




# دوازدهمین همایش ملی ریاضی دانشگاه پیام نور

۱۵ الی ۱۶ آبان ماه ۱۴۰۴  
دانشگاه پیام نور استان مازندران - مرکز ساری

کد اختصاصی:  
۰۴۲۵۰-۲۴۴۱۸

مخبره‌های همایش  
گرایش های علوم ریاضیات  
و کاربردهای مرتبط با آن

چاپ مقالات برتر  
در مجلات علمی  
پژوهشی معتبر



## مجموعه مقالات

# دوازدهمین همایش ملی ریاضی دانشگاه پیام نور

 <https://12nma.conf.pnu.ac.ir>

 <https://eita.com/mazmath>

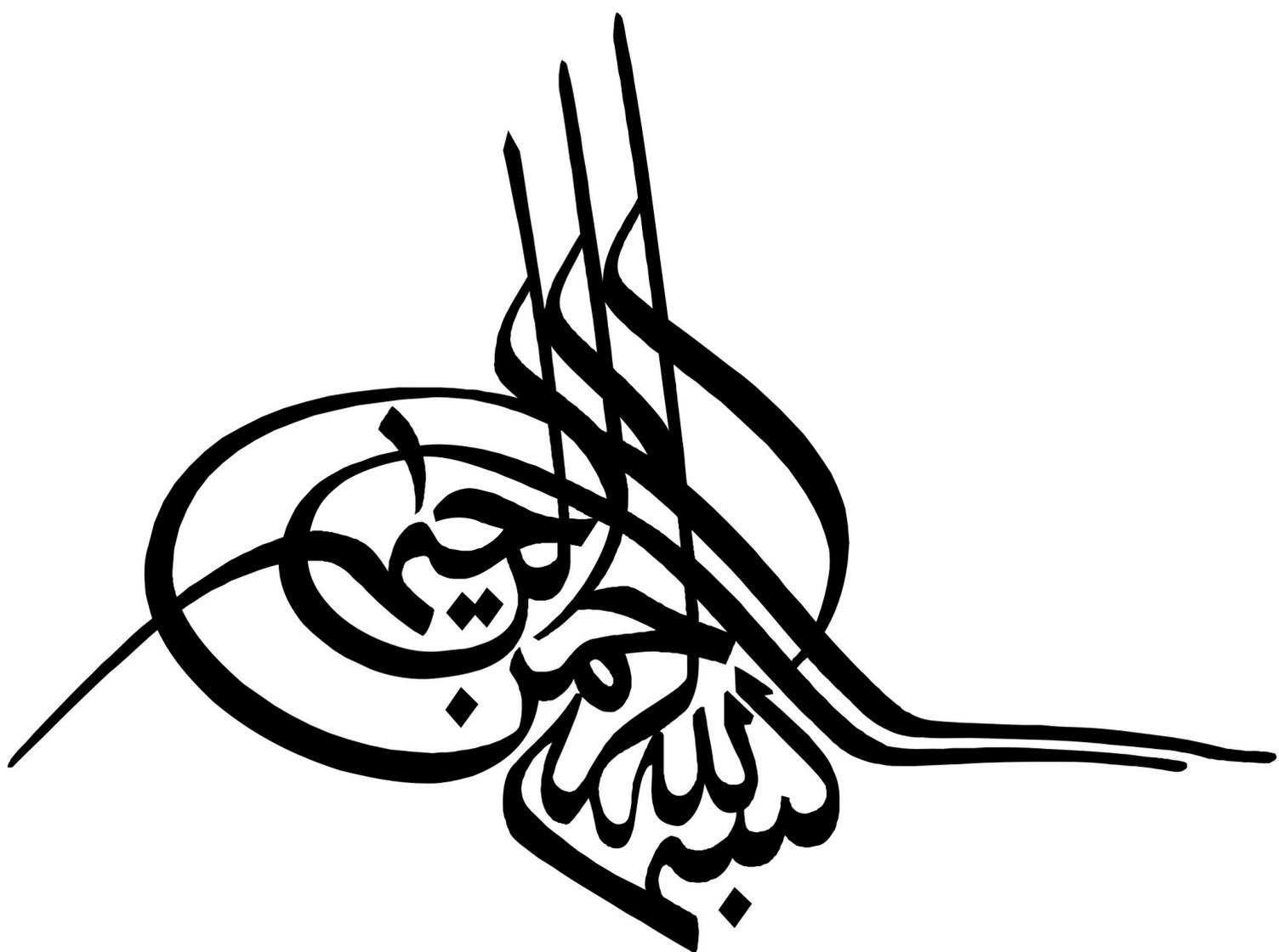
 12mazmath@gmail.com

 ۰۱۱۳۳۲۰۸۹۴۴



Logos include: MTZ Mazandaran Free Zone, Civilica, Mazandaran University, and various academic and research centers.







