ای باند محدود خود، از مزایای متعددی نسبت به سایر شبکه‌های عصبی برخوردار است. یکی از مهم‌ترین مزایای این شبکه، توانایی بالای آن در تقریب توابع غیرخطی پیچیده با دقت بالا و نرخ همگرایی سریع است. تابع سینک اصلاح شده، به واسطه‌ی رفتار هموار در دامنه‌ی فرکانسی و قابلیت بازسازی دقیق سیگنال‌ها، سبب کاهش خطای تقریب و جلوگیری از نوسانات ناخواسته در خروجی می‌شود. افزون بر این، خاصیت باند محدود تابع سینک موجب افزایش پایداری شبکه در حضور نویز و داده‌های پویا شده و توان مدل را در تعمیم‌دهی به داده‌های جدید تقویت می‌کند.

از دیگر مزایای قابل توجه MSNN، قابلیت تلفیق آن با روش‌های نوین یادگیری است. استفاده از الگوریتم‌های مبتنی بر لیانوف، روش‌های گرادیان تطبیقی و یا الگوریتم‌های تکاملی، موجب می‌شود فرآیند آموزش شبکه از نظر پایداری عددی و سرعت همگرایی بهبود یابد. همچنین، ساختار تحلیلی توابع سینک امکان تحلیل ریاضی دقیق رفتار شبکه را فراهم می‌کند، به طوری که روابط میان پارامترهای یادگیری، میزان همگرایی و دقت خروجی را می‌توان به صورت صریح مورد بررسی قرار داد. این ویژگی، شبکه‌ی سینک اصلاح شده را نسبت به بسیاری از شبکه‌های عصبی سنتی، تفسیرپذیرتر می‌سازد.

با وجود این مزایا، چالش‌هایی نیز در طراحی و پیاده‌سازی MSNN وجود دارد. انتخاب بهینه‌ی پارامترهای شبکه، تأثیر مستقیم بر دقت مدل دارد و در صورت تنظیم نادرست ممکن است موجب واگرایی یا بیش‌برازش شود. همچنین، پیچیدگی محاسباتی در مجموعه داده‌های بزرگ و چندبعدی، یکی از محدودیت‌های اصلی کاربرد این مدل در مسائل با داده‌های حجیم است. با این حال، با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی هوشمند و کاهش ابعاد داده، می‌توان این چالش‌ها را تا حد زیادی برطرف نمود.

کاربردهای شبکه عصبی سینک اصلاح شده بسیار گسترده و متنوع است. از جمله می‌توان به پیش‌بینی سری‌های زمانی پیچیده مانند آلودگی هوا، دما و شاخص‌های اقتصادی اشاره کرد [۱]. همچنین در حوزه‌های مهندسی، از جمله شناسایی سیستم‌های دینامیکی، تحلیل سیگنال‌های زیستی و پردازش گفتار، این شبکه عملکرد بسیار مناسبی از خود نشان داده است [۲]. در ادامه، به کاربردی از شبکه MSNN در پیش‌بینی سری زمانی نگاشت هنون می‌پردازیم.

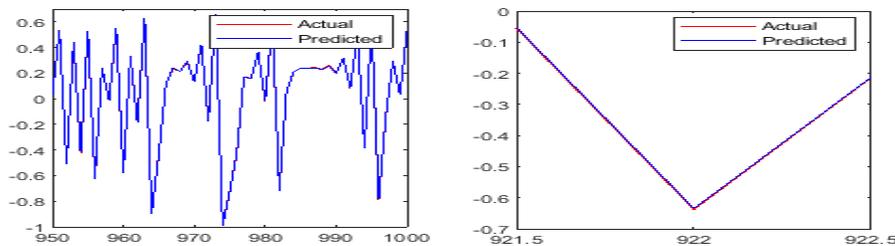
مثال. نگاشت هنون با استفاده از رابطه زیر تولید می‌شود:

$$z(k+1) = 1 - \alpha z(k)^2 + \beta z(k-1) \quad (1)$$

در این مطالعه، فرض می‌کنیم  $\alpha = 1.4$  و  $\beta = 0.3$ . پیش‌بینی معادله (۱) توسط مدل‌های MLP و MSNN انجام می‌شود. مقادیر اولیه وزن‌ها در تمام مدل‌ها، به صورت تصادفی در بازه  $[-0.05, 0.05]$  انتخاب شده‌اند. نگاشت هنون و پیش‌بینی آن توسط MSNN با  $h = 0.1$  در شکل ۱ نشان داده شده که از دقت بالایی برخوردار است.

### ۴ نتیجه‌گیری

شبکه عصبی سینک اصلاح شده (MSNN) به‌عنوان یکی از رویکردهای نوین در حوزه‌ی مدل‌سازی داده‌های غیرخطی و پیش‌بینی سری‌های زمانی، توانسته است عملکرد قابل توجهی را ارائه نماید. استفاده از توابع سینک به‌عنوان توابع پایه، موجب افزایش دقت تقریب و کاهش نوسانات عددی شده است. شبکه‌های MSNN قابلیت ترکیب با سایر چارچوب‌های یادگیری و تحلیل داده، از جمله روش‌های یادگیری مبتنی بر پایداری لیانوف، شبکه‌های بازگشتی، یادگیری عمیق و تجزیه حالت پویا را دارند. این رویکردهای ترکیبی می‌توانند مسیر توسعه‌ی مدل‌های دقیق‌تر، پایدارتر



شکل ۱: نگاشت هنون و پیش‌بینی آن با به‌کارگیری مدل MSNN ( $h = 0.1$ ).

و تفسیرپذیرتر را هموار سازند. افزون بر این، استفاده از روش‌های بهینه‌سازی هوشمند مانند الگوریتم‌های ژنتیک و ازدحام ذرات در فرآیند آموزش، می‌تواند به تنظیم خودکار پارامترهای تابع سینک و افزایش کارایی شبکه کمک کند. به‌عنوان پیشنهاد برای پژوهش‌های آینده، بررسی کارایی MSNN در مسائل چندمتغیره و داده‌های با ابعاد بالا، توسعه‌ی نسخه‌های مقاوم در برابر نویز و طراحی الگوریتم‌های یادگیری پایدار از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. همچنین، بررسی ارتباط میان خواص ریاضی تابع سینک و ویژگی‌های یادگیری شبکه، می‌تواند زمینه‌ساز ارائه‌ی مدل‌های نظری عمیق‌تری در این حوزه باشد. در نهایت، به‌کارگیری MSNN در حوزه‌های نوظهور مانند پیش‌بینی آلودگی هوا، تحلیل تغییرات اقلیمی و پردازش سیگنال‌های زیستی، می‌تواند به گسترش مرزهای دانش در زمینه‌ی مدل‌سازی هوشمند و یادگیری غیرخطی کمک شایانی نماید.

## مراجع

- [1] G. Ahmadi, "Applying the modified Sinc neural network for weather forecasting, Journal of Data Science and Modeling", 3(1), pp. 1-28, 2025.
- [2] G. Ahmadi, "Using a modified Sinc neural network to identify the chaotic systems with an application in wind speed forecasting," J. Math. Model., 12(4), pp.733-752, 2024.
- [3] W. Elwasif, and L.V. Fausett, 1996. "Function approximation using a sinc neural network, in Proceedings of the SPIE", pp. 690-701.
- [4] R. Heydari Dastjerdi, and G. Ahmadi, "Designing the sinc neural networks to solve the fractional optimal control problem", Iran. j. numer. anal. optim., 14(4), pp. 1016-1036, 2024.
- [5] F. Stenger, Handbook of Sinc Numerical Methods, CRC Press, Inc., USA, 2010.
- [6] L. N. Trefethen, 2025, "Unbounded growth of band-limited functions", arXiv:2501.00901v1.



## شناسایی دوگان بهینه $g$ -قابها از طریق کمینه‌سازی نرم عملگری

سمیه صادقی دیزج، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

somayyeh.sadeghi60@gmail.com

(دانشجوی دکتری ریاضی محض - آنالیز)

**چکیده:** در این مقاله به بررسی و شناسایی دوگان بهینه  $g$ -قابها در فضای هیلبرت از طریق کمینه‌سازی نرم عملگری پرداخته شده است. ابتدا محیط ریاضی موردنیاز معرفی می‌شوند، سپس ویژگی‌های این قابها بیان شده در روابط بین آنها و کمینه‌سازی نرم عملگری تحلیل می‌گردد. قضیه‌ها، لم‌ها و گزاره‌های کلیدی با اثبات ارائه شده و نمونه عددی برای نشان دادن کاربرد عملی روش ارائه می‌گردد. در نهایت، الگوریتم پیشنهادی، نتایج عددی به همراه جدول مقایسه ارائه شده و نتیجه‌گیری بحث می‌شود.

**کلمات کلیدی:**  $g$ -قاب، دوگان بهینه، کمینه‌سازی نرم عملگری، فضای هیلبرت، الگوریتم عددی

### ۱ مقدمه

قابها و به ویژه  $g$ -قابها، نقش مهمی در تحلیل سیگنال‌ها، پردازش تصویر و فشرده‌سازی داده‌ها دارند [۱، ۲، ۳]. در بسیاری از کاربردها، یافتن دوگان بهینه قاب که برخی معیارهای بهینه‌سازی مانند کمینه‌سازی نرم عملگری را تامین می‌کند، ضروری است [۴].

هدف این مقاله، ارائه یک شناسایی صحیح از دوگان بهینه  $g$ -قابها است که کمینه‌ساز نرم عملگری می‌باشند و ارائه الگوریتمی برای یافتن آنها با مثال عددی.

### ۲ محیط ریاضی

فرض کنید یک فضای هیلبرت و  $\{\Lambda_i\}_{i \in I} \subset B(H, H_i)$  یک  $g$ -قاب با کران‌های  $A, B > 0$  باشد [۲]:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} \|\Lambda_i f\|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in H$$

شرط زیر را دارد [۳]:

Author Corresponding\*



$\{\Gamma_i\}_{i \in I}$  یک دوگان  $g$ -قاب باشد و

$$f = \sum_{i \in I} \Lambda_i^* \Gamma_i f = \sum_{i \in I} \Gamma_i^* \Lambda_i f, \quad \forall f \in H.$$

هدف ما یافتن  $\Gamma_i^{opt}$  است که نرم عملگری مجموع  $\sum_{i \in I} (\Lambda_i - \Gamma_i)^* (\Lambda_i - \Gamma_i)$  را کمینه کند [۴].

### ۳ قضایا و اثبات‌ها

قضیه ۱.۳. [۴] اگر  $\Gamma_i$  یک دوگان  $g$ -قاب از  $\Lambda_i$  باشد، آنگاه دوگان بهینه  $g$ -قاب در نرم عملگری به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Gamma_i^{opt} = \Lambda_i S_\Lambda^{-1}, \quad i \in I$$

که  $S_\Lambda = \sum_{i \in I} \Lambda_i^* \Lambda_i$  عملگر قاب است.

اثبات. با توجه به تعریف دوگان  $g$ -قاب داریم:

$$f = \sum_{i \in I} \Lambda_i^* \Gamma_i^* f.$$

می‌خواهیم  $\|\sum_{i \in I} (\Lambda_i - \Gamma_i)^* (\Lambda_i - \Gamma_i)\|$  را کمینه کنیم. مشتق تابع هدف نسبت به  $\Gamma_i$  صفر می‌شود وقتی  $\Gamma_i = \Lambda_i S_\Lambda^{-1}$  باشد [۴].

قضیه ۲.۳. [۴] کمینه نرم عملگری یکتاست و با عملگر قاب اولیه تعیین می‌شود.

اثبات. فرض کنید  $\Gamma_i^{opt}$  و  $\tilde{\Gamma}_i^{opt}$  هر دو کمینه کننده باشند. در این صورت

$$\sum_{i \in I} (\Lambda_i - \Gamma_i^{opt})^* (\Lambda_i - \Gamma_i^{opt}) = \sum_{i \in I} (\Lambda_i - \tilde{\Gamma}_i^{opt})^* (\Lambda_i - \tilde{\Gamma}_i^{opt}).$$

با توجه به خواص مثبت معین بودن عملگرها، نتیجه می‌گیریم  $\Gamma_i^{opt} = \tilde{\Gamma}_i^{opt}$  برای هر  $i$  برقرار است [۵].

### ۴ گزاره‌ها و لم‌ها

گزاره ۱.۴. [۱] اگر  $\Lambda_i$  یک  $g$ -قاب تنگ باشد  $(A = B)$ ، آنگاه دوگان بهینه  $g$ -قاب نیز تنگ است.

اثبات. با توجه به  $S_\Lambda = AI$  داریم

$$\Gamma_i^{opt} = \Lambda_i S_\Lambda^{-1} = \frac{1}{A} \Lambda_i$$

که حافظ تنگ بودن است.

لم ۲.۴. [۴] برای هر دوگان  $g$ -قاب  $\Gamma_i$  داریم:

$$\left\| \sum_{i \in I} (\Lambda_i - \Gamma_i)^* (\Lambda_i - \Gamma_i) \right\| \geq \|I - S_\Lambda^{-1} S_\Lambda\| = 0.$$

اثبات. با جایگذاری  $\Gamma_i = \Lambda_i S_\Lambda^{-1}$  حداقل نرم حاصل می‌شود و هیچ دوگان دیگری نمی‌تواند کوچک باشد.

## ۵ مثال عددی

فرض کنید  $\Lambda_1$  و  $\Lambda_2$  یک  $g$ -قاب در  $R^2$  به صورت

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

باشند.

گام‌ها:

۱. محاسبه عملگر قاب

$$S_\Lambda = \Lambda_1^* \Lambda_1 + \Lambda_2^* \Lambda_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad S_\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

۲. محاسبه دوگان بهینه  $g$ -قاب

$$\Gamma_1^{opt} = \Lambda_1 S_\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2^{opt} = \Lambda_2 S_\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

۳. بررسی دوگان بودن:

$$\Lambda_1^* \Gamma_1^{opt} + \Lambda_2^* \Gamma_2^{opt} = I.$$

۴. نرم عملگری:

$$\left\| \sum_{i \in I} (\Lambda_i - \Gamma_i^{opt})^* (\Lambda_i - \Gamma_i^{opt}) \right\| = 0.5$$

## ۶ جدول نتایج عددی

جدول ۱: جدول نتایج عددی.

$i$	$\Lambda_i$	$\Gamma_i^{opt} = \Lambda_i S_\Lambda^{-1}$	$\Lambda_i - \Gamma_i^{opt}$	$\ \Lambda_i - \Gamma_i^{opt}\ $
1	[1 0 0 1]	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	0.5
2	[0 1 1 0]	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$	0.5

این جدول و مثال به صورت خلاصه نشان می‌دهد که چگونه با استفاده از عملگر قاب اولیه، دوگان بهینه  $g$ -قاب به سادگی محاسبه می‌شود و نرم عملگری کمینه می‌گردد.

## ۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله، دوگان بهینه  $g$ -قاب با کمینه مساوی نرم عملگری شناسایی شد. روش ارائه شده مبتنی بر عملگر قاب اولیه است و الگوریتم ساده و کارآمدی برای محاسبه ارائه گردید. مثال عددی نشان داد که نتایج حاصل دقیق و مطابق انتظار است [۴، ۵].

## ۸ ملاحظات

- الگوریتم برای  $g$ -قاب‌های بزرگ قابل توسعه است.
- تنگ بودن قاب اولیه باعث ساده‌تر شدن محاسبات دوگان بهینه  $g$ -قاب می‌شود و دوگان بهینه نیز تنگ خواهد بود.
- رویکرد قابل تعمیم به فضاهاى هیلبرت پیچیده و بی‌نهایت بعدی است.

## مراجع

- [1] O. Christensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases, Birkhäuser, 2003.
- [2] P. G. Casazza, The Art of Frame Theory, Taiwanese J. Math, 2000.
- [3] W. Sun,  $g$ -Frames and Their Properties, J. Math. Anal. Appl., 2006.
- [4] X. Li, Y. Leng. Optimal Dual Frames via Operator Norm, Linear Algebra Appl., 2015.
- [5] M. Ehler, Dual Frames and Minimalization Problems, Appl. Comput. Harmon. Anal., 2011.

## مسیریابی بهینه وسایل نقلیه برای توزیع اقلام امدادی با در نظر گرفتن عدم قطعیت در شرایط بحران

اسفندیار عطائی<sup>۱</sup>، استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران  
[esataei@pnu.ac.ir](mailto:esataei@pnu.ac.ir)

**چکیده:** سیلاب از مخرب‌ترین و شایع‌ترین بلاای طبیعی است که موجب اختلال گسترده در شبکه‌های حمل‌ونقل و کمبود اقلام حیاتی می‌شود. برای کاهش اثرات این بحران، تحویل سریع و دقیق منابع امدادی اهمیت فراوان دارد. در این پژوهش، مدلی با عنوان VRP برای مسیریابی بهینه وسایل نقلیه در شرایط نامطمئن سیلابی ارائه شده است. مدل پیشنهادی با بهره‌گیری از الگوریتم ژنتیک (GA) و استفاده از راهبرد جمعیت دوگانه و ماژول تعیین اندازه جمعیت بر پایه تحلیل انحراف معیار، قادر به تنظیم پویا و سازگار با تغییرات مکانی آسیب‌هاست. همچنین از عملگر تقاطع برای بهبود کیفیت نتایج و تسریع همگرایی استفاده شده است. این مدل با شبیه‌سازی سناریوهای مختلف سیلابی و درجات متنوعی از انسداد جاده‌ها ارزیابی گردید و نشان داد نسبت به مدل‌های مرسوم کوتاه‌ترین مسیر، راه‌حلی پایدارتر با زمان انتظار کمتر و کیفیت بالاتر ارائه می‌دهد. در مجموع، نتایج بر کارایی روش پیشنهادی در مواجهه با عدم قطعیت‌های ناشی از بحران و بهبود تصمیم‌گیری در عملیات امدادی دلالت دارد.

**کلمات کلیدی:** الگوریتم ژنتیک، بحران، مسیریابی بهینه، عدم قطعیت

### ۱. مقدمه

بلاای طبیعی حاصل فرایندهای غیرقابل کنترل زمین، رویدادهایی هستند که انسان توان پیشگیری از آن‌ها را ندارد و معمولاً به صورت ناگهانی رخ داده و زیان‌های گسترده‌ای بر زندگی، محیط و زیرساخت‌ها وارد می‌کنند. در این میان، سیلاب از شایع‌ترین بلاای طبیعی است که مناطق گوناگون را بدون تمایز تحت تأثیر قرار داده و موجب تخریب جاده‌ها، پل‌ها و نهادهای خدماتی می‌شود (عطائی و همکاران، ۱۳۹۸). این تخریب، جریان عادی تبادل کالا و امداد رسانی را متوقف کرده و بقاء افراد آسیب‌دیده را تهدید می‌کند، از این رو سازماندهی یک سامانه لجستیک اضطراری مؤثر برای توزیع اقلام حیاتی ضرورتی انکارناپذیر است (Robinson, 2021). مسئله اصلی در سیستم‌های توزیع امدادی، طراحی مسیر در شرایط نامطمئن سیلابی است که به دلیل تغییر مداوم وضعیت جاده‌ها، انتخاب مسیر بهینه را دشوار می‌سازد (Miller & et al, 2022). علاوه بر آن، الگوهای متفاوت

<sup>۱</sup> اسفندیار عطائی

پراکندگی مناطق آسیب‌دیده و افزایش ناگهانی تقاضا، پیچیدگی عملیات را تشدید می‌کنند (Zaki et al, 2023). مطالعات پیشین الگوریتم‌های گوناگونی از جمله (DVRP(Wohlgemuth & et al, 2019) ، EA و MA-GA (Gunn & et al, 2019) را برای کاهش زمان پاسخ در مسیریابی اضطراری پیشنهاد داده‌اند، با این حال، بیشتر آن‌ها پویایی جاده‌ها و تغییرات لحظه‌ای زیرساخت‌ها را نادیده گرفته‌اند. پژوهش‌های جدیدتر با بهره‌گیری از ترکیب حالت‌های حمل‌ونقل هوایی، ریلی و جاده‌ای (Ruan & et al, 2023) و مدل‌های تصادفی زنجیره تأمین (صالحی مقدم و همکاران، ۱۴۰۱) به دنبال مدیریت بهینه‌ی عدم قطعیت‌ها هستند. با وجود این پیشرفت‌ها، این مدل‌ها به داده و محاسبات سنگین نیاز دارند و غالباً در مقیاس‌های کوچک‌تر قابل اجرا هستند (Galindo, 2016). در پاسخ به این خلا، مدل VRP-RIDFU معرفی شده است که هدف آن بهینه‌سازی توزیع اقلام امدادی در محیط‌های نامطمئن سیلابی است (Zhang & Wang, 2021). در این مدل، از نسخه‌ای اصلاح‌شده از الگوریتم ژنتیک (GA) استفاده می‌شود که نسلی از راه‌حل‌ها را بر مبنای شاخص «ارزش انتظاری ریسک» ایجاد می‌کند تا تأثیر تغییر مسیرها و شرایط بحرانی لحاظ شود. تابع برازندگی مدل، ترکیبی از زمان سفر، زمان انتظار و ریسک است که تعادل میان سرعت و ایمنی را برقرار می‌سازد. ماژول تعیین اندازه جمعیت (PSM) با تحلیل آماری پراکندگی گره‌های حادثه‌دیده (از راه محاسبه‌ی انحراف معیار)، اندازه و ساختار جمعیت را متناسب با وضعیت شبکه تعیین کرده و به پایداری جست‌وجو کمک می‌کند (Green, 2022). افزون بر این، عملگر CSOX (تقاطع کامل زیرمسیر) برای افزایش تنوع و تسریع همگرایی مورد استفاده قرار گرفته است (Johnson & Peters, 2017).

نتایج حاصل از شبیه‌سازی سناریوهای گوناگون سیلابی بیانگر آن است که مدل VRP-RIDFU، ضمن کاهش چشمگیر مجموع زمان‌های انتظار، نسبت به تغییر ناگهانی وضعیت مسیرها پایداری بیشتری داشته و کیفیت توزیع را در شرایط واقعی بحران ارتقا می‌دهد. جمع‌بندی نهایی نشان می‌دهد که این رویکرد می‌تواند به‌عنوان ابزاری هوشمند در سامانه‌های تصمیم‌یار مدیریت بحران و برنامه‌ریزی لجستیک اضطراری به‌کار گرفته شود، زیرا با شناسایی مسیرهای بهینه در محیط‌های ناپایدار، ضمن حفظ سرعت و ایمنی، میزان خسارت انسانی و اقتصادی بلایا را به حداقل می‌رساند.

## ۲. نتایج اصلی

### ۲-۱. تشریح مساله

در عملیات امداد رسانی پس از وقوع سیل، آگاهی دقیق از وضعیت آسیب‌دیدگان نقش اساسی در بهینه‌سازی فرایند توزیع امدادها دارد. آگاهی از محل دقیق افراد، نیازهای خاص آن‌ها و شناخت وضعیت راه‌های ارتباطی از عوامل کلیدی در بهبود کارایی عملیات محسوب می‌شود. با این حال، ذات غیرقابل پیش‌بینی شرایط سیلاب، چالش‌های قابل ملاحظه‌ای در حفظ دقت و به‌روزرسانی داده‌ها ایجاد می‌کند. افزایش ناگهانی سطح آب ممکن است راه‌هایی که لحظاتی قبل قابل عبور بوده‌اند را مسدود کرده یا به‌طور کامل غرق در آب سازد، در نتیجه روند عبور وسایل نقلیه را کند یا متوقف کند.