کد اختصاصی:  
۰۴۲۵۰-۲۴۴۱۸



دانشگاه پیام نور استان مازندران

# دوازدهمین همایش ملی ریاضی دانشگاه پیام نور

۱۵ و ۱۶ آبان ماه ۱۴۰۴

دانشگاه پیام نور استان مازندران - مرکز ساری

**12<sup>th</sup> National Mathematics Conference of  
Payame Noor University**

**6-7 November 2025**

**Payame Noor University of Mazandaran  
Sari- Iran**

# مجموعه مقالات دوازدهمین همایش ملی ریاضی دانشگاه پیام نور



گرد آوری، تدوین و صفحه آرایی:

مصطفی نوری جویباری و داود درویشی سلوکلائی

## آدرس دبیر خانه:

- استان مازندران - شهر ساری - خیابان پانزده خرداد - دانشگاه پیام نور استان مازندران - مرکز ساری - طبقه دوم - دفتر پژوهش و ارتباط با صنعت
- تلفن: ۰۱۱۳۳۲۰۸۹۴۴
- درگاه: <https://www.12nma.conf.pnu.ac.ir>
- پست الکترونیک: [12mazmath@gmail.com](mailto:12mazmath@gmail.com)

## فهرست مطالب:

- پیام دبیر همایش
- پوستر همایش
- برگزار کنندگان و حامیان همایش
- محور های همایش
- اعضای کمیته راهبردی همایش
- اعضای کمیته علمی همایش
- اعضای کمیته اجرایی همایش
- برنامه همایش
- فهرست مقالات همایش
- مقالات همایش

# پیام دبیر همایش:

به نام ایزد پاک

با اتکال به خداوند متعال، دانشگاه پیام نور با همکاری و مشارکت پایگاه استنادی علوم جهان اسلام، دانشگاه ها، دستگاه ها و سازمان ها، مراکز آموزشی و پژوهشی و اعضای محترم کمیته های علمی و اجرایی و با حضور و مشارکت بی سابقه محققین، دانشگاهیان و دانش پژوهان و دست اندرکاران ملی و بین المللی و در حوزه علوم ریاضی، دوازدهمین دوره همایش ملی ریاضی دانشگاه پیام نور با هدف تبادل دانش، بررسی تازه ترین دستاوردهای حوزه علوم ریاضی و کاربردهای آن در روزهای ۱۵ و ۱۶ آبان ۱۴۰۴ هم زمان با گرامیداشت روز ملی مازندران با مشارکت بیش از ۳۰۰ تن از پژوهشگران سراسر کشور به صورت مجازی - حضوری با حمایت انجمن های علمی معتبر در دانشگاه پیام نور استان مازندران، مرکز ساری برگزار شد.

یقیناً استقبال گرم و شایسته محققان و پژوهشگران در این حوزه برای ارائه مقاله و شرکت در این همایش علاوه بر این که نشان دهنده رشد و اعتلای این دانش پویا در کشور طی سال های اخیر است، بیانگر وجود توانایی های بالقوه و بالفعل در بین محققان و دانش پژوهان کشور در نوآوری و انجام پژوهش های اصیل می باشد. به ویژه حضور و مشارکت محققین برجسته نشان دهنده جایگاه مناسب و اهمیت این علم در جامعه است. دبیرخانه کنفرانس ۴۰۳ مقاله دریافت کرد که پس از بررسی وضعیت مقالات و با توجه به محدودیت زمان برای ارائه، تصمیم بر آن شد ۲۳۵ مقاله برای ارائه در کنفرانس به صورت سخنرانی و ۱۲۴ مقاله به صورت ارائه پوستر پذیرفته شود. در حاشیه این همایش ۶ کارگاه آموزشی تخصصی در حوزه هوش مصنوعی، آزمایشگاه ریاضی و چالش های بازارهای مالی نیز برگزار گردید.