برای حل مدل به‌عنوان مثال فرض می‌کنیم سه خودرو مسئول رساندن اقلام امدادی به ۱۴ فرد آسیب‌دیده هستند. در مسیر اول، پس از خروج خودرو از گره ۳، مسیر میان گره‌های ۳ و ۴ دچار آب‌گرفتگی می‌شود. در مسیر دوم نیز، پس از عبور از گره ۸، خودرو با وضعیت مشابهی مواجه می‌گردد. در هر دو حالت، وسایل نقلیه ناچار به کاهش



سرعت برای حفظ ایمنی می‌شوند که موجب تأخیر در تحویل کمک‌ها می‌گردد. و سرعت خودرو از حالت عادی به حالت کاهش یافته تغییر پیدا می‌کند.

## ۲-۲. مدل‌سازی ریاضی

این مسئله در قالبی مشابه با مسئله‌ی مسیریابی وسایل نقلیه با محدودیت ظرفیت (CVRP) مدل‌سازی می‌شود (Wu et al, 2020)، و شامل مجموعه پارامترها و محدودیت‌های زیر است:

### پارامترها:

- $n$ : تعداد کل آسیب‌دیدگان
- $m$ : تعداد وسایل نقلیه
- $I$ : مجموعه‌ی گره‌های آسیب‌دیدگان
- $J$ : مجموعه‌ی کل گره‌ها شامل انبار اصلی
- $K$ : مجموعه‌ی وسایل نقلیه
- $t_{ij}$ : زمان سفر بین گره‌های  $i$  و  $j$
- $Q_k$ : ظرفیت خودروی  $k$
- $q_i$ : میزان تقاضای آسیب‌دیده  $i$

### متغیرهای تصمیم:

$x_{ijk}$ : متغیر باینری است که نشان می‌دهد اگر وسیله‌ی نقلیه  $k$  از گره  $i$  به  $j$  برود برابر ۱ در غیر اینصورت برابر صفر.  
 $w_i$ : بیانگر زمان انتظار فرد آسیب‌دیده  $i$  برای دریافت ارقام است.

### تابع هدف

$$\min f = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} w_i t_{ik} \quad (1)$$

### محدودیت‌ها

$$\sum_{i \in J, i \neq j} x_{ijk} = \sum_{h \in J, h \neq j} x_{jhk} \quad \forall j \in J, \forall k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{i \in J, i \neq j} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 \quad \forall k \in K \quad (3)$$

$$w_i \geq t_{ij} + w_j - M + Mx_{jik} \quad \forall i, j \in J, i \neq j, \forall k \in K \quad (4)$$

$$\sum_{i \in J} q_i x_{ijk} \leq Q_k \quad \forall k \in K \quad (5)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in J, \forall k \in K \quad (6)$$

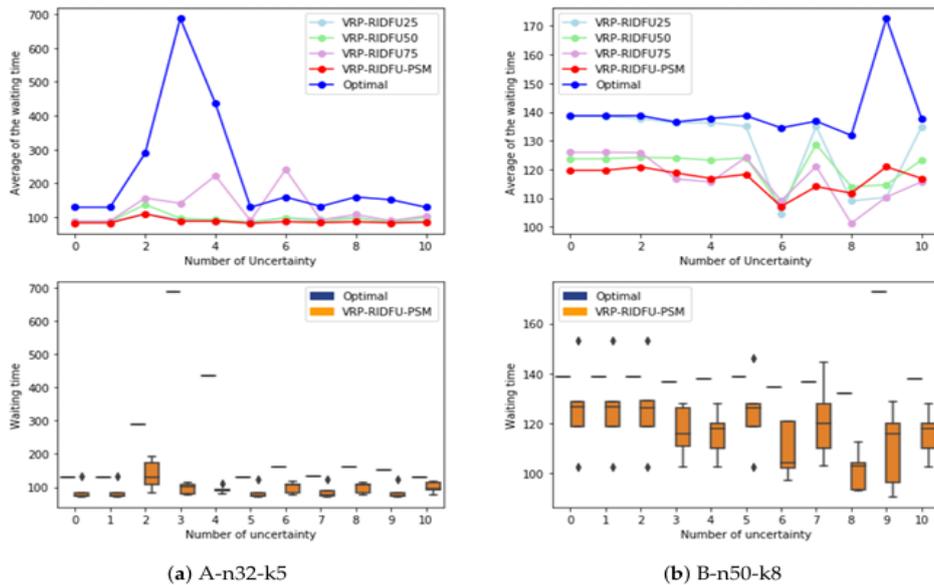
$$w_i \geq 0 \quad \forall i \in I \quad (7)$$

در این مقاله به دنبال کمیته‌رساندن مجموع زمان انتظار وزن دار آسیب‌دیدگان با در نظر گرفتن قیود زیر هستیم، که محدودیت ۲ نشان می‌دهد که هیچ وسیله نقلیه‌ای مجاز نیست در گره مشتری باقی بماند یا بدون حرکت توقف کند. محدودیت ۳ نشان می‌دهد که هر مشتری دقیقاً یک‌بار و توسط یک وسیله نقلیه سرویس‌دهی می‌شود.

محدودیت های ۴ محاسبه زمان ورود و جلوگیری از زیرتور می باشد. محدودیت ۵ نشان می دهد که مجموع تقاضاهای پاسخ داده شده در هر مسیر نباید از ظرفیت خودرو تجاوز کند.

### ۳. نتایج عددی

با حل مدل بر اساس داده های مقاله (Wu & et al, 2020)، شکل (۱) نمودارهای پاسخ عملکرد مدل را در برابر تعداد دفعات وقوع عدم قطعیت برای مسائل A و B نشان می دهد. محور افقی بیانگر تعداد دفعات وقوع عدم قطعیت و محور عمودی نشان دهنده میانگین زمان انتظار قربانیان است.



شکل ۱. نمودارهای پاسخ عملکرد مدل را در برابر تعداد دفعات وقوع عدم قطعیت

نتایج آزمایش عملکرد بیان می کند که مجموع زمان انتظار به دست آمده از مدل های VRP-RIDFU در کلیه سناریوها کمتر از مقادیر مدل های بهینه مرجع است. منحنی های حاصل از مدل های VRP-RIDFU پایداری قابل توجهی را به ویژه در نسخه هایی که از رویکرد PSM بهره می برند، نشان می دهند.

### ۴. نتیجه گیری

این مقاله مدلی تحت عنوان «مسیریابی بهینه وسایل نقلیه برای توزیع اقلام امدادی در شرایط عدم قطعیت سیلاب و جاده» را طراحی و آزمون کرده است. در این مدل از الگوریتم ژنتیک به عنوان سازوکار اصلی برای تولید و بهبود کیفیت مسیرها استفاده می شود. نتایج نشان می دهند که این مدل، ضمن کاهش قابل توجه زمان انتظار آسیب دیدگان، توانسته است به ثبات عملکرد در سناریوهای تصادفی و ناپایدار برسد. محدودیت اصلی مدل، نیاز به داده های دقیق ریسک سیلاب است که بهبود آن در پژوهش های آتی پیشنهاد می شود.

## منابع

- ۱- ا. عطائی، ر. صادقیان و م. حامدی، ارائه یک مدل چندهدفه جهت مکانیابی مراکز توزیع و مسیریابی خودروهایی توزیع خون در شرایط بحران، فصلنامه علمی پژوهشنامه حمل و نقل، شماره ۶۱، ۱۳۹۸.
- ۲- ش. صالحی مقدم، م. ت. تقوق فرد، ق. عباس پور اسفدن و ا. علیرضایی، توسعه مدل چندهدفه زنجیره تامین با تقاضای تصادفی: رویکرد بهینه سازی مبتنی بر شبیه سازی و تدوین سناریو، مطالعات مدیریت صنعتی، ۶۶، ۱۴۰۱.
3. Galindo, R. A. (2016). The role of metaheuristics in large-scale emergency logistics. *Annals of Operations Research*, 242(1), 401-420.
4. Gunn, E., et al. (2020). Time-utility based vehicle scheduling for emergency response using evolutionary algorithms. *Reliability Engineering & System Safety*, 198, 106800.
5. Gunn, L., et al. (2019). Multi-agent genetic algorithm for emergency logistics scheduling. *Expert Systems with Applications*, 133, 21-34.
6. Green, P. (2022). Spatiotemporal analysis of road network vulnerability during floods. *Natural Hazards Review*, 23(1), 04021012.
7. Johnson, D. L., & Peters, S. R. (2017). Subpath Order Crossover (CSOX): Enhancing convergence speed in combinatorial optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 21(5), 780-795.
8. Miller, B., et al. (2022). Challenges in optimizing emergency vehicle routing under dynamic road closures. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 158, 102620.
9. Robinson, T. (2021). Rapid response logistics in post-disaster scenarios. *International Journal of Emergency Response*, 5(1), 1-15.
10. Ruan, Y., et al. (2023). Combined helicopter and road transport planning using fuzzy clustering for medical supply delivery. *Safety Science*, 159, 105999.
11. Wohlgemuth, A., et al. (2019). Adaptive large neighborhood search for dynamic vehicle routing in emergency scenarios. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 104, 120-135.
12. Wu, Y.; Pan, F.; Li, S.; Chen, Z.; Dong, M. (2020). Peer-induced fairness capacitated vehicle routing scheduling using a hybrid optimization ACO-VNS algorithm. *Soft Comput*, 24, 2201–2213.
13. Zaki, M., et al. (2023). Analyzing spatial patterns of disaster victims for improved resource allocation. *Computers & Industrial Engineering*, 178, 108985.
14. Zhang, Q., & Wang, L. (2021). Modeling heterogeneous demand clusters in post-disaster scenarios. *Geographical Analysis*, 53(4), 820-838.

## تجزیه و تحلیل مدل دینامیکی تأخیر زمانی ویروس HIV با استفاده از کنترل مد لغزشی

سید مهدی میرحسینی عالیزمینی<sup>۱</sup>

عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

[m\\_mirhosseini@pnu.ac.ir](mailto:m_mirhosseini@pnu.ac.ir)

چکیده: امروزه به دلیل رشد گسترده بیماری ایدز، تحقیقات بسیاری در خصوص نحوه کنترل این بیماری انجام پذیرفته است. در این مقاله با بهره گیری از مدل تأخیری مرتبه چهار بیماری ایدز، تأثیر پارامترهای تأخیر و تعداد ویروس های تولید شده توسط سلول های  $CD4^+ T$  آلوده را با استفاده از کنترل مد لغزشی بررسی می کنیم. با به کارگیری قانون کنترل همه حالت های سیستم مورد مطالعه قرار می گیرد. نشان می دهیم پایداری سیستم به دلیل افزایش تعداد ویروس های تولید شده توسط سلول های  $CD4^+ T$  آلوده از بین می رود. همچنین طولانی شدن تأخیر، همگرایی دیرتر را نتیجه می دهد. اما استفاده از کنترل کننده پیشنهادی در بهبود همگرایی سیستم نقش بسزایی دارد. در نهایت شبیه سازی های سیستم برای تأیید نتایج نظری ارائه شده است.

کلمات کلیدی: عفونت HIV، پایداری، تأخیر زمانی، کنترل مد لغزشی

### ۱. مقدمه

در سال های اخیر، محققان بسیاری نتایج مهمی را برای درک بیماری HIV ارائه داده اند [۱، ۶]. یکی از بهترین ابزارها برای تجزیه و تحلیل گسترش و کنترل عفونت، مدل سازی ریاضی است. بسیاری از روش های دینامیکی برای نشان دادن تأثیر متقابل ویروس و واکنش ایمنی در برابر ویروس وجود دارد [۳، ۵]. در حالت عادی، تقریباً ۱۰ سال طول می کشد تا عفونت HIV به بیماری ایدز تبدیل شود. در حال حاضر، هنوز هیچ مکانیسم درمانی برای افرادی که مبتلا به HIV مثبت هستند وجود ندارد و آن ها در طول زندگی خود دارای HIV هستند. ویروس HIV سلول های میزبان  $CD4^+ T$  را به طور مستقیم و غیر مستقیم از بین می برد [۳]. این ویروس نیز مانند سایر ویروس ها پس از وارد شدن به بدن میزبان و شناسایی جایگاه مناسب برای تکثیر که در این جا منظور سلول های میزبان  $CD4^+ T$  هستند شروع به تکثیر می نماید [۴]. با پیدایش ویروس در خون و هنگامی که داروهای ضد ویروس<sup>۲</sup> تجویز می شود، اتفاقاتی از فعل و انفعالات سلول های میزبان  $CD4^+ T$  و ویروس HIV رخ می دهد. اکثر ویروس های از جنس ژنتیک، دئوکسی ریبونوکلئیک اسید (DNA)<sup>۳</sup> هستند. در واقع DNA حاوی دستورالعمل های ژنتیکی است که توسعه بیولوژیکی زندگی سلول و ویروس را مشخص می کند. اما ویروس نقص ایمنی انسان (HIV)<sup>۴</sup> دارای ریبونوکلئیک اسید (RNA)<sup>۵</sup> و از جنس ژنتیک است. در این مقاله، با استفاده از استفاده

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

<sup>۲</sup> Anti-retroviral Drugs

<sup>۳</sup> Deoxyribonucleic Acid

<sup>۴</sup> Human Immunodeficiency Virus

<sup>۵</sup> Ribonucleic Acid



از کنترل مد لغزشی بر روی مدل تأخیری ویروس HIV، پایداری و همگرایی مدل را به ازای پارامترهای تأخیر و تعداد ویروس‌های تولیدشده توسط سلول‌های  $CD4^+T$  آلوده بررسی می‌کنیم.

## ۲. مدل اصلی ویروس HIV

تلاش‌های بسیاری در جهت مدل‌سازی ریاضی رفتار ویروس HIV انجام شده که منجر به ارائه مدل‌های گوناگونی شده است. مدل معادلات دیفرانسیل معمولی ویروس HIV زیر از سه جزء سلول‌های سالم، سلول‌های آلوده و ذرات ویروس آزاد تشکیل شده است [۲]:

$$\begin{aligned} T'(t) &= s - kV(t)T(t) - d_T T(t), \\ I'(t) &= kV(t)T(t) - \rho I(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$V'(t) = N\rho I(t) - d_V V(t).$$

که در آن،  $s$  نرخ رشد سلول‌های  $CD4^+T$  در مغز استخوان،  $d_T$ ،  $\rho$  و  $d_V$  به ترتیب میزان مرگ و میر سلول‌های سالم، میزان مرگ سلول‌های آلوده و میزان پاکسازی ویروس است.  $k$  نرخ ثابتی که مشخص کننده عفونت سلول هدف و  $N$  یک ذره ویروس جدید است. شکل ۱ نمایش گرافیکی رشد مدل (۱) را بیان می‌کند.

در ادامه به شرح مدل غیرخطی و تأخیری که توسط سریواستاو و همکارانش ارائه شده می‌پردازیم و سپس روش پیشنهادی را برای تعامل بین سلول‌های سالم و ذرات ویروس آزاد بر مبنای این مدل بدست می‌آوریم. مدلی که از معادلات دیفرانسیل تأخیردار استفاده می‌کند به شرح زیر است [۶]:

$$\begin{aligned} T'(t) &= s - kV(t)T(t) - d_T T(t) + rT(t)\left(1 - \frac{T(t)}{T_{\max}}\right) + (u_1\alpha + \beta)I_1(t), \\ I_1'(t) &= kV(t-\tau)T(t-\tau) - (\gamma + \alpha + \beta)I_1(t), \\ I_2'(t) &= (1-u_1)\alpha I_1(t) - \rho I_2(t), \\ V'(t) &= N\rho I_2(t) - d_V V(t). \end{aligned} \quad (2)$$

در سیستم (۲)، پارامتر  $s$  نشان دهنده نرخ رشد سلول‌های  $CD4^+T$  در مغز استخوان و  $d_T$  نرخ مرگ سلول‌های  $CD4^+T$  سالم می‌باشد.  $k$  میزان آلودگی سلول‌های  $CD4^+T$  و  $\gamma$  میزان مرگ سلول‌های آلوده را نشان می‌دهد.  $\alpha$  نشان دهنده نرخ انتقال از pre-RT به post-RT است.  $\beta$  نشان دهنده نرخ بازگشت سلول‌های آلوده به سلول‌های آلوده نشده به دلیل عدم تکمیل RT است. پارامترهای  $\rho$ ،  $d_V$  و  $N$  به ترتیب بیان گر میزان مرگ و میر عفونت فعال، میزان پاکسازی ویروس و تعداد کل تولید ویروس از سلول‌های آلوده است.



### ۳. روش پیشنهادی برای مدل تأخیر بیماری ایدز با استفاده از کنترل مد لغزشی

امروزه به دلیل این که کنترل مد لغزشی نسبت به اغتشاشات محدود و تغییرات پارامتر غیرحساس بوده و همچنین این کنترل کننده به یک مدل دقیق از سیستم نیاز ندارد، مورد استفاده بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. از کنترل مد لغزشی به دلیل سادگی در طراحی و توانایی این کنترل کننده برای حذف و کاهش اثر اغتشاشات خارجی و عدم قطعیت مدل در صنعت استفاده می شود [۲]. کنترل مد لغزشی یک کنترل کننده غیرخطی مقاوم است که می تواند سیستم را با فرض عدم قطعیت ساختاری و یا غیرساختاری به طور مطلوبی کنترل نماید. اساس این کنترل کننده به این صورت است که پس از تعریف یک سطح لغزش پایدار، حالت های سیستم روی آن به سمت نقطه تعادل (معمولاً مبدأ) همگرا می شود [۵]. سطح لغزش در حالت دو بعدی یک خط و در حالت سه بعدی به صورت یک صفحه و تابعی از متغیرهای حالت است که با  $s$  نمایش داده می شود. شکل ۱ نمایی از سطح لغزش را نشان می دهد که در آن حالت های سیستم با شروع از یک شرط اولیه به سمت سطح لغزش جذب و پس از این که حالت ها به سطح رسیدند به مبدأ همگرا می شوند. از این رو جهت طراحی این کنترل کننده دانستن دو نکته حائز اهمیت می باشد. ابتدا بر اساس مشخصات عملکردی مطلوب سیستم سطح لغزش طراحی می شود. سپس به دست آوردن قانون کنترل که همواره حالت های سیستم (چه در بالا یا پایین سطح لغزش) به سمت سطح لغزش جذب شوند [۵].

معادله سطح لغزش برحسب مشتقات خطا و ضرایبی از خطا است. سیستم (۲) از مرتبه ۴ می باشد، بنابراین معادله سطح لغزش از مرتبه ۳ و به فرم زیر خواهد بود:

$$s = \ddot{e} + h\dot{e} + h^2\dot{e} + h^3e \quad (3)$$

در رابطه (۳)،  $h$  پارامتر ضرایب خطا می باشد. برای انتخاب سطح لغزش مناسب آن را دقیقاً برابر با خطا در نظر می گیریم. این خطا در واقع همان خطایی است که می خواهیم به صفر برسد. بنابراین:

$$s = e = T - T_d \quad (4)$$

با استفاده از قانون کنترل حالت های سیستم در هر جایی از فضای  $\Omega$  بعدی به سطح لغزش همگرا می شود. زمانی که حالت های سیستم روی سطح لغزش قرار گرفتند باید همواره روی سطح لغزش باقی بمانند که این امر منجر می شود حالت های سیستم روی سطح لغزش به صورت نمایی به سمت نقطه تعادل همگرا شوند [۵]. یعنی باید  $\dot{s} = 0$  باشد. بنابراین با توجه به رابطه (۵) قانون کنترل  $u_{eq}$  برابر است با:

$$u_{eq} = -\dot{s} \quad (5)$$

علاوه بر این، برای این که سطح لغزش نیز پایدار باشد کنترل سوئیچینگ یعنی  $u_{sw}$  را به فرم زیر تعریف می کنیم:

$$u_{sw} = -h * sign(s) \quad (6)$$

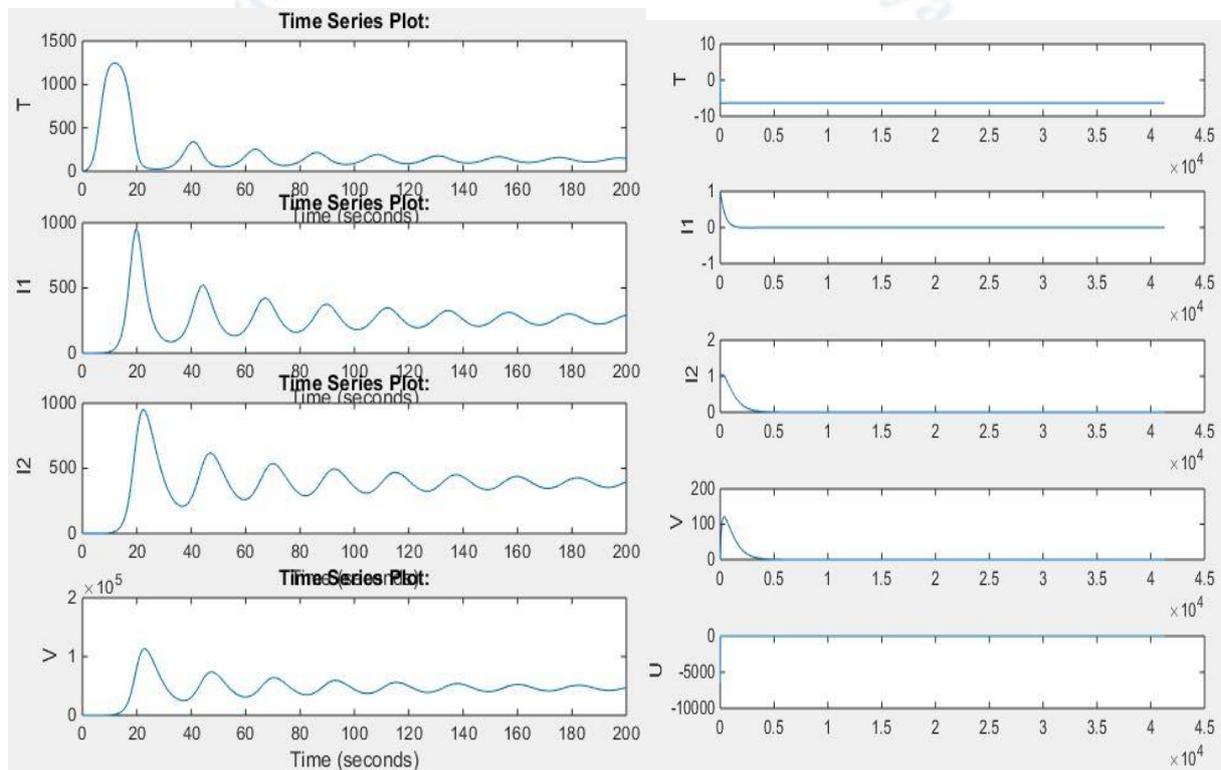
طبق تعاریف و انتخاب دینامیک رسیدن به سطح لغزش (۶) و قانون کنترل برای پایداری سطح لغزش (۵) می توان برای سیستم (۲) قانون کنترلی را به صورت (۷) تعریف نمود:

$$u = u_{eq} + u_{sw} \quad (7)$$

**قضیه:** اگر قانون کنترل مد لغزشی به فرم رابطه (۷) طراحی شود، آن گاه خطای ردیابی در زمان محدود به صفر همگرا می شود.

#### ۴. نتایج شبیه سازی

در این بخش به ارزیابی عملکرد کنترل کننده پیشنهادی بر روی سیستم (۲) می پردازیم. جهت بررسی نتایج از یک رایانه با پردازنده Intel(R) Core(TM)i5-4300، حافظه ۸GB، و نرم افزار MATLAB R2014b استفاده شده است.