در اینجا لازم می دانم تا از جناب آقای دکتر محمدهادی امین ناجی، رئیس محترم دانشگاه پیام نور و معاونین محترم ایشان، رئیس دانشکده علوم پایه، دبیر شورای تخصصی گروه، ریاست محترم دانشگاه پیام نور استان مازندران، جناب آقای دکتر صابر قاسم پور، دکتر مصطفی نوری جویباری دبیر محترم کمیته اجرایی، اعضای محترم کمیته های علمی و اجرایی، فرماندار محترم شهر ساری، مدیران ادارات و دستگاه های اجرایی استان و به طور ویژه روسای محترم شرکت سهامی بیمه ایران، دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری، کانون پرورش فکری کودکان و نوجوانان، مدیریت امور شعب بانک قرض الحسنه مهر ایران و صدا و سیما مرکز مازندران تشکر کنم و از همه حامیان ارجمند که ما را در برگزاری این همایش مورد حمایت و تشویق خویش قرار دادند، کمال تشکر و قدردانی را به عمل آورم. در خاتمه از کلیه دانشجویان و مدیران ستادی استان و همکاران محترم که ما را در اجرای این همایش یاری نمودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

با آرزوی توفیق الهی

داود درویشی سلوکلابی

دبیر علمی کنفرانس

# پوستر همایش:

**دوازدهمین همایش ملی ریاضی دانشگاه پیام نور**

کد اختصاصی: ۲۴۴۱۸-۴۲۵۰

۱۵ الی ۱۶ آبان ماه ۱۴۰۴

دانشگاه پیام نور استان مازندران - مرکز ساری

مخبره های همایش: گرایش های علوم ریاضیات و کاربردهای مرتبط با آن

چاپ مقالات برتر در مجلات علمی پژوهشی معتبر

$y = ax^2 + bx + c$   
 $x = \frac{L}{2}$   
 $y = \frac{4xh(L-x)}{L^2}$

دانشگاه پیام نور استان مازندران

همیشه کشف ترک جهان هستی است بدون دانش همیشه ورودی است.

<https://12nma.conf.pnu.ac.ir>

<https://eita.com/mazmath>

12mazmath@gmail.com

۰۱۱۳۳۲۰۸۹۴۴

Logos of participating institutions: CIVILICA, Mazandaran University, and others.

QR code

# برگزار کنندگان و حامیان دوازدهمین همایش ملی ریاضی دانشگاه پیام نور:

## ► برگزار کننده:

دانشگاه پیام نور استان مازندران

## ► رییس همایش:

رییس دانشگاه پیام نور استان مازندران

دکتر صابر قاسم پور

## ► دبیر علمی همایش:

معاون آموزشی و پژوهشی استان

دکتر داود درویشی سلوکلابی

## ► دبیر اجرایی همایش:

مدیر پژوهش و کار آفرینی استان

دکتر مصطفی نوری جویباری

## ► حامیان همایش:

استانداری مازندران - فرمانداری ساری - شهرداری ساری - منطقه آزاد تجاری صنعتی مازندران - پارک علم و فناوری استان مازندران - ستاد بزرگداشت روز مازندران - شورای اسلامی شهر ساری - نمایندگی بیمه ایران استان مازندران - بانک قرض الحسنه مهر ایران - اداره کل آموزش و پرورش استان مازندران

## ► حامیان علمی همایش:

دانشگاه مازندران - دانشگاه ملی مهارت استان مازندران - دانشگاه آیندگان - پایگاه علمی سیویلیکا - دانشگاه علوم دریایی امام خمینی (ره) نوشهر - موسسه استنادی و پایش علم و فناوری جهان اسلام (ISC) - دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل - انجمن ایرانی تحقیق در عملیات - مجله انجمن ایرانی تحقیق در عملیات - انجمن ایرانی تحلیل پوششی داده ها - مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن (ریاضی کاربردی) - دانشگاه علم و فناوری مازندران (بهشهر) - دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری - دانشگاه فناوری های نوین آمل - موسسه آموزش عالی راهیان نوین دانش ساری - دانشگاه آزاد اسلامی مازندران - خانه ریاضیات ساری - مجله **Journal of Mahani Mathematical Research (JMMR)** - مجله **The International Journal of Applied Operational Research (IJAOR)** - مجله **Grey Systems: Theory and Application** - مجله **Control and Optimization in Applied Mathematics (COAM)**

## محور های همایش:

- جبر
- آنالیز ریاضی
- آنالیز تابعی
- معادلات دیفرانسیل و سیستم های دینامیکی
- هندسه و توپولوژی
- ترکیبیات و گراف
- تاریخ و فلسفه ریاضی
- آنالیز عددی و محاسبات نرم
- آموزش ریاضی
- تحقیق در عملیات
- منطق ریاضی
- نظریه اعداد
- ریاضی عدم قطعیت
- ریاضی مهندسی
- جبر خطی و نظریه ماتریس ها
- بهینه سازی و کنترل بهینه
- آمار و احتمال، داده کاوی و علم داده
- هوش مصنوعی و ریاضی
- ریاضی زیستی
- ریاضی در هنر و معماری
- ریاضی مالی و ارزیابی ریسک
- ریاضی در مدیریت
- ریاضی در جامعه شناسی و روانشناسی
- ریاضی در معماری
- ریاضی در کشاورزی و اقتصاد پایدار
- بهینه سازی مصرف انرژی و ناترازی
- ریاضی در علوم پزشکی
- کاربرد ریاضی در علوم دیگر