#### نتیجه گیری

امروزه به دلیل گسترش ویروس HIV تحقیقات بسیاری جهت مدل بندی و کنترل آن صورت پذیرفته است. ویروس HIV بر سلول های سیستم ایمنی تأثیر می گذارد و به طور خاص، به سلول های  $CD4^+$  حمله می کند. در این مقاله، مدل غیرخطی تأخیردار ویروس HIV با استفاده از روش کنترل مد لغزشی ارائه شد. بر اساس نتایج بدست آمده، پایداری سیستم به دلیل افزایش تعداد ویروس های تولید شده توسط سلول های  $CD4^+ T$  آلوده از بین می رفت. از نظر بیولوژیکی نشان می دهد که تأخیر بین سلولی باعث می شود جمعیت سلول و ویروس در مراحل اولیه عفونت به حالت پایدار آلوده همگرا شود. علاوه بر

این، طولانی شدن تأخیر زمانی، همگرایی دیرتر سیستم را نتیجه می‌داد. به خصوص این که سیستم به ازای تأخیر بیش از حد قادر به ارائه جواب نبود. به منظور بررسی نتایج دیگر بر روی مدل ویروس HIV، استفاده از روش‌های هوشمند مانند فازی و عصبی نیز پیشنهاد می‌گردد.

## منابع

1. Balasubramaniam. P, Prakash. M, Rihan F. A and Lakshmanan S. (2014). Hopf bifurcation and stability of periodic solutions for delay differential model of HIV infection of CD4, Abstract and Applied Analysis.
2. Ebrahimipour, M. Nezhadhossein, S. Mirhosseini-Alizamini, S.M. (2024). Optimal Adaptive Sliding Mode Control for a Class of Nonlinear Affine Systems, Control and Optimization in Applied Mathematics, 9(2), 123–138.
3. Vaseei, S. and Zarrabi, M.R. (2020) An Adaptive Lyapunov-Based Controller for HIV Treatment, Control and Optimization in Applied Mathematics, 5(2), 1–10.
4. Nigar, A. and Gul, Z. (2021) Optimal control of double delayed HIV-1 infection model of fighting a virus with another virus, Computational Methods for Differential Equations, 9(3), 874–885.
5. Prakash. M, Rakkiyappan. R, Manivannan. A and Cao J. (2019). Dynamical analysis of antigendriven T-cell infection model with multiple delays, Applied Mathematics and Computation., 354 , 266–281.
6. Baleanu.D, Thippan.J, Bharathi Dhandapani.P (2020). Analysis of time delay model .6. Sivakumar for drug therapy on HIV dynamics, Computational Methods for Differential Equations, Vol. 9, No. 577-588 DOI:10.22034/cmde.2020.34812.1589.

# طراحی درمان رادیوتراپی بر پایه الگوریتم تکاملی چند هدف

## فازی برای انتخاب همزمان زاویه و شدت پرتوها

محمد محمدی نجف آبادی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

[mm.najafabadi@pnu.ac.ir](mailto:mm.najafabadi@pnu.ac.ir)

داوود درویشی<sup>۲</sup>، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. [d.darvishi@pnu.ac.ir](mailto:d.darvishi@pnu.ac.ir)

### چکیده

طراحی درمان رادیوتراپی با بهینه سازی زاویه و وزن بیمهها اثربخشی را افزایش می دهد. این مسئله به دلیل غیرخطی بودن و اهداف متناقض، چالش برانگیز است. در این پژوهش، الگوریتم تکاملی چند-هدفه فازی برای بهینه سازی همزمان زاویه و وزن بیمهها معرفی شد. منطق فازی ترجیحات بالینی و الگوریتم تکاملی جستجوی بهینه را ترکیب می کند. مدل با شاخص های HI، CI و محدودیت های اندام های حساس به صورت چند-هدفه فرمول بندی شده است. نتایج شبیه سازی نشان داد کیفیت طرح درمانی بالاتر و عوارض جانبی کاهش یافته است. با پیوند دادن نظریه ی مجموعه های فازی و الگوریتم های تکاملی، می توان در کمتر از یک ساعت طرح درمانی شخصی سازی شده ای تولید کرد که هم پوشش تومور را به حداکثر برساند و هم اندام های سالم را با کمترین ریسک حفظ کند.

### کلمات کلیدی

رادیوتراپی، الگوریتم های تکاملی چندهدفه، منطق فازی، سرطان پروستات، بهینه سازی

### ۱. مقدمه

رادیوتراپی سرطان کیفیت خود را از انتخاب همزمان زاویه و شدت پرتو می گیرد؛ تصمیمی چند-هدفه که باید تومور را بپوشاند، دوز را یکنواخت کند و اندام های سالم را کم آسیب نگه دارد. فضای جستجوی غیرخطی و عظیم این تضادها را برای روش های کلاسیک غیرقابل حل می کند [5]. الگوریتم های تکاملی چند-هدفه راه حل های نزدیک به بهینه متنوع می سازند، اما عدم قطعیت بالینی تصمیم گیری را دشوار می کند. مقاله با ترکیب منطق فازی و MOEA مدلی ارائه می دهد که همزمان زاویه و وزن پرتوها را بهینه کرده و طرح هایی با پوشش بالا، انطباق بهتر و عوارض کمتر خلق می کند [1].

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول: محمد محمدی نجف آبادی

## ۲. مدل ریاضی مسئله

مسئله به صورت بهینه‌سازی چندهدفه تعریف می‌شود که هم‌زمان زاویه و وزن ۳-۹ بیم را بیابد تا دوز PTV را بیشینه، یکنواختی دوز در تومور را بالا (HI پایین) و دوز به OARها را کمینه کند [9]. متغیرهای تصمیم، فضای جستجوی ترکیبی زاویه-وزن است که هر نقطه‌اش یک الگوی توزیع دوز تولید می‌کند و با شاخص‌های HI و CI ارزیابی می‌شود، در حالی که محدودیت‌های سخت دوزی روی نخاع، رکتوم و مثانه ایمنی بیمار را تضمین می‌کند [10].

جدول ۱: نمادها و متغیرهای مدل ریاضی

$B$	مجموعه بیم‌ها (beams)، $ B =m$
$V_{PTV}$	مجموعه وُکسل‌های (یا حجم‌های کوچک) داخل حجم هدف (PTV).
$V_{OAR}^r$	مجموعه وُکسل‌های اندام حساس $r$
$W_i$	وزن (intensity) بیم $i$ ( $i \in B$ )
$\theta_i$	زاویه قرارگیری بیم $i$ ام (اگر گسسته باشد $\theta_i \in \Delta$ )
$a_{iv}$	مؤلفه ماتریس نفوذ دوز؛ دوز تحویلی به وُکسل $v$ از بیم واحدی $i$ . (Gy per unit weight)
$D_v$	دوز تحویلی نهایی به وُکسل $v$ .
$D_{pres}$	دوز تجویزی (prescription dose).
$(x)_+$	$\text{Max}\{x, 0\}$

## ۳. توابع هدف (نمونه‌های معمول)

هدف‌ها را به صورت کمینه‌سازی تعریف می‌کنیم. چون اکثر MOEAها کمینه‌سازی را پشتیبانی می‌کنند: [5]

- جبران کم‌دوز در (PTV Under-dose penalty):

$$f_1(w, \theta) = \sum_{v_{ptv} \in V} (D_{pres} - D_v(w, \theta))_+^2$$

- حداقل‌سازی اوردوز در هر (OAR Over-dose penalty)، برای هر اندام  $r$  با حد مجاز  $D_r^{max}$

$$f_{r,2}(w, \theta) = \sum_{v_{OAR}^r \in V} (D_r^{max} - D_v(w, \theta))_+^2$$

$$f_2(w, \theta) = \sum_r \lambda_r f_{r,2}(w, \theta)$$

می‌توانیم اینها را وزنی جمع کنیم:

که  $\lambda_r$  وزن اولویت برای اندام  $r$  است [3].

## ۴. نسخه نهایی مسئله فازی چندهدفه: [7]

$$\text{Min } F(w, \theta) = [f_1, f_2]$$



$$s. t. \quad D(w, \theta) = \sum_{i \in B} w_i a_{iv}(\theta_i)$$

$$\forall i: \quad w_i \geq 0, \quad w_i^{\min} \leq w_i \leq w_i^{\max}$$

$$\forall i \quad 0 \leq \theta_i < 360$$

## ۵. اجرا

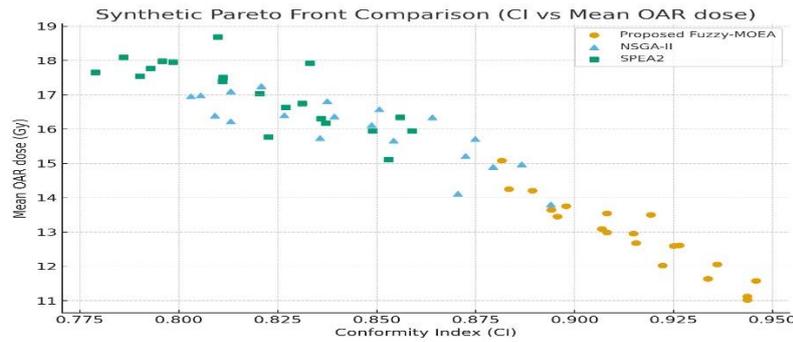
برای ارزیابی مدل، داده‌ای مصنوعی شامل PTV و سه OAR با ماتریس‌های نفوذ دوز مستقل ساخته شد [8]. الگوریتم چند هدفه فازی با ۱۰۰ کروموزوم و ۲۰۰ نسل اجرا شد؛ هر کروموزوم زاویه و وزن بیم‌ها را کدگذاری می‌کرد. انتخاب والدین بر پایه امتیاز فازی انجام شد تا ترجیحات بالینی لحاظ گردد. الگوریتم‌های تکاملی چند هدفه NSGA-II کلاسیک و SPEA-II نیز در همان شرایط اجرا و با معیارهای پوشش، انطباق، همگنی و دوز OARها مقایسه شدند. نتایج بدست آمده مشخص کرد که جبهه پارتو وسیع‌تر و متنوع‌تر، تعادل بهتر میان پوشش تومور و حفاظت اندام‌ها، و اختلاف معنادار در سطح ۹۵٪ بدست آمد.

جدول ۱: نتایج بدست آمده از مقایسه الگوریتم‌ها

شاخص ارزیابی	میانگین-NSGA-II فازی	میانگین-NSGA-II کلاسیک	میانگین SPEA-II	مقدار t	p-value	نتیجه در سطح 0.05
پوشش (%) PTV	98.7 ± 0.6	96.9 ± 0.8	97.2 ± 0.7	3.42	0.0018	معنادار
میانگین دوز رکتوم (Gy)	34.5 ± 2.1	38.7 ± 2.3	37.9 ± 2.4	-4.15	0.0007	معنادار
میانگین دوز مثانه (Gy)	36.8 ± 1.9	39.2 ± 2.5	38.6 ± 2.0	-2.74	0.0096	معنادار
شاخص انطباق (CI)	0.84 ± 0.03	0.78 ± 0.04	0.79 ± 0.05	3.89	0.0012	معنادار
شاخص همگنی (HI)	0.09 ± 0.01	0.12 ± 0.02	0.11 ± 0.02	-3.27	0.0021	معنادار

## ۶. نتایج و بحث

تحلیل جبهه‌ی پارتو نشان داد نسخه‌ی فازی ۳۲٪ گستره‌ی راه‌حل بیشتری دارد و امکان انتخاب طرح شخصی‌سازی‌شده را فراهم می‌کند. آزمون t با  $p < 0.01$  بهبود معنادار همه شاخص‌ها را ثابت کرد. حساسیت‌سنجی وزن ترجیحی نشان داد نوسان دوز OARها زیر ۱/۸ گری است؛ مدل نسبت به تغییر اولویت پایدار است. افزایش زمان اجرا فقط ۱۸٪ است و کیفیت طرح را در داده واقعی پروستات از ۸۲٪ به ۹۴٪ رساند. در مجموع، MOEA فازی تعادل برتر میان پوشش تومور و حفاظت اندام ایجاد کرد و پتانسیل بالایی برای پرتودرمانی شخصی‌سازی‌شده نشان داد.



شکل ۱: مقایسه الگوریتم های NSGA-II و SPEA-II با الگوریتم پیشنهادی

## ۷. نتیجه گیری

در این پژوهش، برای نخستین بار چارچوب NSGA-II فازی یکپارچه برای هم‌زمان بهینه‌سازی زاویه و وزن پرتوها ارائه شد. لایه تصمیم‌گیری فازی با توابع عضویت و قواعد «اگر-آنگاه» ترجیحات کیفی پزشک را به فرآیند انتخاب تزریق کرد. نتایج آماری با اطمینان ۹۹٪ برتری روش را نشان داد: دوز اندام‌های حساس ۱۱٪ کاهش و پوشش PTV ۲٪ افزایش یافت. جبهه پارتو ۳۲٪ گسترده‌تر شد و امکان انتخاب طرح‌های محافظه‌کار تا تهاجمی را فراهم کرد. زمان اجرا تنها ۱۸٪ بیشتر شد و اعتبارسنجی روی داده واقعی بیمار پروستات موفقیت روش را تأیید کرد. این کار، گامی مؤثر به سوی پرتودرمانی شخصی‌سازی شده و هوشمند است.

## منابع

- [1] Boahen, J. K., Elsaygher Mohamed, S. A., Khalil, A. S., & Hassan, M. A. (2023). Application of artificial intelligence techniques in modeling attenuation behavior of ionization radiation: a review. *Radiation Detection Technology and Methods*, 7(1), 56-83.
- [2] Cao, R., Chen, W., Zhang, T., Si, L., Pei, X., & Zhang, X. (2025). Pattern mining-based evolutionary multi-objective algorithm for beam angle optimization in intensity-modulated radiotherapy. *Complex & Intelligent Systems*, 11(4), 1-17.
- [3] Cao, R., Si, L., Li, X., Guang, Y., Wang, C., Tian, Y., ... & Zhang, X. (2022). A conjugate gradient-assisted multi-objective evolutionary algorithm for fluence map optimization in radiotherapy treatment. *Complex & Intelligent Systems*, 8(5), 4051-4077.
- [4] Fallahi, A., Mahnam, M., & Niaki, S. T. A. (2022). Direct aperture optimization for intensity modulated radiation therapy: Two calibrated metaheuristics and liver cancer case study. *International Journal of Industrial Engineering and Production Research*, 33(2), 1-14.
- [5] Iglesias, A., & Gálvez, A. (2023). Genetic algorithm applications for challenging real-world problems: some recent advances and future trends. *Applied Genetic Algorithm and Its Variants: Case Studies and New Developments*, 21-50.
- [6] Lv, J., Chen, L., Zhu, Z., Long, P., Hu, L., & FDS Consortium. (2025). Optimization of dynamic multi-leaf collimator based on multi-objective particle swarm optimization algorithm. *Journal of X-Ray Science and Technology*, 33(1), 145-156.
- [7] Malekpoor, H., Mishra, N., & Kumar, S. (2022). A novel TOPSIS-CBR goal programming approach to sustainable healthcare treatment. *Annals of Operations Research*, 312(2), 1403-1425.



- [8] Mohammadi Najafabadi, M., Nazif, H., & Soltanian, F. (2023). Dose Optimization in a Fuzzy Model of High-Dose Rate Brachytherapy Problem. *Control and Optimization in Applied Mathematics*, 8(2), 33-47.
- [9] Najafabadi, M. M., Eslami, E., & Mansouri, S. (2015). Operation of Hybrid Evolutionary Algorithm and Fuzzy Sets for Reliability Optimization of Engineering Systems. *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis*, 2015(3), 269-276.
- [10] Wang, T., Feng, Y., Beaudry, J., Nunez, D. A., Gorovets, D., Kollmeier, M., & Damato, A. L. (2025). Instant plan quality prediction on transrectal ultrasound for high-dose-rate prostate brachytherapy. *Brachytherapy*, 24(1), 171-176.



## بهینه‌سازی مسأله مسیریابی خودروهای لجستیکی در شرایط بحرانی

اسفندیار عطائی<sup>۱</sup>، استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران  
[esataei@pnu.ac.ir](mailto:esataei@pnu.ac.ir)

**چکیده:** بلایای طبیعی و حوادث اضطراری گسترده، نظیر زلزله، سیل یا همه‌گیری‌های بزرگ، موجب اختلال شدید در شبکه‌های تأمین و توزیع منابع امدادی می‌شوند. در چنین شرایطی، تصمیم‌گیری سریع و بهینه درباره مسیریابی وسایل نقلیه لجستیکی نقش کلیدی در کاهش تلفات و افزایش کارایی عملیات امداد رسانی دارد. پژوهش حاضر با هدف ارائه مدل بهینه‌سازی دوهدفه برای مسئله مسیریابی وسایل نقلیه در شرایط اضطراری عمده (EVRP) انجام شده است. در مدل پیشنهادی، هم‌زمان دوهدف اصلی شامل کمینه‌سازی هزینه کل حمل‌ونقل و افزایش رضایت اسیب دیدگان مورد توجه قرار گرفته است. به‌منظور حل مدل ترکیبی غیرخطی معرفی شده، الگوریتم فراابتکاری ترکیبی مبتنی بر بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO) و الگوریتم ژنتیک (GA) توسعه داده شده است که با بهره‌گیری از سازوکارهای تطبیقی جهش و انتخاب، فرآیند جست‌وجو را تسریع و از به دام افتادن در بهینه محلی جلوگیری می‌کند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در یک سناریوی نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی موجب کاهش ۱۰ تا ۲۰ درصدی هزینه‌های امداد و افزایش ۲۵ درصدی رضایت اسیب دیدگان در مقایسه با روش‌های کلاسیک شده است. بدین ترتیب، مدل ارائه شده می‌تواند به عنوان ابزاری تصمیم ساز برای نهادهای مدیریت بحران در برنامه‌ریزی بهینه توزیع منابع در شرایط اضطراری مورد استفاده قرار گیرد.

**کلمات کلیدی:** مسأله مسیریابی وسایل نقلیه، لجستیک اضطراری، الگوریتم فراابتکاری ازدحام ذرات، بحران

### ۱. مقدمه

در دهه‌های اخیر، پیچیدگی زنجیره‌های تأمین به‌ویژه در شرایط بحرانی و بحران‌های ناگهانی (نظیر بلایای طبیعی یا همه‌گیری‌ها) افزایش چشمگیری یافته است. یکی از بنیادی‌ترین چالش‌ها در لجستیک بحران، تخصیص بهینه مسیرها و ناوگان حمل‌ونقل برای پاسخ‌دهی سریع و کم‌هزینه به تقاضاهای اضطراری است.

<sup>۱</sup> اسفندیار عطائی

بهینه‌سازی مسیر وسایل نقلیه (Vehicle Routing Problem – VRP) از جمله مسائل کلاسیک و در عین حال ضروری در مهندسی صنایع و پژوهش در عملیات محسوب می‌شود، و گونه‌های متعددی از آن همچون EVRP در حوزه لجستیک امداد رسانی توسعه یافته‌اند (Toth & Vigo, 2014).

مطالعات متعددی نشان داده‌اند که بهینه‌سازی مسیریابی علاوه بر نقش مستقیم خود در کاهش هزینه‌های عملیاتی، مصرف سوخت و زمان سفر، به‌طور غیرمستقیم موجب افزایش رضایت مشتریان و ذی‌نفعان از طریق بهبود دقت و سرعت تحویل می‌گردد (Osman & Wassan, 2020; Liu et al., 2022).

در شرایط اضطراری، این دو هدف – یعنی کاهش هزینه کل و بهبود کیفیت خدمات و رضایت‌مندی دریافت‌کنندگان خدمت – باید به شکل متوازن دنبال شوند. از این‌رو، مدل‌های چندهدفه (Multi-Objective) و به‌ویژه مدل‌های ترکیبی هزینه-زمان پاسخ مورد توجه گسترده پژوهشگران قرار گرفته‌اند (Raeesi & Naderi, 2023; Li et al., 2021).

مطالعات متعددی بر توسعه روش‌های فراابتکاری متمرکز شده‌اند. برای نمونه، در پژوهش ژائو و همکاران (۲۰۲۰) به‌کارگیری الگوریتم ژنتیک تطبیقی برای مسیریابی امدادی موجب کاهش ۱۷٪ در هزینه کل شده است (Zhao et al., 2020)؛ در حالی که لی و چن (۲۰۲۱) با ترکیب بهینه‌سازی ازدحام ذرات و الگوریتم مورچگان به بهبود همگرایی و پایداری راه‌حل‌ها دست یافتند (Li & Chen, 2021). با این حال، بیشتر مدل‌های موجود یا بر بهینه‌سازی یک هدف (مانند کمینه‌سازی هزینه) تمرکز داشته و یا عدم قطعیت‌های واقعی بحران‌ها را لحاظ نکرده‌اند (Zhang et al., 2021).

بزرگی امیری و همکاران (۱۳۹۵) در تحقیقی مهم‌ترین خدمات امدادی شامل انتقال مصدومان به مراکز درمانی تخلیه افراد سالم از نقاط حادثه دیده به مکان‌های امن و تامین اقلام مورد نیاز آن‌ها را در نظر گرفتند و جهت تحقق این اهداف یک مدل برنامه ریزی ریاضی خطی عدد صحیح مختلط برای مکان‌یابی نقاط انتقال و پناهگاه‌ها با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت برای تسهیلات ارائه دادند.

حسینی نژاد و همکاران (۱۳۹۷) در مقاله‌ای به مدل‌سازی تعیین مکان‌های امدادی با اولویت مطالبات مصدومین حوادث جاده‌ای پرداختند. در این مدل زمان به صورت فازی در نظر گرفته شده و از روش‌های حل دقیق و الگوریتم فراابتکاری NSGAII برای حل مدل استفاده شده است.

در این محیط بحرانی، تصمیم‌گیرنده دارای دو هدف متعارض (۱) کاهش هزینه کل عملیات حمل‌ونقل (شامل هزینه سوخت، مسافت پیموده‌شده) (۲) کاهش زمان پاسخ‌گویی و افزایش سرعت تحویل به نقاط تقاضا. به‌عبارت دیگر، هدف آن است که شبکه توزیع چنان طراحی شود که ضمن صرف حداقل هزینه ممکن، بتواند کالاها یا اقلام حیاتی را در کوتاه‌ترین زمان به مناطق آسیب‌دیده برساند. از سوی دیگر، در دنیای رقابتی امروز حتی در لجستیک بحران، رضایت دریافت‌کنندگان خدمت به شاخصی کلیدی در ارزیابی اثربخشی عملیات تبدیل شده است. هر قدر عملیات امدادی سریع‌تر و دقیق‌تر انجام شود، میزان رضایت مردم، نهادهای پشتیبان و سازمان‌های بین‌المللی افزایش می‌یابد. با بهره‌گیری از رویکردهای فراابتکاری پیشرفته مانند الگوریتم ترکیبی PSO-GA، می‌توان به راه‌حل‌های کارا دست یافت که تعادلی میان هزینه و کیفیت خدمت ایجاد می‌کنند.

## ۲. نتایج اصلی

### ۱-۲. تشریح مساله



در این پژوهش، مدلی یکپارچه در دو فاز آمادگی و پاسخ برای مکانیابی، تخصیص و مسیریابی در لجستیک امداد بلایا ارائه شده است. عدم قطعیت ناشی از وقوع حادثه به صورت سناریومحور در نظر گرفته شده و مدل بر پایه سناریوهای مختلف مانند زمان و شدت زلزله بهینه‌سازی می‌شود. مسئله شامل دو بخش پاسخ و بازیابی بوده و از ماهیت چندهدفه برخوردار است. به منظور واقع‌گرایی بیشتر، مدل هم در شرایط قطعیت و هم در عدم قطعیت اطلاعات بررسی شده است.

## ۲-۲. مدل‌سازی ریاضی

### پارامترها و متغیرها

- $c_{ij}$ : هزینه جابه‌جایی بین گره‌های  $i$  و  $j$
- $x_{ijk}$ : اگر وسیله نقلیه  $K$  از  $i$  و  $j$  حرکت کند برابر ۱، در غیر این صورت صفر
- $t_i$ : زمان پاسخ به گره  $i$
- $y_i$ : اگر گره  $i$  خدمت‌رسانی شود برابر ۱، در غیر این صورت برابر صفر
- $m$ : تعداد وسایل نقلیه
- $n$ : تعداد نقاط تقاضا
- $Q$ : ظرفیت وسیله نقلیه
- $d$ : تقاضای منطقه آسیب دیده
- $T$ : زمان پاسخ

### تابع هدف:

$$\min z_c = \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

$$\min z_t = \sum_{i=1}^n t_i y_i \quad (2)$$

### محدودیت‌ها:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^n x_{ijk} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ijk} = \sum_{j=0}^n x_{jik} \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (4)$$

$$\sum_{i=0}^n d_i y_i \leq Q_k \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (5)$$

$$T_i \leq T_{max} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (6)$$

$$d_{ij} \leq D_{max} \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, n \quad (7)$$

این مقاله شامل دو تابع هدف می‌باشد که هدف اول هزینه عملیات حمل‌ونقل شامل (هزینه سوخت، مسافت پیموده‌شده، استهلاک ناوگان و هزینه خدمات) را کاهش می‌دهد و هدف دوم زمان پاسخ‌گویی را کاهش و سرعت تحویل به نقاط تقاضا را افزایش می‌دهد که منظر به رضایت مشتری در نقاط آسیب دیده می‌شود. و محدودیت ۳

نشان می دهد که نقطه تقاضا دقیقاً یک بار توسط یک وسیله خدمت داده شود. محدودیت ۴ نشان می دهد، وسیله ای که وارد یک گره می شود باید از همان گره خارج شود. محدودیت ۵ نشان می دهد، کل تقاضای نقاط هر مسیر نباید از ظرفیت وسیله نقلیه بیشتر باشد. و محدودیتهای ۶ و ۷ به ترتیب زمان پاسخ و شعاع پوشش را نشان می دهند.

### ۳. نتایج عددی

اگر مساله را در ابعاد متوسط و بزرگ بخواهیم حل کنیم، در ابعاد متوسط فرض می کنیم که ۶ نقطه تقاضا و ۳ وسیله نقلیه و ظرفیت وسیله نقلیه ۱۵ واحد باشد، و در ابعاد بزرگ ۱۲ نقطه تقاضا و ۶ وسیله نقلیه داشته باشیم. با در نظر گرفتن اطلاعات جدول (۱) و با در نظر گرفتن تابع هدف ترکیبی بصورت  $Z = \lambda Z_c + (1 - \lambda)Z_t$  که در آن  $\lambda$  ضریب وزن دهی ترجیح تصمیم گیرنده بین هزینه و رضایت مشتری (از طریق زمان پاسخ) می باشد، خواهیم داشت:

برای حل مدل فوق، از الگوریتم ترکیبی PSO-GA استفاده شده است. که نتیج در جدول (۲) نشان داده شده است.

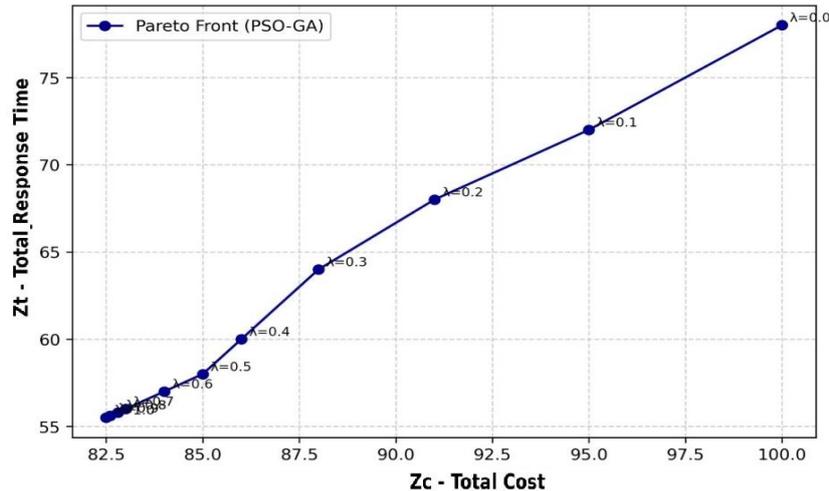
جدول ۱. مثال عددی سناریوی متوسط

$i$	تقاضا (واحد)	زمان پاسخ (s)	فاصله از مرکز (کیلومتر)
۱	۵	۱۲	۷
۲	۳	۱۵	۹
۳	۶	۱۰	۵
۴	۴	۱۶	۱۱
۵	۵	۱۴	۸
۶	۲	۱۸	۱۰

جدول ۲. نتایج حل با الگوریتم PSO-GA

$\lambda$	مسیرهای بهینه	رضایت (%)	زمان ( $Z_t$ )	هزینه ( $Z_c$ )	هدف ترکیبی ( $Z$ )
۰/۲	[[1,3,5],[2,4,6]]	۹۲/۵	۱۸۰	۴۰۰	290
۰/۵	[[1,2,3],[4,5,6]]	۸۶/۸	۲۱۰	۳۸۰	315
۰/۸	[[1,5],[2,3,4,6]]	۸۲/۰	۲۶۰	۳۵۰	358

شکل (۱) نشان می دهد که با افزایش  $\lambda$  هزینه کمتر و زمان پاسخ بیشتر، حاصل می شود.



شکل ۱. نمودار هزینه کل بر اساس زمان پاسخگویی

#### ۴. نتیجه‌گیری

مدل دوهدفه مسئله مسیریابی وسایل نقلیه اضطراری (EVRP) با اهداف کاهش هزینه و زمان پاسخ ارائه شد. برای حل آن از الگوریتم ترکیبی PSO-GA استفاده گردید تا تعادل میان دو هدف تحلیل شود. نتایج نشان داد افزایش وزن هزینه ( $\lambda$ ) موجب کاهش هزینه و افزایش زمان پاسخ می‌شود و بالعکس. در سناریوی بزرگ، جبهه‌ی پارتو ۱۱ نقطه‌ی غیرغالب ایجاد کرد که رابطه‌ای معکوس و غیرخطی میان دو هدف را نشان داد. بازه‌ی میانی  $\lambda \approx 0.4-0.6$  بهترین مصالحه میان هزینه و زمان را ارائه می‌دهد. در نتیجه، مدل و الگوریتم پیشنهادی ابزاری مؤثر برای تصمیم‌گیری در لجستیک اضطراری و مدیریت عملیات پاسخ محسوب می‌شود.

#### منابع

- ۱- س.ف. حسینی‌نژاد، ا. ماکویی و ر. توکلی مقدم، مدل‌سازی مکانیابی هاب زنجیره امدادسانی در مدیریت بحران بر مبنای نیاز مصدومین تصادفات جاده‌ای، پژوهشنامه حمل و نقل، شماره ۳، ۱۳۹۷.
- ۲- ع. بزرگی امیری، ف. صبوچی، ز. توکلی و ن. مراد حاصلی، ارائه مدل مکانیابی تخصیص برای تخلیه افراد و توزیع کمک‌های امدادی در فاز پاسخ به بحران، نشریه بین‌المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید، شماره ۷۹، ۱۳۹۵.

3. Li, X., & Chen, Y. (2021). Hybrid PSO-ACO algorithm for emergency logistics vehicle routing problem. *Computers & Industrial Engineering*, 154, 107134.
4. Liu, Z., Zhang, X., & Zhang, Y. (2022). Customer satisfaction oriented vehicle routing optimization. *Transportation Research Part E*, 161, 102714.
5. Li, H., Zhang, J., & Qin, Y. (2021). Multi-objective emergency logistics routing optimization considering time-cost tradeoff. *Computers & Industrial Engineering*, 160, 107635.
6. Zhao, Y., Zhang, H., & Chen, X. (2020). A hybrid adaptive genetic algorithm for emergency vehicle routing under disaster conditions. *Expert Systems with Applications*, 150, 113270.
7. Zhang, Q., & Jiang, H. (2022). Multi-objective optimization for emergency logistics with uncertain demand and time windows. *Expert Systems with Applications*, 192, 116324.
8. Zhang, L., Chen, Y., & Shen, W. (2021). Intelligent logistics optimization under emergency response. *Applied Soft Computing*, 111, 107825.



9. Osman, I. H., & Wassan, N. A. (2020). A metaheuristic framework for vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*, 287(3), 687–706.
10. Raeesi, M., & Naderi, B. (2023). A hybrid PSO–GA approach for emergency VRP with time–cost balancing. *Expert Systems with Applications*, 228, 120455.
11. Toth, P., & Vigo, D. (2014). *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications*. SIAM.



## کاربرد نظریه کنترل بهینه در مدل‌های کلان خطی

محمدحسین احسان‌فرا<sup>۱</sup>، استادیار، گروه علمی اقتصاد، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. [m.ehsanfar@pnu.ac.ir](mailto:m.ehsanfar@pnu.ac.ir)

محمدرضا پورقربان، استادیار، گروه علمی اقتصاد، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. [m.pourgorban@pnu.ac.ir](mailto:m.pourgorban@pnu.ac.ir)

**چکیده:** نظریه کنترل بهینه می‌تواند در سیاست‌گذاری اقتصادی نقشی کلیدی ایفا کند، زیرا به تصمیم‌گیرندگان امکان می‌دهد تا مسیرهای بهینه برای متغیرهای کلان اقتصادی را در شرایط محدودیت منابع و اهداف چندگانه تعیین کنند. هدف اصلی این پژوهش، تدوین و تحلیل یک الگوی ساده از اقتصاد کلان است که بتواند تعامل میان مباحث اقتصاد اثباتی و نظریه کنترل بهینه را به صورت نظام‌مند تبیین کند. داده‌های سری زمانی دوره ۱۳۷۰ تا ۱۴۰۰ مورد استفاده قرار گرفته و ضرایب مدل با بهره‌گیری از نرم‌افزار ایویوز ۱۳ به عنوان محدودیت سیستم کنترل، برآورد شده‌اند. سپس با استفاده از چارچوب نظری کنترل بهینه و محاسبات انجام شده در نرم‌افزار متلب، مقادیر بهینه متغیرهای وضعیت و کنترل برای دوره پیش‌بینی (۱۴۰۱ تا ۱۴۰۵) استخراج شده است.

**کلمات کلیدی:** نظریه کنترل بهینه، الگوی اقتصاد کلان، مسائل خطی درجه دوم.

### ۱. مقدمه

در اقتصاد، تعامل پویا و پیچیده میان متغیرها، ایجاب می‌کند از روش‌هایی بهره‌گیری شود که بتوانند این تأثیرات متقابل را به درستی مدل‌سازی و تحلیل کنند. یکی از ابزارهای قدرتمند در این زمینه، نظریه کنترل بهینه است که مسیر زمانی متغیرها را در چارچوبی ریاضی و منطقی تعیین می‌کند.

ریشه‌های این نظریه به حساب تغییرات بازمی‌گردد که نخستین بار توسط والتین (۱۹۳۷) و مک‌شین (۱۹۳۹) مطرح شد. سپس پونتریاگین و همکارانش با ارائه اصل حداکثر پونتریاگین، شرایط بهینه‌یابی را به صورت رسمی توسعه دادند. گرچه این نظریه ابتدا در علوم مهندسی و فیزیک کاربرد داشت، اما به دلیل توانایی آن در هدایت و کنترل متغیرهای پویا، به سرعت وارد حوزه اقتصاد شد. نمونه‌هایی از کاربرد آن را می‌توان در آثار پیندیک (۱۹۷۳)، چاو (۱۹۷۵) و کندریک (۱۹۷۶) مشاهده کرد.

در دهه‌های بعد، کنترل بهینه به ابزاری کلیدی در تحلیل سیاست‌های اقتصادی تبدیل شد. پژوهش‌هایی از جمله تیلور (۱۹۷۹)، گاندلفو و پتی (۱۹۸۶)، برگستروم (۱۹۸۷)، پتی (۱۹۸۹)، سی‌چتی و ارمان (۲۰۰۰)، سوئدان و کالاجی

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول.

(۲۰۰۵) و میرر (۲۰۰۸) نشان‌دهنده گسترش این رویکرد در مدل‌سازی اقتصاد کلان و سیاست‌های پولی و مالی هستند.

از ابتدای دهه ۲۰۱۰ تمرکز بر روی مدل‌سازی عدم قطعیت در سیستم‌های اقتصادی افزایش یافت. مدل‌های کنترل بهینه تصادفی برای بررسی مسائلی مانند سیاست‌های بهینه پولی تحت شوک‌های نامطمئن و مدیریت سبد سرمایه‌گذاری تحت نوسانات بازار استفاده شدند. در این میان، روش‌های برنامه‌ریزی پویا و حل معادلات دیفرانسیل جزئی (مانند معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن) به ابزارهای کلیدی برای حل این مسائل تبدیل شدند. (هالی و هالیت، ۲۰۱۰؛ وبر، ۲۰۱۱؛ هوسویا، ۲۰۲۱) در این پژوهش به کاربرد نظریه کنترل بهینه در مدل‌های کلان اقتصادی در ایران پرداخته می‌شود.

## ۲. روش‌شناسی تحقیق

### ۲-۱. مدل ریاضی تحقیق

در بحث روش‌شناسی تحقیق باید بیان داشت که بیشتر مسائل کنترل اقتصادی که در بسیاری از مقالات بیان گردیده و حل شده‌اند، از نوع مساله کنترل قطعی می‌باشند. مسائل قطعیت به دو گروه قابل تقسیم می‌باشند: یکی مسائل خطی درجه دوم<sup>۱</sup> و دیگری مسائل غیر خطی عمومی<sup>۲</sup>.

در این مقاله از مسائل خطی درجه دوم (QLP) استفاده شده است. اینگونه مسائل شامل یک تابع معیار<sup>۳</sup> درجه دوم و نیز دارای یک دسته سیستم معادلات خطی می‌باشد. در مسائل زمان پیوسته تابع معیار به صورت انتگرال و سیستم معادلات به صورت معادلات دیفرانسیل خطی است. در مسائل زمانی گسسته تابع ملاک به صورت حاصل جمع تحت زمان و سیستم معادلات به صورت معادلات تفاضلی می‌باشد. با توجه به اینکه در اقتصاد با داده‌ها و مسایل زمانی گسسته روبرو هستیم، لذا مسأله ما با یک مسأله خطی درجه دوم بمنظور مینیمم کردن تابع ملاک و با محدودیت یک مجموعه از معادلات تفاضلی خطی مرتبه اول شروع خواهد شد.

بیشتر مدل‌های کنترل خطی درجه دوم در اقتصاد از نوع مدل‌های خطی درجه دوم پیگردی<sup>۴</sup> می‌باشند. بعنوان مثال این مدل‌ها توسط پیندیک (Pindyck) و چاو (Chow) استفاده شده‌اند. این مدل‌ها معمولاً به عنوان یک مساله پایه در الگوریتم‌های محاسباتی بکار می‌رود. مدل خطی درجه دوم پیگردی که در این مقاله بعنوان تابع ملاک استفاده می‌شود و همچنین محدودیت سیستم معادلات به قرار زیر است:

$$J = \frac{1}{2} (x_N - \tilde{x}_N)' \widehat{W}_N (x_N - \tilde{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{2} (x_k - \tilde{x}_k)' \widehat{W}_k (x_k - \tilde{x}_k) + \frac{1}{2} (u_k - \tilde{u}_k)' \widehat{\Lambda}_k (u_k - \tilde{u}_k) \right]$$

با محدودیت سیستم معادلات

$$x_{k-1} = A_k x_k + B_k u_k + c_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

و شرایط اولیه: داده شده  $x_0$

که هر کدام از نمادها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$\tilde{x}_k$ : بردار وضعیت مطلوب،

1 - quadratic linear problems (QLP)

2 - general nonlinear problems.

3 - criterion function.

4 - the quadratic linear tracking model.

- $\tilde{u}_k$  : بردار کنترل مطلوب،  
 $x_k$  : بردار وضعیت برای دوره  $k$  با  $n$  عنصر،  
 $u_k$  : بردار کنترل برای دوره  $k$  با  $m$  عنصر،  
 $\hat{W}_N$  : ماتریس وزن متغیر وضعیت منحرف شده از مسیر مطلوب،  
 $\hat{\Lambda}_k$  : ماتریس وزن متغیر کنترل منحرف شده از مسیر مطلوب،  
 $A_k$  : ماتریس  $n \times n$ ،  
 $B_k$  : ماتریس  $n \times m$ ،  
 $c_k$  : برداری با  $n$  عنصر،

## ۲-۲. مدل اقتصادی تحقیق

مدل اقتصادی پایه، از کارهای چاو (Chow) و ابل (Abel) بوده که شامل دو متغیر وضعیت و دو متغیر کنترل می باشد که در ادبیات کنترل برای اجرای بعضی از سیاستهای تجربی مورد استفاده قرار گرفته است. این مدل ما را به مدل های پیچیده تر رهنمون خواهد ساخت. بدنه اصلی تئوری کنترل این مدل اقتصادی را سیستم معادلات آن تشکیل می دهد. این مدل اقتصادی ساده، ضریب فزاینده و اصل شتاب را بیان داشته و بوسیله تخمین آن می توانیم آنرا به شکل یک مدل تئوری کنترل تبدیل نماییم. مدل اقتصادی کلان تحقیق به صورت زیر است:

$$C_k = a + b Y_k$$

$$I_k = e + f (Y_k - Y_{k-1})$$

$$Y_k = C_k + I_k + G_k$$

که هر متغیر به صورت زیر تعریف میشود:

$C_k$  : مخارج مصرفی شخصی به قیمت ثابت ۱۴۰۰

$I_k$  : مخارج سرمایه گذاری ناخالص خصوصی به قیمت ثابت ۱۴۰۰

$G_k$  : مخارج دولتی روی کالاها و خدمات به قیمت ثابت ۱۴۰۰

$Y_k$  : تولید ناخالص ملی به قیمت ثابت ۱۴۰۰ (بجز خالص صادرات کالا و خدمات).

تخمین دو معادله رفتاری بالا بدلیل ملاحظات اقتصادسنجی تخمین قابل قبلی را ارائه نمی دهد. چاو و ابل با وارد کردن عرضه پول ( $M_k$ ) و تبدیل مدل از شکل ساختاری به شکل خلاصه شده مدل زیر را معرفی کردند:

$$C_{k+1} = \theta_0 + \theta_1 C_k + \theta_2 I_k + \theta_3 G_k + \theta_4 M_k$$

$$I_{k+1} = \alpha_0 + \alpha_1 C_k + \alpha_2 I_k + \alpha_3 G_k + \alpha_4 M_k$$

در فرم خلاصه شده بالا مخارج مصرفی ( $C_k$ ) و مخارج سرمایه گذاری ( $I_k$ ) بعنوان متغیرهای وضعیت و مخارج دولتی ( $G_k$ ) و عرضه پول ( $M_k$ ) بعنوان متغیرهای کنترل معرفی می شوند.

## ۳. یافته های تحقیق و نتیجه گیری

در قسمت قبل مدل خطی درجه دوم پیگردی و همچنین مدل اقتصاد کلان و فرم خلاصه شده آن توضیح داده شد.

اکنون برای حل مدل، ابتدا مدل اقتصادی به عنوان محدودیت مساله کنترل برآورد می‌گردد. فرم خلاصه شده مدل به وسیله داده‌های سری زمانی ۱۳۷۰ الی ۱۴۰۰ برای کشور ایران به عنوان محدودیت سیستم، برآورد گردید و به صورت زیر است:

$$C_{k+1} = 2831931.85 + 0.81432C_k + 0.08832I_k - 0.2946G_k + 0.09048M_k$$

$$I_{k+1} = 55389.101 - 0.30713C_k + 0.58594I_k + 0.088416G_k + 0.1804M_k$$

این مدل را تحت سیستم معادلات محدودیت مدل کنترل می‌نویسیم. محدودیت به صورت زیر است:

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k u_k + c_k \quad x_k = \begin{bmatrix} C_k \\ I_k \end{bmatrix} \quad u_k = \begin{bmatrix} G_k \\ M_k \end{bmatrix}$$

با توجه به برآورد معادلات بالا، ضرایب برآوردی در سیستم معادلات محدودیت مدل کنترل جایگزین می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} 0.81432 & 0.08832 \\ -0.30713 & 0.58594 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.2946 & 0.09048 \\ 0.088416 & 0.1804 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 2831931.85 \\ 55389.101 \end{bmatrix}$$

شرط اولیه مدل در اصل همان مقادیر مشاهده شده مصرف و سرمایه گذاری برای سال ۱۴۰۱ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 31017011.54 \\ 2326278.24 \end{bmatrix}$$

کندریک (1986a) بردار وضعیت مطلوب ( $\tilde{x}_k$ ) و بردار کنترل مطلوب ( $\tilde{u}_k$ ) را به صورت زیر در نظر می‌گیرد:

$$\tilde{x} = (1.03)^k \begin{bmatrix} 31017011.54 \\ 2326278.24 \end{bmatrix} \quad \tilde{u} = (1.03)^k \begin{bmatrix} 9880265.32 \\ 34271132.24 \end{bmatrix}$$

این دو معادله بیان می‌دارد که مسیرهای مطلوب برای هر دو متغیر وضعیت و کنترل، رشدی حدود سه درصدی را در افق زمانی مساله بوسیله مدل پوشش می‌دهد. همچنین بر اساس کندریک ماتریس وزن‌ها به صورت زیر می‌باشد. در طراحی اینگونه مدل‌ها معمولاً مقادیر 1000، 100 و یا 10 بعنوان وزنهای متغیرهای اصلی هدف و از مقادیر 10 و 1 به عنوان وزنهای متغیرهای فرعی هدف استفاده نموده‌اند.

$$\hat{W}_N = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \hat{W}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\Lambda}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مدل در نرم افزار متلب حل شده است. بعد از حل مدل مقادیر بهینه متغیرهای وضعیت و کنترل به صورت زیر برای هر دوره بدست می‌آید.

جدول (۱) مقادیر بهینه متغیرهای وضعیت و کنترل طی سال‌های هدف (اعداد به میلیارد ریال)

متغیر کنترل		متغیر وضعیت		افق زمانی
عرضه پول	مخارج دولتی	سرمایه گذاری خصوصی	مصرف شخصی	
مقدار بهینه	مقدار بهینه	مقدار بهینه	مقدار بهینه	
34521718.84	9970236.235	23262778.24	31017011.54	1401
44284981.62	10938595.6	23436016.21	33933455.27	1402
35773202.44	10414168.41	24850468.36	33412446.26	1403
38908618.01	10750099.39	25880702.58	34946039.36	1404
-----	-----	27501490.31	36476342.23	1405

منبع: محاسبات تحقق در برنامه متلب

تجزیه و تحلیل این نتایج نشان می‌دهد که انتخاب وزن‌ها و اهداف مطلوب تأثیر مستقیمی بر توازن بین حفظ رشد و کنترل نوسانات ایجادشده توسط سیاست‌های مالی و پولی دارد. این یافته‌ها با مطالعات مشابه در ادبیات که از QLP برای تحلیل سیاست‌های اقتصادی استفاده کرده‌اند هم‌راستا است. (Chow, ۱۹۷۵; NBER policy studies, ۲۰۱۹).