## کمیته راهبردی :

دکتر شهریار فرهمند راد

ریاست دانشکده علوم پایه و رییس کمیته راهبردی

دکتر جهانگیر چشم آور

دبیر شورای تخصصی گروه ریاضی و عضو کمیته راهبردی

دکتر صابر قاسم پور

ریاست دانشگاه پیام نور استان و دبیر کمیته راهبردی

دکتر داود درویشی سلوکلائی

دبیر علمی همایش و عضو کمیته راهبردی

دکتر مصطفی نوری جویباری

دبیر اجرایی همایش و عضو کمیته راهبردی

## کمیته علمی:

|                       |          |                             |                          |          |                               |
|-----------------------|----------|-----------------------------|--------------------------|----------|-------------------------------|
| اسماعیل بابلیان       | استاد    | دانشگاه خوارزمی             | سید مهدی میرحسینی        | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| امیر جعفری            | استاد    | دانشگاه شریف                | سید هادی ناصری           | دانشیار  | دانشگاه مازندران              |
| آرشام برومند سعید     | استاد    | دانشگاه شهید باهنر کرمان    | علی اصغر طالبی رستمی     | دانشیار  | دانشگاه مازندران              |
| حسین جعفری            | استاد    | دانشگاه مازندران            | محمد حمیدی               | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| دوستعلی مژده          | استاد    | دانشگاه مازندران            | محمد علی حسین زاده       | دانشیار  | دانشگاه فناوری های نوین آمل   |
| رحیم زارع نهندی       | استاد    | دانشگاه تهران               | مریم شمس سولاری          | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| سامان بابایی          | استاد    | دانشگاه سمنان               | مهدی جعفری               | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| احمد عرفانیان         | استاد    | دانشگاه فردوسی مشهد         | نادر کنزی                | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| طاهر قاسمی هنری       | استاد    | دانشگاه خوارزمی             | هادی رضا زاده            | دانشیار  | دانشگاه فناوری های نوین آمل   |
| عقیله حیدری           | استاد    | دانشگاه پیام نور            | اکبر هاشمی برزآبادی      | استاد    | دانشگاه علم و فناوری مازندران |
| قاسم علیزاده افروزی   | استاد    | دانشگاه مازندران            | امیر حسام زعیم           | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| کاظم خشایار منش       | استاد    | دانشگاه فردوسی مشهد         | اکبر رضایی               | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| مازیار صلاحی          | استاد    | دانشگاه گیلان               | پیمان غیاثوند            | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| مجید اسحاقی گرچی      | استاد    | دانشگاه سمنان               | فرخنده فرضعلی پور        | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| مجید میرزاویری        | استاد    | دانشگاه فردوسی مشهد         | فهیمه سلطانیان           | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| محسن علیمحمدی         | استاد    | دانشگاه مازندران            | اسماعیل نیکوفر           | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| یحیی طالبی رستمی      | استاد    | دانشگاه مازندران            | سعید میروکیلی            | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| جواد وحیدی            | دانشیار  | دانشگاه علم و صنعت          | سعید رجائی               | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| صابر قاسم پور         | استادیار | دانشگاه پیام نور            | مصطفی امینی              | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| اله بخش یزدانی چراتی  | دانشیار  | دانشگاه مازندران            | محمدرضا فروتن            | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| جعفر پور محمود        | دانشیار  | دانشگاه شهید مدنی آذربایجان | علیرضا وحیدی سفیدان جدید | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| جهانگیر چشم آور       | دانشیار  | دانشگاه پیام نور            | شهرام رضایی              | دانشیار  | دانشگاه پیام نور              |
| حبیبه نظیف            | دانشیار  | دانشگاه پیام نور            | رضا عامری                | استاد    | دانشگاه تهران                 |
| داوود درویشی سلوکلابی | دانشیار  | دانشگاه پیام نور            | کمال فلاحی               | دانشیار  | دانشگاه رازی کرمانشاه         |
| مهدی رفیعی راد        | دانشیار  | دانشگاه مازندران            | سیداحمد عدالت پناه       | دانشیار  | دانشگاه آیندگان               |
| سید هاشم رسولی        | دانشیار  | دانشگاه نوشیروانی بابل      | حمید رضا یوسف زاده       | استادیار | دانشگاه پیام نور              |