## منابع

1. Abel, A. B. (1975). A comparison of three control algorithms to the monetarist-fiscalist debate. *Annals of Economic and Social Measurement*, 4, 239–252.
2. Chow, G. (1975). *Analysis and Control of Dynamic Economic Systems*. John Wiley & Sons.
3. Fabbri, G., Ferretti, R., & Vigna, S. (2023). Stochastic optimal control problems with delays in the state and in the control via viscosity solutions and applications to optimal advertising and optimal investment problems. *arXiv*.
4. Ferrari, G., & Rodosthenous, N. (2018). Optimal control of debt-to-GDP ratio in an N-state regime switching economy. *arXiv*.
5. Gnecco, A., Vigna, S., & Boffa, L. (2024). *Dynamic programming in economics on a quantum annealer* (NBER Working Paper No. 31326). National Bureau of Economic Research.
6. Holly, S., & Hughes Hallet, A. (2010). *Optimal Control, Expectations and Uncertainty*. Cambridge University Press.
7. Hosoya, Y. (2021). On the basis of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation in economic dynamics. *arXiv preprint arXiv:2102.07431*.
8. Hosoya, Y. (2024). The Hamilton-Jacobi-Bellman equation in economic dynamics with a non-smooth fiscal policy. *ResearchGate*.
9. Kendrick, D. A. (1982a). Caution and probing in a macroeconomic model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 4, 149–170.
10. Kendrick, D. A. (2005). Stochastic control for economic models: past, present and the paths ahead. *Journal of economic dynamics and control*, 29(1-2), 3-30.
11. Lin, J., Zhang, Z., & Chen, G. (2022). Uncertain stochastic optimal control with jump and its application to stock model with jump. *Symmetry*, 14(9), 1885.
12. Sethi, S. P. (2022). *Optimal control theory: Applications to management science and economics* (4th ed.). Springer.
13. Tarrazo, M. J. (2008). *Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction*.
14. Weber, T. A. (2011). *Optimal Control Theory with Applications in Economics*. MIT Press.



## بررسی جامع تأثیر الگوریتم‌های بهینه‌سازی بر سرعت همگرایی و تعمیم مدل‌های یادگیری عمیق

مهدی نصرتی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه پیام نور،

صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران [nosrati@pnu.ac.ir](mailto:nosrati@pnu.ac.ir)

**چکیده:** در سالهای اخیر رشد مدل‌های یادگیری عمیق و تقاضای محاسباتی بزرگ برای آموزش آنها، نیاز به الگوریتم‌های بهینه‌سازی سریع و قابل اعتماد را افزایش داده است. در این مقاله، نقش و تأثیر الگوریتم‌های بهینه‌سازی در آموزش مدل‌های یادگیری عمیق بر اساس دو معیار سرعت همگرایی و توان تعمیم بررسی شده است. مطالعه روش‌های گرادیانی SGD و مشتقات تطبیقی مانند AdamW و Adam و خانواده روش‌های شبه نیوتنی مانند L-BFGS، K-FAC و نسخه‌های Kronecker-factored و نیز الگوریتم SAM، نتایج نشان می‌دهد که روش‌های تطبیقی با اینکه معمولاً سرعت همگرایی اولیه بالاتری دارند، ولی در بسیاری از موارد، دقت تعمیم آنها نسبت به SGD کمتر است. در مقابل، روش‌های شبه نیوتنی ساختار آگاه<sup>۲</sup> با مدیریت بهینه هزینه محاسباتی و حافظه می‌توانند تعادلی مطلوب بین سرعت و دقت ارائه دهند. همچنین، روش‌هایی مانند SAM به عنوان ابزارهایی برای بهبود تعمیم با کنترل هندسه فضای خطا مورد استفاده قرار می‌گیرند.

**کلمات کلیدی:** بهینه‌سازی، یادگیری عمیق، گرادیان کاهش، شبه نیوتنی

### ۱. مقدمه

پیشرفت سریع در طراحی شبکه‌های عصبی عمیق و افزایش مقیاس داده‌ها و مدل‌ها باعث شده است که چالش‌های بهینه‌سازی به یکی از محورهای اساسی در هوش مصنوعی تبدیل شود. آموزش مدل‌هایی با میلیون‌ها تا میلیاردها پارامتر مستلزم الگوریتم‌هایی است که از نظر محاسباتی کارا بوده و در عین حال توان تعمیم مطلوبی ارائه دهند. انتخاب الگوریتم مناسب تأثیر مستقیمی بر زمان آموزش، پایداری، و کیفیت مدل نهایی دارد. در سال‌های اولیه یادگیری عمیق، روش‌های گرادیان پایه مانند SGD<sup>۳</sup> همراه با مومنوم رواج داشتند؛ اما با رشد مدل‌ها، روش‌های تطبیقی نظیر Adam<sup>۴</sup>، RMSProp و AdaGrad محبوبیت یافتند. با این حال، از حدود سال ۲۰۲۰ به بعد شواهد

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

<sup>۲</sup> Structure-Aware Quasi-Newton

<sup>۳</sup> Stochastic Gradient Descent

<sup>۴</sup> Adaptive Moment Estimation



تجربی نشان داده‌اند که روش‌های تطبیقی گرچه سریع‌تر همگرا می‌شوند، ولی تعمیم ضعیف‌تری نسبت به SGD دارند [1-3]. از سوی دیگر، روش‌های شبه‌نیوتنی مانند L-BFGS یا K-FAC که از اطلاعات مرتبه دوم استفاده می‌کنند، سرعت همگرایی بالاتری دارند ولی نیازمند حافظه و توان محاسباتی بیشتری هستند [4,5]. همچنین روش‌های جدیدی مانند SAM<sup>5</sup> با کنترل تیزی مینیمم‌ها توانسته‌اند تعمیم را به‌طور مؤثری بهبود بخشند [6,7]. ابتدا پایه‌های نظری روش‌های گرادیانی (SGD) و مشتقات تطبیقی مانند Adam و AdamW و خانواده روش‌های شبه‌نیوتنی مانند L-BFGS، تقریب انحنای فاکتور کرونگر (K-FAC) و نسخه‌های Kronecker-factored تشریح می‌شوند. سپس شواهد تجربی و تحلیلی گردآوری شده و نقاط قوت و محدودیت‌های هر رویکرد مورد نقد قرار می‌گیرد. در پایان، توصیه‌هایی عملی برای انتخاب بهینه‌سازها در سناریوهای واقعی و مسیرهای تحقیقاتی آینده ارائه می‌شود.

## ۲. الگوریتم‌ها و اصول پایه

### ۲-۱. روش‌های گرادیان پایه (SGD)

روش SGD با استفاده از نمونه‌های تصادفی، پارامترها را در جهت منفی گرادیان به‌روزرسانی می‌کند. ترکیب آن با مومنتوم و زمان‌بندی نرخ یادگیری باعث پایداری بیشتر و همگرایی سریع‌تر می‌شود. این روش به دلیل تمایل به یافتن مینیمم‌های تخت، اغلب تعمیم بهتری نسبت به سایر روش‌ها دارد [2,3].

### ۲-۲. بهینه‌سازهای تطبیقی

الگوریتم‌های AdaGrad، RMSProp، Adam و نسخه‌های اصلاح‌شده آن مانند AdamW با تنظیم خودکار نرخ یادگیری برای هر پارامتر، همگرایی اولیه را سرعت می‌بخشند. با این حال، ممکن است مدل در مینیمم‌های تیز قرار گیرد که موجب افت تعمیم می‌شود [1,7].

### ۲-۳. روش‌های شبه‌نیوتنی

روش‌های شبه‌نیوتنی مانند BFGS و L-BFGS از تقریب ماتریس هسین برای برداشتن گام‌های مؤثرتر در فضای پارامتر استفاده می‌کنند. نسخه‌های مدرن‌تر نظیر K-FAC، اطلاعات فاکتورسازی کرونگری<sup>۶</sup> را برای بهینه‌سازی شبکه‌های بزرگ با هزینه قابل قبول به کار می‌گیرند [4,5].

### ۲-۴. روش‌های هندسه‌محور

روش SAM<sup>۷</sup> با افزودن مؤلفه‌ای که حساسیت تابع هزینه به تغییرات پارامترها را کاهش می‌دهد، به یافتن مینیمم‌های تخت‌تر کمک می‌کند. نسخه‌های پیشرفته‌تر مانند GSAM و Surrogate Gap Minimization عملکرد بهتری در شبکه‌های بزرگ نشان داده‌اند [6-8].

<sup>5</sup> Sharpness-Aware Minimization

<sup>6</sup> Kronecker factorization

<sup>7</sup> Sharpness-Aware Minimization

### ۳. تحلیل تأثیر بر سرعت و دقت

#### ۳-۱. سرعت همگرایی

روش‌های تطبیقی در مراحل اولیه آموزش معمولاً سریع‌تر هستند، زیرا نرخ یادگیری را به صورت پویا تنظیم می‌کنند. با این حال، روش‌های شبه‌نیوتنی مانند K-FAC در شرایطی که منابع کافی موجود است، می‌توانند گام‌های بزرگ‌تر و مؤثرتری بردارند، هرچند هر گام محاسبات سنگین‌تری دارد. [4]

#### ۳-۲. دقت و توان تعمیم

مطالعات نشان داده‌اند که SGD نسبت به روش‌های تطبیقی، مینیمم‌های تخت‌تر را کشف می‌کند و در نتیجه تعمیم بهتری دارد [2,3]. در مقابل، Adam گرچه سریع‌تر است، اما ممکن است در مینیمم‌های تیزتر گیر کند [1]. ترکیب روش‌ها یا به‌کارگیری اصلاحات هندسه‌محور مانند SAM می‌تواند این ضعف را تا حدی برطرف کند [6-8]. و نیز استفاده از الگوریتم‌های فرگشتی در مدیریت مسائل نامتعادل، به ویژه در زمینه‌های پزشکی و بیوانفورماتیک، نشان دهنده کارایی و قابلیت‌های این روش‌ها است ولی گرچه این روش دقت را افزایش می‌دهد ولی هزینه محاسباتی بالایی دارد [9]. همچنین انتخاب بهینه‌ساز مناسب در بهبود کیفیت تصویر نقش بسزایی دارد. [10]

#### ۴. نتیجه‌گیری

در فاز آموزشی مدل‌ها، استفاده از Adam یا AdamW منطقی است، اما برای بهینه‌سازی نهایی توصیه می‌شود از SGD یا ترکیب روش‌ها استفاده شود. در معماری‌هایی با ساختار کرونکر یا لایه‌ای، روش‌های شبه‌نیوتنی مانند K-FAC انتخاب مناسبی هستند. روش‌های هندسه‌محور مانند SAM می‌توانند شکاف میان تعمیم و سرعت را کاهش دهند. در پژوهش‌های آتی باید به تحلیل دقیق‌تر هزینه زمانی، مصرف حافظه و هندسه فضای خطا پرداخت.

#### منابع

1. Gupta A, et al. Adam vs. SGD: Closing the generalization gap on image classification. Workshop Opt-ML; 2021.
2. Zhou P, Zhu J, Wang S, et al. Towards theoretically understanding why SGD escapes local minima faster than Adam. NeurIPS; 2020.
3. Comprehensive survey on the effectiveness of Sharpness-Aware Minimization. Journal of Machine Learning Research; 2024.
4. Goldfarb D, Ren Y, Bahamou A. Practical quasi-Newton methods for training deep neural networks. NeurIPS; 2020.
5. Martens J, Grosse R. Kronecker-Factored Approximate Curvature for Modern Architectures. ICLR; 2021.
6. Foret P, Kleiner A, Mobahi H, Neyshabur B. Sharpness-Aware Minimization for Efficiently Improving Generalization. arXiv preprint arXiv:2010.01412; 2020.



7. Du J, Yan H, Feng J, Zhou JT, Zhen L, Goh RYF, Tan VYF. Efficient Sharpness-Aware Minimization for Improved Training of Neural Networks. arXiv; 2021.
8. Zhuang J, Gong B, Yuan L, Cui Y, Adam H, Dvornek N, Tatikonda S, Duncan J, Liu T. Surrogate Gap Minimization Improves Sharpness-Aware Training. arXiv; 2022.
9. نرگسی ش، کیوانپور م. بهینه‌سازی مدل‌های یادگیری عمیق با استفاده از الگوریتم‌های فرگشتی: چالش‌ها و راهکارها. همایش بین‌المللی مهندسی کامپیوتر، برق و تکنولوژی؛ ۱۴۰۳.
۱۰. حیدران ز، داروقه‌امنیه ز. بهبود ساختار الگوریتم یادگیری عمیق در پردازش تصویر. نشریه علوم و فناوری رایانه؛ ۱۴۰۱.





آمار

## مدل سازی معادلات ساختاری در تحقیقات علوم رفتاری، بررسی مزایا و چالش های روش شناختی

مهسا مختاری\*

گروه معماری، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

[Mokhtari.m@pnu.ac.ir](mailto:Mokhtari.m@pnu.ac.ir)

**چکیده:** مدل سازی معادلات ساختاری (SEM) به عنوان یک رویکرد آماری چندمتغیره قدرتمند، به طور فزاینده ای در تحقیقات علوم رفتاری و حوزه های میان رشته ای همچون معماری برای بررسی روابط پیچیده بین سازه های مشاهده ناپذیر (پنهان) مورد استفاده قرار می گیرد. هدف این مقاله، ارائه یک بررسی از مزایا و چالش های روش شناختی به کارگیری SEM در این حوزه ها است. مزایای کلیدی SEM شامل قابلیت مدل سازی صریح متغیرهای پنهان با در نظر گرفتن خطای اندازه گیری، توانایی آزمون مدل های نظری پیچیده شامل روابط مستقیم و غیرمستقیم، انجام تحلیل عاملی تأییدی (CFA) برای اعتبارسنجی ابزارهای اندازه گیری، و ارائه چارچوبی انعطاف پذیر برای مقایسه مدل های رقیب است. این ویژگی ها درک عمیق تری از پدیده های رفتاری و ادراکی - از جمله تجربه انسان در فضاهای معماری - فراهم می آورند. با این حال، استفاده از SEM با چالش های مهمی نیز همراه است که از جمله آن ها می توان به نیاز به حجم نمونه بزرگ، پیچیدگی ذاتی و لزوم دانش آماری بالا، حساسیت به نقض فرضیات آماری، و خطر بیش برآزش مدل در صورت اصلاحات پس از وقوع اشاره کرد. علاوه بر این، پتانسیل بروز راه حل های غیرقابل قبول نیز از دیگر معایب روش شناختی است که نیازمند دقت و تجربه محقق است. این مقاله با برجسته کردن اهمیت درک کامل قابلیت ها و محدودیت های SEM، به پژوهشگران در علوم رفتاری و معماری توصیه می کند تا با رعایت دقیق اصول روش شناختی و در نظر گرفتن ملاحظات عملی، از این ابزار برای اعتباربخشی و پیشبرد دانش در رشته خود بهره برداری کنند.

**کلمات کلیدی:** مدل سازی معادلات ساختاری، علوم رفتاری، معماری، مزایا و معایب، روش شناسی.

## ۱. مقدمه

مطالعات در حوزه علوم انسانی، به ویژه در شاخه‌هایی نظیر روانشناسی و علوم رفتاری، اغلب با مفاهیم انتزاعی و چندوجهی سروکار دارند که به طور مستقیم قابل مشاهده یا اندازه‌گیری نیستند. (Hair et al., 2021) این مفاهیم که تحت عنوان «متغیرهای پنهان» (Latent Variables) شناخته می‌شوند، از طریق مجموعه‌ای از شاخص‌های مشاهده‌پذیر (Observed Variables) ارزیابی می‌شوند. برای مثال، در روانشناسی مفاهیمی چون «رضایت شغلی»، «کیفیت زندگی» یا «استرس ادراک‌شده» و در رشته معماری، مفاهیمی همچون «ادراک از فضای معماری» یا «حس مکان»، به طور مستقیم قابل اندازه‌گیری نیستند، بلکه باید با استفاده از ابزارهایی نظیر پرسشنامه و تحلیل شاخص‌های متعدد سنجیده شوند.

چالش اصلی زمانی بروز می‌کند که پژوهشگران بخواهند روابط پیچیده و همزمان بین این متغیرهای پنهان را تحلیل کنند. روش‌های آماری سنتی همچون رگرسیون چندگانه یا تحلیل واریانس، محدودیت‌های جدی دارند؛ این روش‌ها معمولاً تنها قادر به تحلیل روابط بین متغیرهای مشاهده‌پذیر هستند و نمی‌توانند خطای اندازه‌گیری را به درستی لحاظ کنند. (Ullman, 2006) در نتیجه، احتمال تخمین‌های جانبدارانه و کاهش دقت مدل‌های نظری وجود دارد.

در این راستا، مدل‌سازی معادلات ساختاری (Structural Equation Modeling – SEM) به عنوان رویکردی قدرتمند و انعطاف‌پذیر، پاسخی جامع به این محدودیت‌ها ارائه می‌دهد (Yuan & Bentler, 2006). این روش امکان تحلیل همزمان روابط پیچیده میان متغیرهای پنهان، لحاظ خطای اندازه‌گیری، اعتبارسنجی سازه‌ها از طریق تحلیل عاملی تأییدی (CFA)، و آزمون تجربی نظریه‌های پیچیده با شاخص‌های برازش متنوع را فراهم می‌آورد (Abd-El-Fattah, 2010; Hair et al., 2021; Kline, 2023). به همین دلیل، SEM نه تنها در روانشناسی و علوم رفتاری، بلکه در حوزه‌هایی میان‌رشته‌ای مانند معماری – جایی که مطالعه ادراک و تجربه انسانی در فضا اهمیت حیاتی دارد – به ابزاری کارآمد برای تقویت بنیان‌های علمی پژوهش تبدیل شده است.

با وجود این، کاربرد SEM مستلزم درک عمیق از قابلیت‌ها و محدودیت‌های آن است. نیاز به حجم نمونه بزرگ، پیچیدگی در مدل‌سازی و تفسیر، حساسیت به مفروضات آماری، خطر بیش‌برازش در اصلاح مدل، و احتمال بروز راه‌حل‌های غیرقابل قبول، از جمله چالش‌های جدی این رویکرد محسوب می‌شوند. بنابراین، پژوهش حاضر با تأکید بر اهمیت علوم رفتاری در حوزه‌هایی مانند روانشناسی و معماری، به بررسی مزایا و چالش‌های مدل‌سازی معادلات ساختاری پرداخته است تا به صورت روشمند، بهره‌گیری صحیح از این ابزار را تبیین کند.

## روش معادلات ساختاری SEM

SEM یک روش آماری برای آزمایش میزان تناسب یک مدل نظری با مجموعه ای از داده های مشاهده شده با تجزیه و تحلیل روابط بین متغیرهای پنهان و مشاهده شده از طریق یک سیستم معادلات رگرسیون است (Abd-El-Fattah, 2010). مدل سازی معادلات ساختاری (SEM) به ویژه هنگام برخورد با متغیرهای پنهان، که به عنوان عوامل یا سازه ها نیز شناخته می شوند، مفید است. متغیرهای پنهان مفاهیم نظری هستند که نمی توان مستقیماً مشاهده یا اندازه گیری کرد.

مدل سازی معادلات ساختاری یک روش آماری پیشرفته است که برای تحلیل و آزمون نظریه های ساختاری پیچیده در مورد پدیده های مختلف استفاده می شود. این روش به ویژه در مواردی مانند این کاربرد دارد: بررسی فرآیندهای علی در مشاهدات چندمتغیره، آزمون روابط پیچیده بین متغیرهای وابسته و مستقل متعدد، تحقیقات غیرتجربی که روش های آزمون نظریه در آنها به خوبی توسعه نیافته است (Hair et al., 2021, pp. 3-4)، مواردی که ملاحظات اخلاقی امکان طراحی آزمایشی را محدود می کند (Abd-El-Fattah, 2010, p. 4).

انواع متغیرها در مدل معادلات ساختاری ۱ SEM

### متغیرهای پنهان<sup>۲</sup>

متغیرهای پنهان یا عوامل، سازه های نظری هستند که مستقیماً قابل مشاهده نیستند. مثال هایی از این متغیرها عبارتند از: نگرش ها، ضریب هوشی، ویژگی های شخصیتی، وضعیت اجتماعی-اقتصادی و ... (Yuan & Bentler, 2006, p. 297). این متغیرها به صورت عملیاتی و از طریق رفتارها یا شاخص های قابل مشاهده تعریف می شوند (Abd-El-Fattah, 2010, p. 4).

### متغیرهای آشکار<sup>۳</sup>

متغیرهای آشکار یا مشاهده شده، داده های خام قابل اندازه گیری مستقیم هستند (Hair et al., 2021, p. 4). این متغیرها به عنوان شاخص هایی برای سازه های زیربنایی عمل می کنند و می توانند شامل این موارد باشند: پاسخ های خودگزارشی، نمرات آزمون های پیشرفت، پاسخ های کدگذاری شده به سوالات مصاحبه (Abd-El-Fattah, 2010, p. 4).

در یک مطالعه عملکرد تحصیلی، «توانایی ریاضی» می تواند یک متغیر پنهان باشد. برای اندازه گیری این متغیر، از شاخص های گفته شده به عنوان متغیرهای آشکار استفاده می شود: نمرات آزمون های ریاضی، نمرات کلاسی ریاضی، ارزیابی معلمان از مهارت های ریاضی دانش آموز (Abd-El-Fattah, 2010, p. 11).

مفاهیم کلیدی دیگر در معادلات ساختاری تقسیم بندی انواع متغیرهاست که به دو قسمت ۱- متغیرهای پنهان برونزا شامل متغیرهای معادل متغیرهای مستقل هستند و باعث تغییر در سایر متغیرهای پنهان مدل می شوند. ۲- متغیرهای پنهان درونزا: این متغیرها معادل متغیرهای وابسته هستند و تحت تأثیر مستقیم یا غیرمستقیم متغیرهای برونزا قرار دارند (Abd-El-Fattah, 2010, p. 11). مدل معادلات ساختاری همچنین امکان بررسی روابط بین متغیرهای پنهان در یک مدل ساختاری را فراهم می کند، که به درک بهتر پدیده های پیچیده کمک می کند (Hair et al., 2021, p. 5).

## متغیرهای وابسته و مستقل در مدل معادلات ساختاری

<sup>1</sup> Structural Equation Modeling

<sup>2</sup> Latent variables

<sup>3</sup> Observed Variables or Manifest Variables

در مدل‌سازی معادلات ساختاری (SEM)، دو نوع اصلی متغیر وجود دارد: متغیرهای آشکار و متغیرهای پنهان (Hair et al., 2021, pp. 4-5). متغیرهای آشکار، که با مستطیل یا مربع نمایش داده می‌شوند، داده‌های خام قابل اندازه‌گیری مستقیم مانند نمرات آزمون یا پاسخ‌های نظرسنجی را ارائه می‌دهند (Abd-El-Fattah, 2010, p. 4). در مقابل، متغیرهای پنهان، که با دایره یا بیضی نشان داده می‌شوند (Hair et al., 2021, pp. 4-5)، سازه‌های نظری غیرقابل مشاهده مستقیم هستند که از طریق چندین شاخص اندازه‌گیری می‌شوند (Abd-El-Fattah, 2010, p. 4) و مفاهیم زیربنایی مورد علاقه محقق مانند ویژگی‌های شخصیتی یا نگرش‌ها را نشان می‌دهند (Ullman, 2006, p. 35). در نمودارهای مسیر SEM، فلش‌های تک‌سر نشان‌دهنده تأثیر یک متغیر بر متغیر دیگر هستند، در حالی که فلش‌های دوسر همبستگی یا کوواریانس بین متغیرها را نشان می‌دهند (Abd-El-Fattah, 2010, p. 9). در زمینه یک مدل مسیر، رابطه بین متغیرهای پنهان و آشکار بخشی از مدل اندازه‌گیری است که نحوه اندازه‌گیری متغیرهای پنهان توسط متغیرهای مشاهده شده را مشخص می‌کند (Hair et al., 2021, pp. 5-6). مدل اندازه‌گیری پیوندهای بین متغیرهای پنهان و معیارهای مشاهده شده آنها را به تصویر می‌کشد (Abd-El-Fattah, 2010, p. 7). به عنوان مثال، یک مدل اندازه‌گیری می‌تواند نشان دهد که چگونه نمرات یک آزمون ریاضی (متغیر مشاهده شده) با توانایی ریاضی دانش آموز (متغیر پنهان) مرتبط است (Abd-El-Fattah, 2010, pp. 9-10). مدل کامل SEM همچنین شامل یک مدل ساختاری است که روابط بین خود متغیرهای پنهان را به تصویر می‌کشد (Abd-El-Fattah, 2010, pp. 6-7).