## کمیته اجرایی:

|                                |                |              |                        |                 |              |
|--------------------------------|----------------|--------------|------------------------|-----------------|--------------|
|                                |                |              | رییس همایش             | قاسم پور        | صابر         |
|                                |                |              | دبیر علمی همایش        | درویشی سلوکلائی | داود         |
|                                |                |              | دبیر اجرایی همایش      | نوری جویباری    | مصطفی        |
|                                |                |              | عضو محترم کمیته اجرایی | میرحسینی        | سید مهدی     |
|                                |                |              | عضو محترم کمیته اجرایی | هزار جریبی      | معصومه       |
|                                |                |              | عضو محترم کمیته اجرایی | همتیان          | پرینا        |
|                                |                |              | عضو محترم کمیته اجرایی | نجفی            | محمد رضا     |
|                                |                |              | عضو محترم کمیته اجرایی | مردانی          | حمید رضا     |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | بشارتی         | نازلی        | عضو محترم کمیته اجرایی | کاکویی          | مجتبی        |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | جعفری          | مهدی         | عضو محترم کمیته اجرایی | کاظمی           | زینب         |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | جعفری پطرودی   | سید حسین     | عضو محترم کمیته اجرایی | نوروزی          | الهام        |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | حمیدی          | محمد         | عضو محترم کمیته اجرایی | نبی پور         | امیر         |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | دهقاندار       | محمد         | عضو محترم کمیته اجرایی | عارفی           | علیرضا       |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | رزاقیان        | هادی         | عضو محترم کمیته اجرایی | ولی زاده        | مهدی         |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | رضایی          | اکبر         | عضو محترم کمیته اجرایی | شاکریان         | رضا          |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | شکوهی امیری    | هادی         | عضو محترم کمیته اجرایی | اکبری           | مریم         |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | شمس سولاری     | مریم         | عضو محترم کمیته اجرایی | برزویی          | طاهره        |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | صمدی           | فرشته        | عضو محترم کمیته اجرایی | جهان پناه       | سیروس        |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | عزیزی          | آرام         | عضو محترم کمیته اجرایی | حسین پور        | ایمان        |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | علیزاده افروزی | مریم         | عضو محترم کمیته اجرایی | حیدری           | امیرعباس     |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | غیاثوند        | پیمان        | عضو محترم کمیته اجرایی | خان محمدی       | لیلا         |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | فرضعلی پور     | فرخنده       | عضو محترم کمیته اجرایی | دژکام           | احسان        |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | فلاح تلوکی     | عادل         | عضو محترم کمیته اجرایی | رضایی           | احمد         |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | فلاحی          | کمال         | عضو محترم کمیته اجرایی | رضوی            | سید مصطفی    |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | کنزی           | نادر         | عضو محترم کمیته اجرایی | رمضانی          | مصطفی        |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | گل زاده        | احسان        | عضو محترم کمیته اجرایی | شعبان زاده      | علی اصغر     |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | محمد زاده      | الهه         | عضو محترم کمیته اجرایی | محمدیان         | محمد رضا     |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | کاکولاریمی     | آرش          | عضو محترم کمیته اجرایی | منتظری          | رحیم         |
| ناظر محترم جلسات ارائه سخنرانی | رضایی          | اکبر         | عضو محترم کمیته اجرایی | موسوی           | المیرا       |
| عضو محترم کمیته اجرایی         | ملوندی         | مریم         | عضو محترم کمیته اجرایی | مهاجر وطن       | فاطمه        |
| عضو محترم کمیته اجرایی         | قاضیانی        | خدیجه        | عضو محترم کمیته اجرایی | هاشم زاده       | رضا          |
| عضو محترم کمیته اجرایی         | کاظم نژاد      | سید علی      | عضو محترم کمیته اجرایی | هاشمی           | سید حسن      |
| عضو محترم کمیته اجرایی         | کاظم نژاد      | سید زهرا     | عضو محترم کمیته اجرایی | یوسفی           | محترم        |
| عضو محترم کمیته اجرایی         | فرپور          | رامتین       | عضو محترم کمیته اجرایی | مهرجو           | سید محمد حسن |
| عضو محترم کمیته اجرایی         | شکوری          | گوهر         | عضو محترم کمیته اجرایی | شفیع نژاد       | جواد         |
| عضو محترم کمیته اجرایی         | روانبخش        | بنت الهدی    | عضو محترم کمیته اجرایی | رویین تن        | رویا         |
| عضو محترم کمیته اجرایی         | رحمانی         | مهدی         | عضو محترم کمیته اجرایی | بیدل            | کوثر         |
| عضو محترم کمیته اجرایی         | نیک صفت        | پرستو        | عضو محترم کمیته اجرایی | بدخشان          | سحر          |
| عضو محترم کمیته اجرایی         | یزدانی چراتی   | زهرا         | عضو محترم کمیته اجرایی | ابراهیمی        | رسول         |
| مجری مراسم افتتاحیه            | خلیلی          | زهرا السادات | عضو محترم کمیته اجرایی | امینی           | زهرا         |