#### مدل معادلات ساختاری

مدل‌سازی معادلات ساختاری (SEM) یک روش آماری است که رویکردی تاییدی برای تجزیه و تحلیل یک نظریه ساختاری در مورد یک پدیده دارد. می‌توان از آن برای مدل‌سازی روابط پیچیده بین چندین متغیر استفاده کرد (Hair et al., 2021, p. 3). اینکه آیا SEM برای اندازه‌گیری احساس امنیت یا ادراک فرد از راحتی فضا مناسب است یا خیر، بستگی به نحوه مفهوم‌سازی و اندازه‌گیری آن رفتارها دارد. در این قسمت با مثال نحوه استفاده از SEM در این زمینه، بر اساس اطلاعات منابع آمده است:

#### مثال مدل معادلات ساختاری در علوم رفتاری و معماری

متغیرهای پنهان: اگر انتخاب و اولویت به عنوان ساختارهای زیربنایی و غیرقابل مشاهده (متغیرهای پنهان) در نظر گرفته شوند، می‌توان از SEM استفاده کرد (Hair et al., 2021, p. 4). برای مثال «احساس امنیت در فضاهای عمومی» یک متغیر پنهان است، زیرا به‌طور مستقیم قابل مشاهده یا اندازه‌گیری نیست ولی برای سنجش این سازه پنهان می‌توان از شاخص‌های واقعی و قابل مشاهده استفاده کرد، مانند: تعداد دفعات استفاده افراد از یک پارک یا میدان در ساعات مختلف شبانه‌روز، میزان روشنایی (لوکس نوری) ثبت شده در فضا، تعداد دوربین‌های نظارتی نصب شده، یا آمار واقعی حضور افراد در فضاهای عمومی در ساعات شب. این داده‌ها آشکار هستند زیرا به‌طور مستقیم قابل مشاهده، شمارش یا اندازه‌گیری‌اند و می‌توانند به‌عنوان اندیکاتورهایی برای احساس امنیت در مدل SEM عمل کنند. به‌طور کلی متغیرهای آشکار، انتخاب‌های واقعی، متغیرهای مشاهده شده یا آشکار خواهند بود (Hair et al., 2021, p. 4). به متغیرهای آشکار اندیکاتور<sup>۴</sup> نیز گفته می‌شود (Hair et al., 2021, p. 4).

مدل اندازه‌گیری<sup>۵</sup>: یک مدل اندازه‌گیری در SEM مشخص می‌کند که چگونه متغیرهای پنهان توسط متغیرهای مشاهده شده اندازه‌گیری می‌شوند. این مدل ترجیحات اساسی را به انتخاب‌ها یا رتبه‌بندی‌های مشاهده شده مرتبط می‌کند (Hair et al., 2021, pp. 4-5).

<sup>4</sup> Indicators

<sup>5</sup> Measurement Model

## مدل ساختاری<sup>۶</sup>

برای مثال، یک مدل ساختاری می‌تواند این فرضیه را بررسی کند که احساس امنیت در پارک‌های شهری (متغیر پنهان) چگونه بر میزان استفاده شهروندان از پارک یا رضایت کلی از فضاهای عمومی تأثیر می‌گذارد. در این حالت، داده‌های آشکار مانند تعداد دفعات حضور افراد در پارک در ساعات مختلف شبانه‌روز، شدت روشنایی ثبت شده، یا آمار واقعی استفاده از فضا به‌عنوان شاخص‌هایی برای سنجش متغیر پنهان «احساس امنیت» عمل می‌کنند (Hair et al., 2021, pp. 7-8).

## ۲. نتایج اصلی

### مزایای مدل‌سازی معادلات ساختاری (SEM):

SEM یک تکنیک تحلیل داده‌های چند متغیره «نسل دوم» است که بر چندین محدودیت کلیدی روش‌های «نسل اول» مانند رگرسیون چندگانه و ANOVA غلبه می‌کند. نقاط قوت اصلی آن در توانایی آن در مدیریت مدل‌های نظری پیچیده شامل مفاهیم غیرقابل مشاهده نهفته است.

SEM یک روش آماری قدرتمند است که مزایای متعددی نسبت به تکنیک‌های نسل اول مانند رگرسیون چندگانه یا تحلیل واریانس (ANOVA) ارائه می‌دهد (Yuan & Bentler, 2006, p. 365).

- توانایی مدل‌سازی متغیرهای پنهان: مزیت اصلی SEM ظرفیت آن برای مدل‌سازی متغیرهای پنهان (که سازه یا عامل نیز نامیده می‌شوند) است که مفاهیم نظری هستند که نمی‌توان آنها را مستقیماً مشاهده یا اندازه‌گیری کرد، مانند نگرش‌ها، خودپنداره یا انگیزه. این متغیرهای پنهان به طور غیرمستقیم از طریق چندین متغیر مشاهده شده، که به‌عنوان شاخص‌ها یا متغیرهای آشکار شناخته می‌شوند، ارزیابی می‌شوند (Yuan & Bentler, 2006, p. 365). این روش زمانی مناسب است که مفاهیم مورد علاقه قابل مشاهده نیستند و به طور غیرمستقیم توسط چندین شاخص اندازه‌گیری می‌شوند (Hair et al., 2021, p. 4).

- خطای اندازه‌گیری را در نظر می‌گیرد: رویه‌های چند متغیره سنتی فرض می‌کنند که متغیرها بدون خطای اندازه‌گیری می‌شوند، که در عمل به ندرت صادق است، به خصوص در علوم رفتاری. SEM به صراحت خطای اندازه‌گیری را با جدا کردن آن از نمرات واقعی ویژگی‌ها در نظر می‌گیرد، که امکان اندازه‌گیری دقیق‌تر را فراهم می‌کند و از عدم دقت‌هایی که هنگام نادیده گرفتن خطای اندازه‌گیری ممکن است ایجاد شود، جلوگیری می‌کند. خطای مرتبط با متغیرهای مشاهده شده، هم خطای اندازه‌گیری تصادفی و هم منحصر به فرد بودن خطا (واریانس مختص یک شاخص خاص) را منعکس می‌کند (Hair et al., 2021; Ullman, 2006). SEM می‌تواند خطای اندازه‌گیری را در متغیرهای مشاهده شده محاسبه کند و اندازه‌گیری دقیق‌تری از مفاهیم نظری مورد علاقه ارائه دهد (Hair et al., 2021, p. 4). این مسئله امکان تخمین و حذف خطای اندازه‌گیری را فراهم می‌کند (Ullman, 2006, p. 37).

- تحلیل همزمان روابط پیچیده: SEM به محققان اجازه می‌دهد تا به طور همزمان یک سیستم کامل از روابط پیچیده بین متغیرهای مستقل و وابسته متعدد را مدل‌سازی و تخمین بزنند. این روش نسبت به روش‌هایی مانند رگرسیون چندگانه که فقط می‌توانند زنجیره‌های علی را به صورت تکه‌ای تخمین بزنند و به طور بالقوه بر کیفیت نتایج تأثیر بگذارند، برتر است. این ویژگی، SEM را برای آزمایش نظریه‌های پیچیده بسیار مؤثر

<sup>6</sup> Structural Model

می‌کند (Byrne, 2001; Hair et al., 2021; Ullman, 2006). SEM به ویژه زمانی مفید است که پدیده‌ها پیچیده و چند بعدی باشند و امکان آزمایش کامل و همزمان همه روابط را فراهم کنند (Ullman, 2006, p. 37). این روش همچنین امکان بررسی روابط پیچیده بین چند متغیر وابسته و مستقل را فراهم می‌کند (Hair et al., 2021, p. 4).

• انعطاف‌پذیری و تطبیق‌پذیری: چارچوب کلی SEM طیف گسترده‌ای از مدل‌های آماری پرکاربرد، از جمله تحلیل عاملی تأییدی (CFA)، مدل‌های خطا در متغیرها، مدل‌های معادلات همزمان و مدل‌های منحنی رشد پنهان را پوشش می‌دهد. می‌توان از آن برای آزمایش تغییرناپذیری چندگروهی، تجزیه و تحلیل داده‌های طولی و ارزیابی اعتبار سازه از طریق طرح‌های چندصفتی- چندروشی (MTMM) استفاده کرد (Byrne, 2001; Yuan & Bentler, 2006).

### معایب و محدودیت‌های مدل‌سازی معادلات ساختاری (SEM):

علیرغم نقاط قوت فراوان، SEM دارای محدودیت‌ها و مشکلات بالقوه‌ای است که محققان باید آنها را در نظر بگیرند.

معایب کلیدی عبارتند از:

• نیاز به حجم نمونه بزرگ: SEM یک تکنیک با حجم نمونه بزرگ است. خواص آماری آن مجانبی هستند، به این معنی که فقط برای نمونه‌های بزرگ درست بودن آنها ثابت می‌شود. نمونه‌های کوچک می‌توانند منجر به عدم همگرایی، راه‌حل‌های نامناسب (مثلاً واریانس‌های خطای منفی) و کمبود توان آماری شوند. برخی منابع پیشنهاد می‌کنند که برای دستیابی به تخمین‌های پارامتر پایدار، اغلب به حجم نمونه حداقل ۱۵۰ نیاز است، در حالی که برخی دیگر خاطر نشان می‌کنند که برخی از روش‌های تخمین ممکن است به نمونه‌هایی به بزرگی ۴۰۰ یا ۵۰۰ نیاز داشته باشند (Byrne, 2001; Ullman, 2006). SEM به حجم نمونه کافی نیاز دارد، به ویژه زمانی که با مدل‌های پیچیده سروکار است (Hair et al., 2021, p. 20).

• خطر اشتباه در تعیین مدل: از آنجا که SEM مستلزم آن است که محقق مدل را از قبل مشخص کند، خطر قابل توجهی در تعیین مدل وجود دارد. یک مدل اشتباه مشخص می‌تواند منجر به تخمین پارامترهای مغرضانه، راه‌حل‌های نامناسب (مانند واریانس‌های خطای منفی) و نتیجه‌گیری‌های نادرست شود. حتی مدلی که برازش خوبی را نشان می‌دهد، هنوز هم می‌تواند به اشتباه مشخص شود (Byrne, 2001).

• پیچیدگی و احتمال سوءاستفاده: SEM یک روش‌شناسی پیچیده است. پیچیدگی آن می‌تواند منجر به سوءاستفاده، به ویژه توسط مبتدیان، شود. اشتباهات رایج شامل عدم مقیاس‌بندی صحیح متغیرهای پنهان، عدم درک شناسایی مدل و تفسیر نادرست شاخص‌های نیکویی برازش است. این فرآیند شامل مراحل متعددی از جمله تعیین مشخصات مدل، تخمین، ارزیابی و اغلب اصلاح است که باید توسط نظریه هدایت شود (Djafri et al., 2020; Hair et al., 2021; Ullman, 2006). محقق در ابتدا باید مدل را بر اساس تئوری یا دانش قبلی مشخص کند (Hair et al., 2021, p. 8).

• مشکلات مربوط به ارزیابی نیکویی برازش: آزمون آماری اصلی برای برازش مدل، آزمون کای دو ( $\chi^2$ )، به اندازه نمونه بسیار حساس است. با نمونه‌های بزرگ، تقریباً همیشه معنی‌دار خواهد بود و حتی برای اختلافات جزئی منجر به رد مدل می‌شود. این امر منجر به توسعه شاخص‌های نیکویی برازش جایگزین متعددی شده است (به عنوان مثال، RMSEA، CFI). با این حال، هیچ شاخص قطعی واحدی وجود ندارد و محققان تشویق می‌شوند که چندین شاخص را گزارش کرده و برازش را از دیدگاه‌های مختلف ارزیابی

کند. استفاده از مقادیر حد آستانه برای این شاخص‌ها نیز می‌تواند مشکل‌ساز باشد و باید با احتیاط اعمال شود.

تفسیر علی: در حالی که SEM می‌تواند روابط علی را پیشنهاد کند، مهم است که به یاد داشته باشید که همبستگی برابر با علیت نیست (Abd-El-Fattah, 2010, p. 3).

SEM امکان مدل‌سازی روابط پیچیده، مدیریت خطای اندازه‌گیری و آزمایش فرضیه‌های سطح سازه را فراهم می‌کند (Ullman, 2006, p. 37). با این حال، استفاده مناسب از آن مستلزم بررسی دقیق زیربنای نظری، الزامات داده‌ها و محدودیت‌های بالقوه است.

### جمع‌بندی:

مدل‌سازی معادلات ساختاری (SEM) یک روش آماری قدرتمند و انعطاف‌پذیر است که به محققان در علوم رفتاری این امکان را می‌دهد تا روابط پیچیده بین متغیرها را به طور همزمان مدل‌سازی و آزمون کنند. این روش، با توانایی تحلیل مفاهیم انتزاعی یا پنهان و در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری، مزیت قابل توجهی نسبت به روش‌های سنتی مانند رگرسیون دارد. با این حال، استفاده از SEM نیازمند آگاهی کامل از محدودیت‌های آن است؛ از جمله نیاز به حجم نمونه بزرگ، پیچیدگی روش‌شناختی که احتمال سوءاستفاده را بالا می‌برد، حساسیت به فرضیات آماری و چالش‌های مربوط به ارزیابی نیکویی برازش. در نتیجه، SEM ابزاری ارزشمند برای تحقیقات پیچیده است، اما موفقیت در به‌کارگیری آن مستلزم دانش تخصصی، دقت نظری و آماری است تا از نتایج گمراه‌کننده جلوگیری شود و به درک دقیق‌تری از پدیده‌های رفتاری دست یافت.

### منابع و مأخذ:

- Abd-El-Fattah, S. M. (2010). Structural Equation Modeling with AMOS: Basic Concepts, Applications and Programming [Article]. *Journal of Applied Quantitative Methods*, 5, 365+.  
<https://link.gale.com/apps/doc/A353643920/AONE?u=anon~cb7876bf&sid=googleScholar&xid=9dea1a14>
- Byrne, B. M. (2001). Structural equation modeling with AMOS, EQS, and LISREL: Comparative approaches to testing for the factorial validity of a measuring instrument. *International journal of testing*, 1(1), 55-86 .
- Djafri, R., Mohamed Osman ,M., Suzilawati Rabe, N., & Shuid, S. (2020). Investigating quality of life by residents of social housing in eastern Algeria: a structural equation modelling. *Journal of Engineering, Design and Technology*, 18(6), 1907-1926. <https://doi.org/10.1108/JEDT-0-2020-3007>
- Hair, J. F., Hult, G. T. M., Ringle, C. M., Sarstedt, M., Danks, N. P., & Ray, S. (2021). An Introduction to Structural Equation Modeling. In J. F. Hair Jr, G. T. M. Hult, C. M. Ringle, M. Sarstedt, N. P. Danks, & S. Ray (Eds.), *Partial Least Squares Structural Equation Modeling (PLS-SEM) Using R: A Workbook* (pp. 1-29). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-80519-7\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-80519-7_1)
- Kline, R. B. (2023). *Principles and practice of structural equation modeling*. Guilford publications .
- Ullman, J. B. (2006). Structural equation modeling: reviewing the basics and moving forward. *J Pers Assess*, 87(1), 35-50. [https://doi.org/10.1207/s15327752jpa8701\\_03](https://doi.org/10.1207/s15327752jpa8701_03)
- Yuan, K.-H., & Bentler, P. M. (2006). 10 Structural Equation Modeling. In C. R. Rao & S. Sinharay (Eds.), *Handbook of Statistics* (Vol. 26, pp. 297-358). Elsevier. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0169-7161\(06\)26010-3](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0169-7161(06)26010-3)



## تعبیرهای هندسی در روش مجموعه‌ی مقادیر تکین

مهدی کلانتری؛ عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

kalantarimahdi@pnu.ac.ir

شهریار میرزایی، عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

sh\_mirzaee@pnu.ac.ir

**چکیده:** اولین مرحله در روش مجموعه‌ی مقادیر تکین (SSA)، که یک روش ناپارامتری و پر کاربرد در تحلیل سری‌های زمانی است، تبدیل سری زمانی مشاهده شده به ماتریسی به نام ماتریس مسیر است. این ماتریس نقش بسیار مهمی در SSA ایفا می‌کند. در این مقاله، ابتدا با استفاده از تجزیه‌ی مقدار تکین (SVD)، بردارهای تکین چپ و راست و مقادیر تکین ماتریس مسیر را به دست آورده و سپس، تصویر عمودی ستون‌های ماتریس مسیر را روی فضای برداری تولید شده توسط بردارهای تکین چپ به دست می‌آوریم. در ادامه ماتریسی به نام ماتریس ضرایب را تعریف کرده و سپس تعبیر هندسی برای نرم اقلیدسی سطرها و ستون‌های این ماتریس ارائه می‌دهیم. در پایان نیز یک تعبیر هندسی برای نرم فروبنیوس ماتریس مسیر و ماتریس ضرایب ارائه خواهیم داد.

**کلمات کلیدی:** سری‌های زمانی، مجموعه‌ی مقادیر تکین، تجزیه‌ی مقدار تکین، فضای برداری، نرم فروبنیوس.

### ۱ مقدمه

روش تحلیل مجموعه‌ی مقادیر تکین<sup>۱</sup> (SSA) یک روش ناپارامتری و قدرتمند در حوزه‌ی تحلیل سری‌های زمانی است که در علوم مختلف از جمله ریاضیات مالی، فیزیک، هواشناسی، پزشکی، بیمه، پردازش تصویر، پردازش سیگنال و علوم مهندسی کاربرد دارد. در این روش، سری زمانی به اجزای تشکیل دهنده‌ی آن نظیر روند<sup>۲</sup>، مولفه‌های فصلی (با دوره تناوب‌های مختلف) و نوفه<sup>۳</sup> تجزیه می‌شود. برای انجام چنین تجزیه‌ای از روش تجزیه‌ی مقدار تکین<sup>۴</sup> (SVD) که روشی بسیار پرکاربرد در جبر خطی است، استفاده می‌شود. پس از تجزیه‌ی سری زمانی و خارج ساختن نوفه از آن، مولفه‌های آن بازسازی شده و در نهایت، با استفاده از روش‌های پیش‌بینی که در چارچوب روش SSA توسعه یافته‌اند، پیش‌بینی‌هایی در مورد آینده‌ی سری زمانی انجام می‌شود.

روش SSA از چهار مرحله تشکیل شده است که به ترتیب عبارتند از: نشانیدن<sup>۵</sup>، تجزیه‌ی مقدار تکین، گروه‌بندی

\*نویسنده مسئول

<sup>1</sup> Singular Spectrum Analysis

<sup>2</sup> Trend

<sup>3</sup> Noise

<sup>4</sup> Singular Value Decomposition

<sup>5</sup> Embedding



و میانگین گیری قطری. در مرحله ی نشانیدن، ابتدا سری زمانی با  $N$  مشاهده ی  $\{y_1, \dots, y_N\}$  را به  $K$  زیر سری تبدیل می کنیم، وقتی که  $K = N - L + 1$  و  $L$  عددی طبیعی بوده و طول پنجره<sup>۶</sup> نامیده می شود ( $1 < L < N$ ). زیر سری  $j$ ام به ازای  $j = 1, 2, \dots, K$ ، به صورت  $x_{0j} = (y_j, \dots, y_{j+L-1})^T \in \mathbb{R}^L$  تعریف می شود. دقت کنید که زیر سری  $j$ ام یک بردار ستونی با  $L$  مولفه است و  $j$ امین بردار  $L$ -تأخیری نامیده می شود. سپس این بردارهای  $L$ -تأخیری را به صورت ستونی در کنار هم می نشانیم تا تشکیل یک ماتریس  $L \times K$  دهند. این ماتریس که با  $X$  نشان داده می شود، ماتریس مسیر<sup>۷</sup> می نامیم. داریم:

$$X = [x_{01} | \dots | x_{0K}] = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_K \\ y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_L & y_{L+1} & y_{L+2} & \dots & y_N \end{pmatrix}$$

در مرحله ی تجزیه ی مقدار تکین، با استفاده از SVD، ماتریس مسیر  $X$  به صورت  $X = U\Sigma V^T$  تجزیه می شود؛ وقتی که  $U$  یک ماتریس  $L \times d$ ،  $V$  یک ماتریس  $K \times d$  و  $\Sigma$  نیز یک ماتریس قطری  $d \times d$  است. عناصر قطری ماتریس  $\Sigma$ ، مقادیر تکین<sup>۸</sup> ماتریس مسیر  $X$  نامیده شده و با  $\sigma_1, \dots, \sigma_d$  نشان داده می شوند، وقتی که  $d$  برابر است با تعداد مقادیر تکین غیر صفر. ستون های ماتریس  $U$  که یکامتعامل هستند، بردارهای تکین چپ<sup>۹</sup> نامیده می شوند. ستون های ماتریس  $V$  نیز یکامتعامل بوده و بردارهای تکین راست<sup>۱۰</sup> نامیده می شوند. مقادیر تکین و بردارهای تکین نقش بسیار مهمی در برآورد ماتریس مسیر  $X$  و در نتیجه بازسازی سری زمانی ایفا می کنند. هدف این مقاله، بررسی نقش مقادیر تکین و بردارهای تکین در برآورد ماتریس مسیر و ارائه ی تفسیرهای هندسی برای آنها است.

## ۲ ماتریس ضرایب

بردارهای تکین چپ (ستون های ماتریس  $U$ ) تشکیل یک پایه ی یکامتعامل برای فضای ستونی ماتریس مسیر  $X$  (فضای برداری تولید شده به وسیله ی ستون های ماتریس  $X$ ) می دهد [۲]. فرض کنید  $U_i$  نشان دهنده ی  $i$ امین بردار تکین چپ ( $i$ امین ستون ماتریس  $U$ ) باشد. اگر  $\hat{x}_{0j}$  نشان دهنده ی تصویر عمودی  $x_{0j}$  ( $j$ امین ستون ماتریس مسیر  $X$ ) روی بردار  $U_i$  باشد، آنگاه با توجه به یکه بودن  $U_i$ ،  $\hat{x}_{0j}$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{x}_{0j} = \frac{\langle U_i, x_{0j} \rangle}{\|U_i\|^2} U_i = U_i^T x_{0j} U_i = U_i U_i^T x_{0j}. \quad (1)$$

توجه کنید که عدد  $U_i^T x_{0j}$  در رابطه ی (۱)، ضریب بردار  $U_i$  است و آن را می توان معیاری برای میزان مشارکت بردار  $U_i$  در ساختن بردار  $\hat{x}_{0j}$  (یا تقریب بردار  $x_{0j}$ ) در نظر گرفت. هر چقدر قدر مطلق این ضریب بیشتر باشد نشان دهنده ی تاثیر بیشتر بردار  $U_i$  در تقریب بردار  $x_{0j}$  است.

می دانیم که برای به دست آوردن تصویر عمودی برداری مثل  $x$  روی یک فضای برداری با پایه ی  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d\}$  از ماتریس تصویر  $\Pi = A(A^T A)^{-1} A^T$  استفاده می شود، وقتی که ستون های ماتریس  $A$  از بردارهای مستقل خطی

<sup>6</sup>Window Length

<sup>7</sup>Trajectory Matrix

<sup>8</sup>Singular Values

<sup>9</sup>Left Singular Vectors

<sup>10</sup>Right Singular Vectors



$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$  تشکیل شده است [۱]. با توجه به یکامتعامد بودن ستون‌های ماتریس  $U$  داریم:  $U^T U = I$ . بنابراین تصویر عمودی بردار  $x_{0j}$  روی فضای برداری تولید شده به وسیله بردارهای  $U_1, U_2, \dots, U_d$  (ستون‌های ماتریس  $U$ ) به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{x}_{0j} = U U^T x_{0j}. \quad (2)$$

توجه کنید که بردار  $U^T x_{0j}$  در رابطه‌ی (۲)، بردار ضرایب مربوط به  $U_1$  تا  $U_d$  بوده و میزان تاثیر هر یک از بردارهای  $U_1, U_2, \dots, U_d$  را در تقریب بردار  $x_{0j}$  ( $\hat{x}_{0j}$ ) نشان می‌دهد. زیرا:

$$\begin{pmatrix} \text{میزان تاثیر } U_1 \\ \text{میزان تاثیر } U_2 \\ \vdots \\ \text{میزان تاثیر } U_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^T x_{0j} \\ U_2^T x_{0j} \\ \vdots \\ U_d^T x_{0j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^T \\ U_2^T \\ \vdots \\ U_d^T \end{pmatrix} x_{0j} = U^T x_{0j}$$

حال می‌خواهیم با استفاده از رابطه‌ی (۲)، تصویر عمودی همه‌ی ستون‌های ماتریس  $X$  ( $x_{0j}$ ها) را روی فضای برداری تولید شده به وسیله بردارهای یکامتعامد  $U_1, U_2, \dots, U_d$  به دست آوریم. فرض کنید  $\hat{X}$  ماتریسی است که ستون‌های آن از بردارهای تصویر تشکیل شده است، یعنی  $\hat{X} = [\hat{x}_{01}, \hat{x}_{02}, \dots, \hat{x}_{0K}]$ . داریم:

$$\hat{X} = [\hat{x}_{01} | \hat{x}_{02} | \dots | \hat{x}_{0K}] = [U U^T x_{01} | U U^T x_{02} | \dots | U U^T x_{0K}] = U U^T [x_{01} | x_{02} | \dots | x_{0K}] = U U^T X. \quad (3)$$

ماتریس  $U^T X$ ، ماتریس ضرایب بوده و آن را با  $C$  نشان خواهیم داد ( $C = U^T X$ ). درایه‌ی سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $C$  عبارت است از:

$$c_{ij} = \langle U_i, x_{0j} \rangle = U_i^T x_{0j}, \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, K, \quad (4)$$

در واقع  $c_{ij}$  میزان تاثیر  $i$ امین بردار تکین چپ را در تقریب  $j$ امین زیر سری نشان می‌دهد. هر چقدر قدر مطلق  $c_{ij}$  بیشتر باشد، میزان تاثیر نیز بیشتر خواهد بود. ماتریس  $C$  را به روش دیگری نیز می‌توان به دست آورد. به دلیل اینکه  $U^T U = I$ ، از SVD ماتریس  $X$  نتیجه می‌گیریم که

$$C = U^T X = \Sigma V^T = \begin{pmatrix} \sigma_1 v_{11} & \sigma_1 v_{12} & \dots & \sigma_1 v_{1K} \\ \sigma_2 v_{21} & \sigma_2 v_{22} & \dots & \sigma_2 v_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_d v_{d1} & \sigma_d v_{d2} & \dots & \sigma_d v_{dK} \end{pmatrix},$$

بنابراین داریم:

$$c_{ij} = \sigma_i v_{ji}, \quad i = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, K, \quad (5)$$

وقتی که  $v_{ji}$  نشان دهنده‌ی سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $V^T$  است. ماتریس ضرایب  $C$  حاوی اطلاعات با ارزشی است؛ به ویژه نرم اقلیدسی سطرها و ستون‌های آن دارای تعبیر هندسی جالبی هستند که در بخش ۳ آنها را بررسی خواهیم کرد.



### ۳ تعابیر هندسی

فرض کنید  $C_{0j}$  و  $C_{i0}^T$  به ترتیب نشان دهنده سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $C$  باشند. نرم اقلیدسی  $C_{i0}^T$  می‌تواند معیاری برای اندازه‌گیری میزان تاثیر  $i$ امین بردار تکین چپ ( $U_i$ ) در تقریب همه‌ی زیر سری‌ها باشد. گزاره‌ی ۱ نشان می‌دهد که نرم اقلیدسی  $C_{i0}^T$  برابر است با  $i$ امین مقدار تکین. به عبارت دیگر،  $i$ امین مقدار تکین، میزان تاثیر  $i$ امین بردار تکین چپ را در تقریب همه‌ی زیر سری‌ها نشان می‌دهد.

$$\|C_{i0}^T\| = \sigma_i \quad \text{گزاره ۱.۱}$$

اثبات. با استفاده از رابطه‌ی (۵) و با توجه به اینکه ستون‌های ماتریس  $V$  یک‌هستند، داریم:

$$\|C_{i0}^T\|^2 = \sum_{j=1}^K c_{ij}^2 = \sum_{j=1}^K \sigma_i^2 v_{ji}^2 = \sigma_i^2 \sum_{j=1}^K v_{ji}^2 = \sigma_i^2 \|v_{0i}\|^2 = \sigma_i^2 \times 1 = \sigma_i^2,$$

وقتی که  $v_{0i}$  نشان دهنده‌ی ستون  $i$ ام ماتریس  $V$  است.

با استفاده از گزاره‌ی ۱ می‌توان نرم فروبنیوس<sup>۱۱</sup> ماتریس ضرایب  $C$  را به دست آورد. ابتدا تعریف نرم فروبنیوس یک ماتریس را یادآوری می‌کنیم.

**تعریف ۱.** نرم فروبنیوس ماتریس  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$  که با نماد  $\|A\|_F$  نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

با توجه به تعریف ۱ می‌توان گفت نرم فروبنیوس، تعمیم نرم اقلیدسی یک بردار برای یک ماتریس است. لازم به ذکر است که نرم فروبنیوس یک ماتریس را می‌توان بر حسب نرم اقلیدسی سطرها و یا ستون‌های آن ماتریس محاسبه کرد. به عبارت دیگر داریم:  $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \|a_{i0}^T\|^2 = \sum_{j=1}^n \|a_{0j}\|^2$ ، وقتی که  $a_{0j}$  و  $a_{i0}^T$  به ترتیب سطر  $j$ ام و ستون  $i$ ام ماتریس  $A$  هستند. حال با استفاده از گزاره‌ی ۱، نرم فروبنیوس ماتریس ضرایب  $C$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\|C\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^d \|C_{i0}^T\|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^d \sigma_i^2} = \|s\|, \quad (۶)$$

وقتی که  $s = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d)^T$ . به عبارت دیگر نرم فروبنیوس ماتریس ضرایب  $C$  برابر است با طول برداری که از مقادیر تکین تشکیل شده است.

در گزاره‌ی ۲ ثابت می‌کنیم که نرم اقلیدسی ستون  $j$ ام ماتریس  $C$  ( $C_{0j}$ ) برابر با نرم اقلیدسی تصویر عمودی  $j$ امین زیر سری روی فضای برداری تولید شده به وسیله‌ی بردارهای  $U_1, \dots, U_d$  است.

$$\|\hat{x}_{0j}\| = \|C_{0j}\| \quad \text{گزاره ۲.۲}$$

اثبات. داریم:

$$UU^T = [U_1 | \dots | U_d] \begin{bmatrix} U_1^T \\ \vdots \\ U_d^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^d U_i U_i^T$$



حال با استفاده از رابطه‌ی ۲ و با توجه به اینکه  $U_i^T x_{0j}$  و  $U_k^T x_{0j}$  اعداد حقیقی هستند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_{0j}\|^2 &= \|\mathbf{U}\mathbf{U}^T x_{0j}\|^2 = \langle \mathbf{U}\mathbf{U}^T x_{0j}, \mathbf{U}\mathbf{U}^T x_{0j} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^d U_i U_i^T x_{0j}, \sum_{k=1}^d U_k U_k^T x_{0j} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \langle U_i U_i^T x_{0j}, U_k U_k^T x_{0j} \rangle = \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d (U_i^T x_{0j}) (U_k^T x_{0j}) \langle U_i, U_k \rangle \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن یک‌معامد بودن بردارهای  $U_1, \dots, U_d$  و با استفاده از رابطه‌ی ۴ داریم:

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_{0j}\|^2 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^d \sum_{k=1}^d (U_i^T x_{0j}) (U_k^T x_{0j}) \overbrace{\langle U_i, U_k \rangle}^{=0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i=k}}^d \sum_{k=1}^d (U_i^T x_{0j}) (U_k^T x_{0j}) \overbrace{\langle U_i, U_k \rangle}^{=1} \\ &= \sum_{i=1}^d (U_i^T x_{0j})^2 = \sum_{i=1}^d c_{ij}^2 = \|\mathbf{C}_{0j}\|^2, \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:  $\|\hat{x}_{0j}\| = \|\mathbf{C}_{0j}\|$ .

با استفاده از گزاره‌ی ۲ می‌توان نرم فروبنیوس ماتریس  $\hat{\mathbf{X}}$  را به صورت زیر به دست آورد:

$$\|\hat{\mathbf{X}}\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^K \|\hat{x}_{0j}\|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^K \|\mathbf{C}_{0j}\|^2} = \|\mathbf{C}\|_F. \quad (7)$$

می‌دانیم که اگر  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d$  مقادیر تکین ماتریس مسیر  $\mathbf{X}$  باشند آنگاه:  $\|\mathbf{X}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^d \sigma_i^2} = \|s\|$ .  
بنابراین با استفاده از روابط ۶ و ۷ نتیجه می‌گیریم که:  $\|\mathbf{X}\|_F = \|\hat{\mathbf{X}}\|_F = \|\mathbf{C}\|_F = \|s\|$ .

## ۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا با استفاده از تجزیه‌ی مقدار تکین (SVD)، بردارهای تکین چپ و راست و مقادیر تکین ماتریس مسیر محاسبه شد و سپس، تصویر عمودی ستون‌های ماتریس مسیر روی فضای برداری تولید شده توسط بردارهای تکین چپ به دست آمد. در ادامه، تعبیر هندسی برای نرم اقلیدسی سطرها و ستون‌های ماتریس ضرایب ارائه شد. در پایان نیز تعبیر هندسی نرم فروبنیوس ماتریس مسیر و ماتریس ضرایب بیان شد.

## مراجع

[۱] داتا، بیسوانات؛ ترجمه‌ی فائزه توتونیان، جبر خطی عددی و کاربردها، جلد دوم، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۹۰.

[2] Golyandina, N. and Zhigljavsky, A. (2013). *Singular Spectrum Analysis for Time Series*, Springer Briefs in Statistics, Springer.



## یک مدل احتمال منعطف در سنجش نابرابری درآمد

شهریار میرزایی؛ عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

sh\_mirzaee@pnu.ac.ir

مهدی کلانتری، عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

kalantarimahdi@pnu.ac.ir

**چکیده:** در این مطالعه، توزیع بتای تعمیم یافته نوع دوم (GB<sub>2</sub>) بعنوان یک مدل احتمال منعطف درآمد بررسی می شود و روابط تحلیلی فرم شاخص های نابرابری جینی و زنگا و نیز منحنی لورنتس در چارچوب آن ارائه می گردد. سپس مدل پیشنهادی به داده های درآمد خانوارهای ایرانی برازش داده شده و پارامترهای مدل به روش درستنمایی ماکزیمم برآورد می شوند. نقش پارامترهای توزیع در نابرابری درآمد بررسی می شود. یافته ها حاکی از کارایی مدل در برازش به داده های درآمد خانوار و اندازه گیری نابرابری اقتصادی و نیز کاربردپذیری آن برای مطالعات در حوزه نابرابری درآمد است. **کلمات کلیدی:** توزیع بتای تعمیم یافته نوع دوم، درآمد خانوار، شاخص های نابرابری، منحنی لورنتس.

### ۱ مقدمه

مدل بتای تعمیم یافته نوع دوم (GB<sub>2</sub>) یک توزیع احتمال پیوسته است که به دلیل انعطاف پذیری بالا در مدل سازی داده های اقتصادی، درآمدی و سایر پدیده هایی که دارای توزیع نامتقارن و دم سنگین هستند، اهمیت زیادی دارد. تابع چگالی احتمال برای توزیع GB<sub>2</sub> به صورت زیر تعریف می شود:

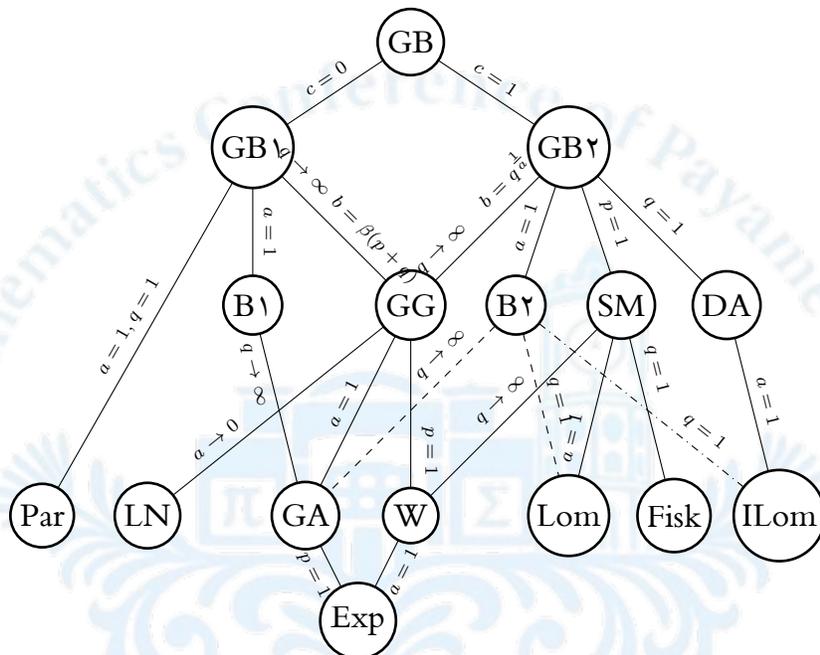
$$f_{GB2}(x; a, b, p, q) = \frac{ax^{a-p-1}}{b^a p B(p, q) [1 + (\frac{x}{b})^a]^{p+q}}, \quad x, a, b, p, q > 0,$$

که در آن  $a, p, q$  پارامترهای شکل توزیع،  $b$  پارامتر مقیاس و  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$  تابع بتا با پارامترهای  $p$  و  $q$  هستند. در حوزه اقتصادسنجی و آمار، GB<sub>2</sub> به دلیل توانایی اش در مدل سازی دقیق توزیع های درآمدی و پدیده های مشابه، بسیار مورد توجه است.

مک دونالد و زو (۱۹۹۵) [۲] توزیع ۵ پارامتری بتای تعمیم یافته (GB) را به داده های درآمد خانوارهای آمریکایی در سال ۱۹۸۵ برازش دادند و پی بردند که توزیع GB<sub>2</sub>، به عنوان یک زیر مدل از توزیع GB، برازش بهتری به داده های درآمد ارایه می دهد. بسیاری از توزیع های درآمد را می توان با جایگذاری مقادیر خاص روی پارامترهای این توزیع و یا حالت های حدی آن به دست آورد. توزیع های نمایی (Exp)، وایبول (W)، گاما (GA)، پارتو (Par)، لوماکس (Lom)، لوماکس معکوس (ILom)، فیسک (Fisk)، بتای نوع اول (B<sub>1</sub>)، بتای نوع دوم (B<sub>2</sub>)، سینگ مادالا



(SM)، داگوم (DA)، بتای تعمیم یافته نوع اول (GB1)، و بتای تعمیم یافته نوع دوم (GB2) حالت‌های خاص توزیع GB هستند. در شکل ۱ ارتباط بین توزیع GB با توزیع‌های درآمد مشتق شده آن نشان داده شده است.



شکل ۱: ارتباط بین توزیع‌های درآمد در مدل GB

GB2 تابع لورنتس که توسط ماکس لورنتس در سال ۱۹۰۵ معرفی شد، یک ابزار گرافیکی در اقتصادسنجی و مطالعات نابرابری محسوب می‌شود. این منحنی با رسم نسبت تجمعی درآمد دریافتی (بر روی محور عمودی) در برابر نسبت تجمعی جمعیت (بر روی محور افقی)، یک نمایش بصری قدرتمند از توزیع درآمد یا ثروت در جامعه ارائه می‌دهد. در شرایط نابرابری کامل درآمد، این منحنی دقیقاً منطبق بر خط ۴۵ درجه (خط برابری کامل) خواهد بود. هرچه انحراف این منحنی از خط برابری بیشتر باشد، نشان‌دهنده سطح بالاتری از نابرابری در توزیع درآمد است. فرض کنید متغیر نامنفی درآمد  $X$  دارای تابع توزیع احتمال  $F_X$  باشد. در این صورت منحنی لورنتس آن عبارت است از:

$$L(p) = \frac{\int_0^p F_X^{-1}(u) du}{\int_0^1 F_X^{-1}(u) du}, \quad p \in [0, 1],$$

که در آن  $F^{-1}$  تابع معکوس تابع توزیع احتمال  $F$  است. بنابراین در توزیع GB2 داریم:

$$L(p) = \frac{\int_0^p F_X^{-1}(u) du}{\int_0^1 F_X^{-1}(u) du} = I_z(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a})$$



$$I_z(p, q) = \frac{\int_0^z t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt}{\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt} \quad \text{و} \quad z = 1 - (1-p)^{\frac{1}{q}}$$

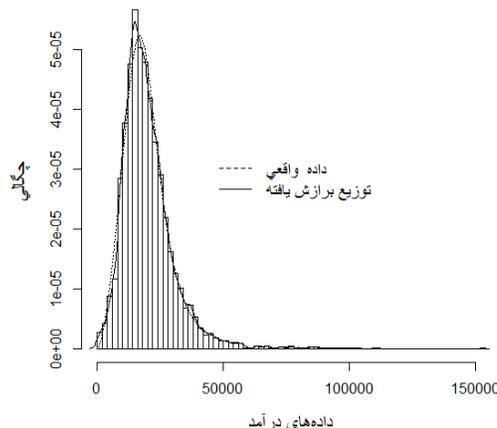
ضریب جینی،  $G = \int_0^1 G(p) dp$ ، که در آن  $G(p)$  منحنی جینی با  $G(p) = 2[p - L(p)]$  به ازای  $p \in [0, 1]$  است، بعنوان شاخص متداول نابرابری درآمد تعریف می شود (دیویدسون (۲۰۰۹) [۱] را ببینید). همچنین شاخص زنگا بر اساس نسبت میانگین های درآمد فقیر به ثروتمندتر جامعه تعریف می شود (برای مطالعه این شاخص و ارتباط آن با منحنی لورنتس زنگا (۲۰۰۷) [۳] را مطالعه کنید). در جدول ۱ فرم منحنی و شاخص های نابرابری جینی و زنگا برای توزیع درآمد GB2 ارائه شده است.

جدول ۱: فرم شاخص های نابرابری درآمد جینی و زنگا در توزیع GB2

شاخص نابرابری	منحنی نابرابری
$\frac{B(2p, 2q - \frac{1}{a})}{B(p, q) B(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a})}$	جینی $2[p - I_z(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a})]$
$\int_0^1 \frac{p - I_z(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a})}{p[1 - I_z(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a})]} dp$	زنگا $\frac{p - I_z(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a})}{p[1 - I_z(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a})]}$

## ۲ تحلیل داده

برای تحلیل بر اساس منحنی های نابرابری، درآمد خانوارهای شهری و روستایی را در سال ۱۳۹۴ مورد بررسی قرار می دهیم. نخست هیستوگرام داده های درآمد خانوار را مطابق شکل ۲ ترسیم می کنیم. سپس توزیع GB2 را به داده ها برازش می دهیم.



شکل ۲: توزیع برازش داده شده به داده های درآمد خانوارهای ایرانی در سال ۹۴

نتایج برازش حاکی از برازش خوب توزیع  $GB2$  به داده های درآمد است. در جدول ۲ مشخصه‌هایی از توزیع درآمد در سال ۱۳۹۴ به تفکیک مناطق شهری و روستائی آمده است.

جدول ۲: مشخصه‌هایی از توزیع درآمد در سال ۱۳۹۴ به تفکیک شهری و روستائی

	جینی	زنگا	چولگی	برجستگی
شهری	۰/۳۲۸	۰/۶۷۱	۵/۱۴۲۹	۸۰/۸۷۰
روستائی	۰/۳۶۱	۰/۷۱۵	۵/۱۴۴۸	۸۹/۱۱۸

یافته‌ها نشان می‌دهند که میزان اختلاف بسیار زیاد ضریب چولگی و برجستگی با صفر بیانگر نامتقارن بودن و در نتیجه نرمال نبودن توزیع داده‌ها است. مقادیر این معیارها، چولگی شدید به سمت راست را تایید می‌کند. همچنین مقادیر دو شاخص جینی و زنگا همسو بوده و هر دو شاخص نشان از کمتر بودن نابرابری درآمد در نقاط شهری را دارند. در جدول ۳ برآورد درست‌نمایی ماکزیمم پارامترهای توزیع برازشی  $GB2$  در سال ۱۳۹۴ برای مناطق شهری و روستائی به تفکیک گزارش شده است. نتایج حاکی از آن است که پارامترهای  $a$  و  $p$  در نابرابری درآمد نقش معکوس

جدول ۳: برآورد درست‌نمایی ماکزیمم پارامترهای توزیع برازشی  $GB2$  در سال ۱۳۹۴

	$a$	$b$	$p$	$q$
شهری	۳/۲۵	۲۵۰۶۷	۰/۷۱	۱/۰۷
روستائی	۲/۷۰	۲۰۶۱۷	۰/۶۶	۱/۴۶

و پارامتر  $q$  نقش مستقیم در نابرابری درآمد داشته است. همچنین پارامتر مقیاس  $b$  نقشی در نابرابری درآمد ندارد.

## مراجع

- [1] R., Davidson, 2009. Reliable inference for the Gini index. *Journal of econometrics*, 150(1), pp.30-40.
- [2] J.B. McDonald, and Y.J., Xu, 1995. A generalization of the beta distribution with applications. *Journal of Econometrics*, 66(1-2), pp.133-152.
- [3] M. Zenga, *Inequality curve and inequality index based on the ratios between lower and upper arithmetic means*, *Statistica Applicazioni*, 5(2007), no 1, 3-28.

## روش‌های خوشه‌بندی در داده کاوی

مونا ساداتیان<sup>۱</sup>، دانشجوی کارشناسی گروه آمار دانشگاه علامه طباطبائی، صندوق پستی ۴۸۹۶۸۴۵۱۱، تهران،

ایران

### چکیده

تحلیل خوشه‌ای<sup>۲</sup> یکی از پرکاربردترین روش‌های آماری و داده‌کاوی است که هدف آن شناسایی ساختارهای پنهان میان داده‌ها از طریق گروه‌بندی مشاهدات مشابه می‌باشد. این روش نخستین بار در دهه ۱۹۳۰ میلادی در علوم زیستی و روان‌شناسی مطرح شد و از دهه ۱۹۵۰ به صورت رسمی در آمار چندمتغیره و علوم اجتماعی گسترش یافت. خوشه‌بندی به عنوان قلب تحلیل خوشه‌ای، نقش تعیین‌کننده‌ای در استخراج الگوها و شباهت‌های درونی داده‌ها دارد. نرم‌افزار SPSS با رابط کاربری ساده و قابلیت‌های گرافیکی و تحلیلی قدرتمند، امکان اجرای انواع الگوریتم‌های خوشه‌بندی از جمله K-Means Cluster، Hierarchical Cluster و Two-Step Cluster را فراهم می‌کند. در این پژوهش، ضمن مرور مفهوم خوشه‌بندی و بررسی نقش آن در تحلیل داده‌ها، سه روش اصلی خوشه‌بندی بررسی و از جنبه‌های نظری، کاربردی و نرم‌افزاری مقایسه می‌شوند.