# برنامه همایش:

برنامه دوازدهمین همایش ملی ریاضی دانشگاه پیام نور - استان مازندران - ساری

۱۵ و ۱۶ آبان ماه ۱۴۰۴

| روز اول                | ۸ - ۹       | ۹ - ۱۰:۳۰                        | ۱۰:۳۰ - ۱۱:۰۰                   | ۱۱:۰۰ - ۱۲:۰۰                         | ۱۲:۰۰ - ۱۴:۰۰                    | ۱۵:۴۰ - ۱۶:۰۰   | ۱۶:۰۰ - ۱۷:۴۰             | ۱۸-۲۰   |
|------------------------|-------------|----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|---|---------------------------|---|
| پنج شنبه<br>۱۴۰۴/۰۸/۱۵ | پذیرش       | افتتاحیه<br><a href="#">لینک</a> | استراحت و پذیرایی و ارائه پوستر | سخنرانی عمومی<br><a href="#">لینک</a> | نماز و ناهار                     | استراحت و پذیرایی و ارائه پوستر   | سخنرانی های تخصصی (بخش ۲) | گردهمایی هیات علمی گروه ریاضی پیام نور کشور<br><a href="#">لینک</a> |
| روز دوم                | ۸ - ۸:۳۰    | ۸:۳۰ - ۹:۵۰                      | ۹:۵۰ - ۱۰:۱۰                    | ۱۰:۱۰ - ۱۱:۱۰                         | ۱۱:۱۰ - ۱۲                       |  |                           |   |
| جمعه<br>۱۴۰۴/۰۸/۱۶     | ارائه پوستر | سخنرانی های تخصصی (بخش ۳)        | استراحت و پذیرایی               | سخنرانی های تخصصی (بخش ۴)             | اختتامیه<br><a href="#">لینک</a> |   |                           |   |

## دبیر خانه همایش

| ROOM 13                   | ROOM 12                 | ROOM 11                                     | ROOM 10              | ROOM 9               | ROOM 8               | ROOM 7                                  | ROOM 6               | ROOM 5               | ROOM 4               | ROOM 3               | ROOM 2               | ROOM 1               | روز   | ساعت        |
|---------------------------|-------------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---|-------------|
| کاربرد ریاضی در سایر علوم | آمار ریاضی مالی معادلات | بهینه سازی کنترل، کاربرد ریاضی در سایر علوم | تحقیق در عملیات      | هندسه توپولوژی       | آنالیز عددی          | آنالیز ریاضی، کاربرد ریاضی در سایر علوم | آنالیز ریاضی         | آنالیز ریاضی         | گراف آموزش ریاضی     | جبر ریاضیات فازی     | جبر                  | جبر                  |  | لینک جلسات  |
| <a href="#">لینک</a>      | <a href="#">لینک</a>    | <a href="#">لینک</a>                        | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a>                    | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a> | پنج شنبه  | ۱۴:۰۰-۱۴:۳۰ |
| ۸۰۶۹                      | ۷۸۷۴                    | ۷۹۹۵  | ۷۹۵۷                 | ۷۸۸۲                 | ۷۸۸۹                 | ۷۲۷۶                                    | ۷۵۵۰                 | ۷۸۹۳                 | ۷۹۲۵                 | ۷۲۸۸                 | ۷۴۲۳                 | ۷۹۶۲                 | پنج شنبه  | ۱۴:۳۰-۱۴:۴۰ |
| ۷۹۰۰                      | ۷۷۲۴                    | ۷۹۳۳  | ۷۹۵۶                 | ۷۸۴۰                 | ۷۸۸۷                 | ۷۲۶۸                                    | ۷۵۴۳                 | ۷۸۸۳                 | ۷۸۷۸                 | ۷۲۸۷                 | ۷۳۴۰                 | ۷۸۴۹                 | پنج شنبه  | ۱۴:۴۰-۱۵:۰۰ |
| ۷۸۸۸                      | ۷۵۳۷                    | ۷۹۳۱  | ۷۹۵۴                 | ۷۸۱۹                 | ۷۸۸۱                 | ۷۱۴۰                                    | ۷۵۲۳                 | ۷۸۷۷                 | ۷۷۴۷                 | ۷۲۹۷                 | ۷۳۳۰                 | ۷۷۸۱                 | پنج شنبه  | ۱۵:۰۰-۱۵:۲۰ |
| ۷۸۷۰                      | ۷۵۳۳                    | ۷۸۰۳  | ۷۹۲۹                 | ۷۸۱۷                 | ۷۸۷۹                 | ۷۸۵۰                                    | ۷۵۱۹                 | ۷۸۶۵                 | ۷۵۵۷                 | ۷۲۹۱                 | ۷۳۰۲                 | ۷۷۷۲                 | پنج شنبه  | ۱۵:۲۰-۱۵:۴۰ |
| ۷۸۶۷                      | ۷۴۵۲                    | ۷۷۳۳  | ۷۹۲۶                 | ۷۸۰۴                 | ۷۸۴۲                 | ۷۷۸۷                                    | ۷۵۰۱                 | ۷۸۶۳                 | ۷۵۵۴                 | ۷۲۴۵                 | ۷۲۹۸                 | ۷۷۵۲                 | پنج شنبه  | ۱۵:۴۰-۱۶:۰۰ |
| استراحت ۱۶:۰۰-۱۶:۰۰       |                         |   |                      |                      |                      |   |                      |                      |                      |                      |                      |                      |   |             |
| ۷۸۴۵                      | ۷۳۱۸                    | ۷۶۸۲  | ۷۸۹۰                 | ۷۶۶۴                 | ۷۷۵۳                 | ۷۵۳۴                                    | ۷۴۶۰                 | ۷۸۴۸                 | ۷۵۵۳                 | ۷۲۴۴                 | ۷۲۹۰                 | ۷۶۳۹                 | پنج شنبه  | ۱۶:۰۰-۱۶:۳۰ |
| ۷۸۲۱                      | ۷۲۷۵                    | ۷۶۸۱  | ۷۸۸۶                 | ۷۶۴۹                 | ۷۶۴۳                 | ۷۳۹۵                                    | ۷۴۴۶                 | ۷۸۴۷                 | ۷۵۳۴                 | ۷۲۰۲                 | ۷۲۷۸                 | ۷۵۸۸                 | پنج شنبه  | ۱۶:۳۰-۱۶:۴۰ |
| ۷۸۳۰                      | ۷۲۶۶                    | ۷۶۷۴  | ۷۸۵۴                 | ۷۶۴۲                 | ۷۶۴۰                 | ۷۳۴۹                                    | ۷۴۱۳                 | ۷۸۳۲                 | ۷۵۲۳                 | ۷۱۳۸                 | ۷۲۴۶                 | ۷۵۶۶                 | پنج شنبه  | ۱۶:۴۰-۱۷:۰۰ |
| ۷۸۲۵                      | ۷۲۵۳                    | ۷۶۷۳  | ۷۸۴۴                 | ۷۵۹۹                 | ۷۵۷۸                 | ۷۲۶۲                                    | ۷۴۱۲                 | ۷۸۲۱                 | ۷۵۱۸                 | ۸۰۳۲                 | ۷۲۰۵                 | ۷۵۳۶                 | پنج شنبه  | ۱۷:۰۰-۱۷:۳۰ |