**کلمات کلیدی:** خوشه بندی، SPSS، K-Means، Two-Step، Hierarchical

### ۱- مقدمه

تحلیل خوشه‌ای از جمله روش‌های بنیادی در آمار و علم داده است که با هدف گروه‌بندی مجموعه‌ای از مشاهدات یا متغیرها بر اساس میزان شباهت یا فاصله میان آن‌ها به کار می‌رود. این روش نخستین بار در دهه ۱۹۳۰ میلادی برای طبقه‌بندی گیاهان و جانوران با ویژگی‌های مشابه در زیست‌شناسی مورد استفاده قرار گرفت و سپس در علوم

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

<sup>۲</sup> Cluster Analysis

اجتماعی، روان‌شناسی و بازاریابی نیز گسترش یافت. در دهه ۱۹۵۰ میلادی، با پیشرفت رایانه‌ها و توسعه نرم‌افزارهای آماری، خوشه‌بندی به یکی از ابزارهای اصلی تحلیل چندمتغیره تبدیل شد. فرآیند خوشه‌بندی به پژوهشگران کمک می‌کند تا داده‌های خام را به گروه‌هایی منطقی تقسیم کرده و الگوهای پنهان را آشکار سازند. به‌طور خاص، خوشه‌بندی می‌تواند برای تقسیم‌بندی بازار، تحلیل رفتار مشتریان، دسته‌بندی دانشجویان، یا شناسایی الگوهای زیستی مورد استفاده قرار گیرد. نرم‌افزار SPSS با فراهم‌سازی محیطی گرافیکی، امکان اجرای ساده تحلیل خوشه‌ای را برای کاربران مبتدی و حرفه‌ای فراهم می‌کند. ویژگی‌هایی چون نمایش دندروگرام، مقایسه آماری خوشه‌ها، تولید گزارش خودکار و خروجی گرافیکی، SPSS را به ابزاری کارآمد برای اجرای این نوع تحلیل تبدیل کرده است.

## ۲- بررسی روش‌های خوشه‌بندی در SPSS

### ۲-۱ روش K-Means Cluster

روش K-Means یکی از پرکاربردترین و سریع‌ترین الگوریتم‌های خوشه‌بندی است. در این روش، پژوهشگر باید تعداد خوشه‌ها (K) را از پیش تعیین کند. الگوریتم با انتخاب K نقطه به‌عنوان مراکز اولیه خوشه‌ها آغاز می‌شود و سپس در هر مرحله، هر مشاهده به نزدیک‌ترین مرکز تخصیص داده می‌شود. پس از آن مراکز خوشه‌ها دوباره محاسبه می‌شوند تا زمانی که جابجایی بین خوشه‌ها به حداقل برسد. این روش به دلیل سرعت بالا، برای مجموعه‌داده‌های بزرگ مناسب است، اما نسبت به نقاط پرت حساسیت دارد. در نرم‌افزار SPSS، اجرای این روش از مسیر  $Analyze \rightarrow Classify \rightarrow K\text{-Means Cluster}$  انجام می‌شود. در پنجره مربوطه، کاربر می‌تواند تعداد خوشه‌ها، متغیرهای مورد استفاده و گزینه‌های خروجی مانند ANOVA Table، فواصل خوشه‌ها و نمودار مراکز خوشه‌ها را انتخاب کند. قابلیت مشاهده میانگین متغیرها در هر خوشه و رسم گراف مقایسه‌ای، SPSS را برای تحلیل نتایج K-Means بسیار کاربرپسند می‌سازد.

### ۲-۲ Hierarchical Cluster روش

روش سلسله‌مراتبی داده‌ها را به صورت تدریجی و با ساختار درختی خوشه‌بندی می‌کند. این الگوریتم نیازی به تعیین تعداد خوشه‌ها از ابتدا ندارد و پژوهشگر می‌تواند با مشاهده Dendrogram، تعداد بهینه خوشه‌ها را انتخاب کند. دو نوع اصلی از این روش وجود دارد: روش تجمعی<sup>۳</sup>: در ابتدا هر مشاهده یک خوشه مجزا است و در مراحل بعد، خوشه‌های مشابه به یکدیگر ادغام می‌شوند تا خوشه‌های بزرگ‌تر شکل گیرند. روش تقسیمی<sup>۴</sup>: برعکس روش قبل، کل داده‌ها ابتدا در یک خوشه قرار می‌گیرند و سپس به تدریج تقسیم می‌شوند. در SPSS، این روش از مسیر  $Analyze \rightarrow Classify \rightarrow Hierarchical Cluster$  قابل اجراست. امکاناتی مانند انتخاب نوع فاصله (Euclidean، Squared Euclidean، Manhattan و ...) و روش پیوند (Average، Complete، Single)،

<sup>3</sup> Agglomerative

<sup>4</sup> Divisive

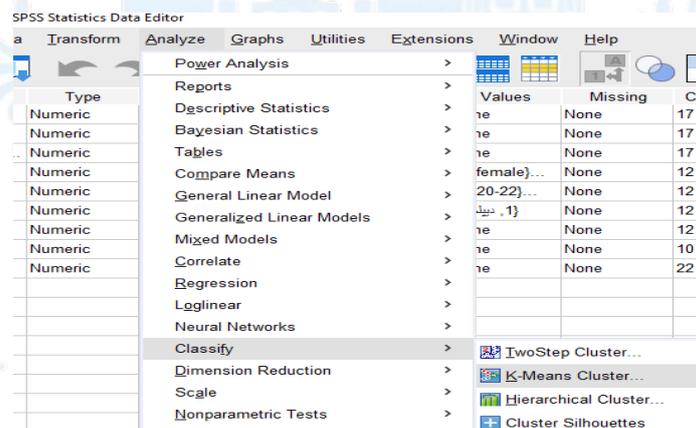
Ward's Method) وجود دارد. یکی از مزایای این روش در SPSS، امکان مشاهده گام به گام فرآیند ادغام خوشه‌ها و رسم نمودار درختی برای تفسیر بصری نتایج است. این روش برای مجموعه داده‌های کوچک تا متوسط که نیاز به شناسایی ساختارهای درونی دارند، بسیار مؤثر است.

### ۲-۳ روش Two-Step Cluster

الگوریتم Two-Step Cluster یکی از جدیدترین و پیشرفته‌ترین روش‌های خوشه‌بندی در SPSS است که به‌ویژه برای داده‌های بزرگ و ترکیبی (دارای متغیرهای عددی و کیفی) طراحی شده است. در این روش، ابتدا داده‌ها در مرحله اول به چند خوشه اولیه تقسیم می‌شوند و در مرحله دوم، این خوشه‌ها با استفاده از معیارهای آماری مانند  $BIC^5$  ترکیب یا تفکیک می‌شوند تا ساختار نهایی خوشه‌ها به دست آید.

مزیت بزرگ Two-Step Cluster در SPSS آن است که تعداد بهینه خوشه‌ها را به صورت خودکار پیشنهاد می‌کند و با معیار Silhouette Measure of Cohesion and Separation کیفیت خوشه‌بندی را ارزیابی می‌کند. کاربر همچنین می‌تواند ویژگی‌های هر خوشه را با جدول‌های مقایسه‌ای و نمودارهای توصیفی مشاهده کند. مسیر اجرای این روش در SPSS عبارت است از: Analyze → Classify → Two-Step Cluster.

به دلیل توانایی پردازش حجم بالای داده و تحلیل هم‌زمان متغیرهای کیفی و کمی، این روش در پژوهش‌های اجتماعی، اقتصادی و بازاریابی کاربرد گسترده‌ای دارد.



شکل ۱. مسیر دسترسی به روش‌های مختلف خوشه‌بندی در نرم افزار spss

### ۳- قابلیت‌های SPSS در تحلیل خوشه‌ای

SPSS یکی از نرم‌افزارهای قدرتمند در زمینه‌ی تحلیل خوشه‌ای است که مزیت‌های زیر را در اختیار پژوهشگران قرار می‌دهد:

- محیط گرافیکی کاربرپسند که اجرای الگوریتم‌ها را بدون نیاز به برنامه‌نویسی ممکن می‌سازد.

<sup>5</sup> Bayesian Information Criterion

۲. تنوع در انتخاب شاخص‌های فاصله و روش‌های پیوند برای خوشه‌بندی دقیق‌تر.
  ۳. خروجی‌های گرافیکی متنوع مانند دندروگرام، جدول میانگین خوشه‌ها و نمودارهای مقایسه‌ای.
  ۴. تشخیص خودکار تعداد خوشه‌ها در روش Two-Step.
  ۵. امکان ذخیره برچسب خوشه‌ها برای استفاده در تحلیل‌های بعدی مانند ANOVA یا رگرسیون.
- این ویژگی‌ها باعث شده‌اند SPSS یکی از محبوب‌ترین ابزارها برای آموزش و اجرای تحلیل خوشه‌ای در دانشگاه‌ها و موسسات پژوهشی باشد.

#### ۴- نتیجه‌گیری

تحلیل خوشه‌ای به یکی از ابزارهای کلیدی در تحلیل داده‌ها تبدیل شده است. خوشه‌بندی به‌عنوان بخش اصلی این تحلیل، امکان تصمیم‌گیری دقیق‌تر را فراهم می‌سازد. نرم‌افزار SPSS با ارائه سه روش اصلی K-Means، Hierarchical و Two-Step و قابلیت‌های متنوع آماری و گرافیکی، اجرای این تحلیل را برای پژوهشگران در سطوح مختلف ساده و قابل اعتماد ساخته است. انتخاب روش مناسب خوشه‌بندی در SPSS بر اساس نوع داده و هدف پژوهش، می‌تواند بینش‌های کاربردی از داده‌ها فراهم آورد.

#### منابع

- ۱- هاشمی، نسرين. (۱۳۹۷). داده‌کاوی با استفاده از SPSS Modeler و SPSS Statistics. انتشارات دانشگاه پیام نور.
2. Jain, A. K., Murty, M. N., & Flynn, P. J. (1999). Data Clustering: A Review. *ACM Computing Surveys*, 31(3), 264–323.
3. IBM Corporation. (2011). *IBM SPSS Statistics Algorithms: TwoStep Cluster Analysis*. IBM Corp.

## معرفی توزیع وارون ریلی تبدیل یافته

حسین کریمی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه علوم پایه، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

hkarimist@gmail.com

**چکیده:** در این مقاله، توزیع جدید وارون لوماکس - وارون ریلی بر مبنای توزیع وارون لوماکس معرفی شده است. در گام نخست، خانواده تولیدی وارون لوماکس توزیع ها را تعریف می کنیم و در ادامه، توزیع وارون لوماکس - وارون ریلی را معرفی می کنیم. قابلیت اعتماد، تابع مخاطره، تابع چنک و آماره های ترتیبی را برای توزیع وارون لوماکس - وارون ریلی بدست می آوریم. برآوردهای ماکزیمم درستنمایی، حداقل مربعات و حداقل مربعات وزنی را محاسبه کرده ایم.

**کلمات کلیدی:** توزیع وارون لوماکس، توزیع وارون ریلی، توزیع وارون لوماکس - وارون ریلی، خانواده تولیدی وارون لوماکس توزیع ها.

### ۱. مقدمه

مدل سازی و تفسیر داده های طول عمر در بسیاری از کاربردهای عملی مانند پزشکی، علوم بیمه، مهندسی و مالی استفاده می شود. این موضوع باعث شده است که محققان بر روی توسعه خانواده های توزیع های احتمال تحقیق کنند. تعدادی از خانواده های جدید توزیع ها، کوماراسوامی پواسن تولیدی [۶]، زوبایر تولیدی [۲]، بتا پواسن تولیدی [۱۰]، نمایی تعمیم یافته تولیدی [۴]، وارون لوماکس تولیدی [۹]، لگاریتم لجستیک لیندلی تولیدی [۳]، ویبول مارشال الکین لیندلی تولیدی [۱]، کوماراسوامی ریلی تولیدی [۸]، خانواده وارون لوماکس نمایی شده تولیدی [۷] و غیره می باشند. توسعه توزیع های احتمال یک رویه معمول در نظریه آمار است. هدف ما در این مقاله، بسط توزیع وارون ریلی بر مبنای خانواده تولیدی وارون لوماکس است.

#### ۱-۱. توزیع وارون ریلی

نخست، ترایر [۱۴] توزیع وارون ریلی را به عنوان یک مدل برای تحلیل داده های قابلیت اطمینان و بقا معرفی کرد. این مدل بعداً توسط وودا [۱۵] مورد بررسی بیشتری قرار گرفت به طوری که مشاهده کرد توزیع طول عمر واحدهای آزمایشی مختلف می تواند با توزیع وارون ریلی تقریب زده شود. تابع توزیع و تابع چگالی احتمال وارون ریلی بصورت زیر است.

$$(1) F(x|\alpha) = \exp\left(-\frac{\alpha}{x^2}\right) \quad , \quad f(x|\alpha) = \frac{2\alpha}{x^3} \exp\left(-\frac{\alpha}{x^2}\right) \quad ; \quad x, \alpha \geq 0.$$

#### ۱-۲. توزیع وارون لوماکس

در برخی شرایط، توزیع وارون لوماکس جایگزینی مناسب برای توزیع های مشهور مانند گاما، وارون وایبول و وایبول است. این توزیع کاربردهای متنوعی در مدل سازی انواع مختلف داده ها، از جمله در اقتصاد و علوم

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول



بیمه‌ای [۱۱] و پایگاه‌های داده ژئوفیزیکی [۱۲] دارد و در تحلیل قابلیت اطمینان نیز کاربرد مهمی دارد [۲]. تابع توزیع و تابع چگالی احتمال وارون لوماکس بصورت زیر است.

$$(۲) F(x|\beta, \lambda) = \left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^{-\lambda}, \quad f(x|\beta, \lambda) = \frac{\beta\lambda}{x^2} \left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^{-(\lambda+1)}; \quad x, \lambda, \beta > 0.$$

### ۱-۳. خانواده تولیدی وارون لوماکس توزیع‌ها

فالگور و دوگوا [۹] خانواده تولیدی وارون لوماکس توزیع‌ها را با استفاده از روش  $T-X$  [۵] معرفی کردند. تابع توزیع و تابع چگالی احتمال این خانواده به صورت زیر است.

$$(3) F(x|\lambda, \alpha, \Psi) = \int_0^{\frac{G(x|\Psi)}{G(x|\Psi)}} \frac{\beta\lambda}{t^2} \left(1 + \frac{\beta}{t}\right)^{-(\lambda+1)} dt = \left(1 + \frac{\beta\bar{G}(x|\Psi)}{G(x|\Psi)}\right)^{-\lambda}; \quad x, \lambda, \beta > 0.$$

$\lambda$  پارامتر شکل و  $\beta$  پارامتر مقیاس است و  $G(x|\Psi)$  تابع توزیع مبنا با بردار پارامتر  $\Psi$  و  $\bar{G}(x|\Psi) = 1 - G(x|\Psi)$  می‌باشد.

### ۲. توزیع وارون لوماکس - وارون ریلی

تابع توزیع وارون ریلی در (۱) را به عنوان تابع توزیع مبنا در (۳) قرار می‌دهیم و در نتیجه تابع توزیع وارون لوماکس - وارون ریلی بدست می‌آید.

$$(4) F(x|\alpha, \beta, \lambda) = \left(1 + \beta(e^{x^2} - 1)\right)^{-\lambda}; \quad x, \alpha, \lambda, \beta > 0.$$

تابع چگالی احتمال وارون لوماکس - وارون ریلی به صورت زیر است.

$$(5) f(x|\alpha, \beta, \lambda) = \frac{2\alpha\beta\lambda}{x^3} e^{\frac{\alpha}{x^2}} \left(1 + \beta(e^{x^2} - 1)\right)^{-(\lambda+1)}; \quad x, \alpha, \lambda, \beta > 0.$$

### ۳. تعدادی از ویژگی‌های توزیع وارون لوماکس - وارون ریلی

#### ۱-۳. قابلیت اطمینان

تابع قابلیت اطمینان و تابع مخاطره برای توزیع وارون لوماکس - وارون ریلی عبارتند از

$$R(x|\alpha, \beta, \lambda) = 1 - \left(1 + \beta(e^{x^2} - 1)\right)^{-\lambda},$$

$$h(x|\alpha, \beta, \lambda) = \frac{2\alpha\beta\lambda e^{\frac{\alpha}{x^2}}}{x^3 \left(1 + \beta(e^{x^2} - 1)\right)} \left[ \frac{1}{1 - \left(1 + \beta(e^{x^2} - 1)\right)^{-\lambda}} - 1 \right].$$

#### ۲-۳. تابع چندک

با استفاده از تابع توزیع وارون لوماکس - وارون ریلی (۱۴)، می‌توان تابع چندک و در نتیجه میانه و دامنه بین چارکی را بدست آورد.



$$Q(p; \alpha, \beta, \lambda) = \sqrt{\frac{\alpha}{\ln\left(\frac{p^{-\frac{1}{\lambda-1}}}{\beta} + 1\right)}}, \quad \text{Median} = \sqrt{\frac{\alpha}{\ln\left(\frac{(0.5)^{-\frac{1}{\lambda-1}}}{\beta} + 1\right)}}$$

$$IQR = \sqrt{\frac{\alpha}{\ln\left(\frac{(0.75)^{-\frac{1}{\lambda-1}}}{\beta} + 1\right)}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\ln\left(\frac{(0.25)^{-\frac{1}{\lambda-1}}}{\beta} + 1\right)}}$$

### ۳-۳. آماره ترتیبی

تابع چگالی احتمال  $r$  امین آماره ترتیبی برای نمونه تصادفی  $X_1, X_2, \dots, X_n$  از توزیع وارون لوماکس - وارون ریلی با استفاده از (۴) و (۵) عبارت است از

$$f_{(r)}(x) = \frac{2r\alpha\beta\lambda}{x^3} e^{\frac{\alpha}{x^2}} \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n}{r, j, n-r-j} (-1)^j \left(1 + \beta \left(e^{\frac{\alpha}{x^2}} - 1\right)\right)^{-1-\lambda(r+j)}$$

### ۴. برآورد پارامترها

#### ۴-۱. برآورد ماکزیمم درستنمایی

اگر  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از توزیع وارون لوماکس - وارون ریلی باشد، تابع لگاریتم درستنمایی بصورت زیر بدست می آید.

$$l(\alpha, \beta, \lambda) = n \ln(2\alpha\beta\lambda) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\alpha}{x_i^2} - 3 \ln x_i - (\lambda + 1) \ln(1 + \beta (e^{\frac{\alpha}{x_i^2}} - 1)) \right].$$

برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی پارامترهای  $(\alpha, \beta, \lambda)$ ، با حل معادلات غیر خطی زیر بدست می آیند.

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{x_i^2} - \frac{\beta}{x_i^2} e^{\frac{\alpha}{x_i^2}} \frac{(\lambda + 1)}{1 + \beta (e^{\frac{\alpha}{x_i^2}} - 1)} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - (\lambda + 1) \sum_{i=1}^n \frac{e^{\frac{\alpha}{x_i^2}} - 1}{1 + \beta (e^{\frac{\alpha}{x_i^2}} - 1)} = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n \ln(1 + \beta (e^{\frac{\alpha}{x_i^2}} - 1)) = 0.$$

این معادلات را می توان با روشهای عددی مانند روش نیوتن-رافسن حل کرد.

#### ۴-۲. برآورد حداقل مربعات و حداقل مربعات وزنی

برآورد حداقل مربعات و حداقل مربعات وزنی پارامترهای نامعلوم توزیع وارون لوماکس - وارون ریلی، بر اساس روش پیشنهادی توسط سواين و همکاران [۱۳] بدست می آیند. فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از تابع توزیع  $F(x)$  و  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  آماره های ترتیبی آنها باشند، آنگاه داریم

$$E(F(X_{(i)})) = \frac{i}{n+1}, \quad \text{Var}(F(X_{(i)})) = \frac{i(n+1-i)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

با مینیمم کردن  $\sum_{i=1}^n [F(X_{(i)}) - E(F(X_{(i)}))]^2$ ، برآورد حداقل مربعات پارامترهای نامعلوم بدست می آیند.

بنابراین،  $\sum_{i=1}^n \left[ \left( 1 + \beta \left( e^{\frac{\alpha}{x(i)^2}} - 1 \right) \right)^{-\lambda} - \frac{i}{n+1} \right]^2$  را نسبت به پارامترهای  $(\alpha, \beta, \lambda)$  مینیمم می‌کنیم تا برآورد حداقل مربعات پارامترهای نامعلوم بدست آیند.  
 با مینیمم کردن  $\sum_{i=1}^n v_i [F(X_{(i)}) - E(F(X_{(i)}))]^2$  که در آن  $v_i = [Var(F(X_{(i)}))]^{-1}$ ، برآورد حداقل مربعات وزنی پارامترهای نامعلوم بدست می‌آیند.

## ۵. نتیجه‌گیری

بسط و گسترش توزیع‌های احتمال، همواره در نظریه آمار رو به رشد بوده است. در این مقاله، توزیع وارون لوماکس-وارون ریلی معرفی شد و تابع توزیع و تابع چگالی احتمال آن را بدست آوردیم. با توجه به محدودیت حجم مقاله، تعداد محدودی از ویژگی‌های توزیع را بدست آوردیم و برای برآورد پارامترها صرفاً روش‌های برآورد بیان شده‌اند و مقایسه روش‌ها و شبیه‌سازی داده‌ها صورت نگرفت.

## منابع

1. Afify, A.Z., Nassar, M., Cordeiro, G.M., and Kumar, D. (2020) The Weibull Marshall–Olkin Lindley distribution: properties and estimation, *J. Taibah Univ. Sci.*, 14 (1), pp. 192-204.
2. Ahmad, Z. (2020) The zubair-g family of distributions: properties and applications, *Ann. Data Sci.*, 7 (2), pp. 195-208.
3. Alizadeh, M., Afify, A.Z., Eliwa, M., and Ali, S. (2020) The odd log-logistic Lindley-g family of distributions: properties, Bayesian and non-Bayesian estimation with applications, *Comput. Stat.*, (1), pp. 281-308.
4. Alizadeh, M., Afshari, M., Hosseini, B., and Ramires, T.G. (2020) Extended exp-g family of distributions: properties, applications and simulation, *Commun. Stat., Simul. Comput.*, 49 (7), pp. 1730-1745.
5. Alzaatreh, A., Lee, C., and Famoye, F. (2013) A new method for generating families of continuous distributions, *Metron*, 71 (1), pp. 63-79.
6. Chakraborty, S., Handique, L., and Jamal, F. (2020) The Kumaraswamy Poisson-g family of distribution: its properties and applications, *Ann. Data Sci.*, pp. 1-19.
7. Falgore, J.Y., and Doguwa, S.I. (2020) Inverse lomax-exponentiated g (il-eg) family of distributions: properties and applications, *Asian J. Probab. Stat.*, 9 (4), pp. 48-64.
8. Falgore, J.Y., and Doguwa, S.I. (2020) Kumaraswamy-odd Rayleigh-g family of distributions with applications, *Open J. Stat.*, 10 (04), pp. 719-734.
9. Falgore, J.Y., and Doguwa, S.I. (2020) The inverse lomax-g family with application to breaking strength data, *Asian J. Probab. Stat.*, 8 (2), pp. 49-60.
10. Handique, L., Chakraborty, S., and Jamal, F. (2020) Beta Poisson-g family of distributions: its properties and application with failure time data, *arXiv:2005.10690*, pp. 1-23.



11. Kleiber C., and Kotz S. (2003) *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, 470, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
12. McKenzie D., Miller C., and Falk D. A. (2011) *The Landscape Ecology of Fire*, Springer Science & Business Media, New York.
13. Swain, J.J., Venkatraman, S., and Wilson, J.R. (1988) Least squares estimation of distribution function in John-son's translation system, *J. Stat Comput Simul* 29(4): 271–297.
14. Treyer, V.N. (1964) Inverse Rayleigh (IR) model. *Proc. USSR Acad. Sci.*
15. Voda, V.G. (1972) On the inverse Rayleigh distributed random variable. *Rep. Statis. App. Res. JUSE*, 19, 13–21.