| ۷۸۲۴                      | ۷۲۳۸                    | ۷۵۱۵  | ۷۷۱۶                 | ۷۵۸۳                 | ۷۵۷۲                 | ۷۶۰۹                                    | ۷۳۹۱                 | ۷۷۲۰                 | ۷۵۰۰                 | ۷۷۰۲                 | ۷۷۰۵                 | ۷۵۲۵                 | پنج شنبه  | ۱۷:۳۰-۱۷:۴۰ |
| لینک جلسات                |                         |   |                      |                      |                      |   |                      |                      |                      |                      |                      |                      |   |             |
| <a href="#">لینک</a>      | <a href="#">لینک</a>    | <a href="#">لینک</a>                        | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a>                    | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a> | <a href="#">لینک</a> | جمعه  | ۰۸:۳۰-۰۸:۵۰ |
| ۷۸۱۶                      | ۷۲۰۰                    | ۷۴۹۱  | ۷۶۷۹                 | ۷۵۱۷                 | ۷۵۷۰                 | ۷۵۷۶                                    | ۷۲۴۸                 | ۷۷۰۶                 | ۷۴۵۵                 | ۷۶۲۸                 | ۷۷۷۹                 | ۷۵۲۰                 | جمعه  | ۰۸:۵۰-۰۹:۱۰ |
| ۷۸۰۷                      | ۷۶۹۳                    | ۷۴۰۹  | ۷۶۳۵                 | ۷۴۹۴                 | ۷۵۶۸                 | ۷۵۴۹                                    | ۷۳۴۴                 | ۷۶۶۳                 | ۷۴۷۰                 | ۷۶۳۷                 | ۷۷۷۰                 | ۷۵۰۹                 | جمعه  | ۰۹:۱۰-۰۹:۳۰ |
| ۷۷۸۰                      | ۷۶۲۶                    | ۷۳۶۶  | ۷۵۹۱                 | ۷۴۶۸                 | ۷۵۴۵                 | ۷۴۲۱                                    | ۷۳۲۹                 | ۷۶۵۳                 | ۷۳۵۱                 | ۷۶۲۹                 | ۷۵۶۳                 | ۷۴۷۷                 | جمعه  | ۰۹:۳۰-۰۹:۵۰ |
| ۷۷۶۷                      | ۷۸۹۹                    | ۷۳۳۳  | ۷۵۳۰                 | ۷۸۵۷                 | ۷۵۴۲                 | ۷۳۳۷                                    | ۷۳۲۲                 | ۷۶۲۰                 | ۷۴۸۳                 | ۷۵۲۹                 | ۷۴۷۳                 | ۷۴۷۳                 | جمعه  | ۰۹:۵۰-۱۰:۱۰ |
| استراحت ۱۰:۱۰-۱۰:۱۰       |                         |   |                      |                      |                      |   |                      |                      |                      |                      |                      |                      |   |             |
| ۷۷۰۳                      | ۷۸۸۶                    | ۷۲۳۴  | ۷۵۱۳                 | ۷۸۵۶                 | ۷۵۳۳                 | ۷۳۱۰                                    | ۷۳۱۲                 | ۷۶۱۹                 | ۷۳۵۱                 | ۷۴۴۳                 | ۷۵۱۱                 | ۷۴۳۲                 | جمعه  | ۱۰:۱۰-۱۰:۳۰ |
| ۷۶۷۶                      | ۷۸۴۱                    | ۷۱۸۹  | ۷۴۳۹                 | ۷۵۴۴                 | ۷۵۰۲                 | ۷۳۲۳                                    | ۷۲۸۴                 | ۷۶۰۳                 | ۷۳۱۳                 | ۷۴۲۱                 | ۷۴۷۵                 | ۷۴۴۹                 | جمعه  | ۱۰:۳۰-۱۰:۵۰ |
| ۷۶۴۵                      | ۷۱۴۹                    | ۷۴۰۲  | ۷۳۰۱                 | ۷۴۹۶                 | ۷۲۱۸                 | ۷۲۷۷                                    | ۷۵۸۴                 | ۷۱۴۶                 | ۷۴۶۳                 | ۷۳۸۹                 | ۷۴۸۹                 | ۷۴۸۹                 | جمعه  | ۱۰:۵۰-۱۱:۱۰ |

# فهرست

| ردیف | عنوان مقاله  | نام      | نام خانوادگی | محور                      | شناسه | صفحه شروع |
|------|--|----------|--------------|---------------------------|-------|-----------|
| ۱    | ایده ال های لی نرم   | سی به ر  | قادری        | جبر                       | ۷۱۳۸  | ۱         |
| ۲    | $d$ -تابی و ارتباط آن با مجموعه $d(v)$   | سیدحمید  | مسعودی       | جبر                       | ۷۱۹۰  | ۵         |
| ۳    | گروه های بی تاب جدایی پذیر، تجزیه پذیر و زیرگروه های خالص  | فاطمه    | کریمی        | جبر                       | ۷۳۳۰  | ۹         |
| ۴    | ابزرده ها و زیربرده های ارثی برخی از گروه های مستقیماً متناهی  | فاطمه    | کریمی        | جبر                       | ۷۳۳۱  | ۱۲        |
| ۵    | برخی از مدول های کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته آرتینی با حلقه پایه شبه موضعی   | محمد     | شفیعی دیزج   | جبر                       | ۷۵۹۴  | ۱۷        |
| ۶    | جبر در توسعه ی هوش مصنوعی  | روجا     | جعفری شکوه   | جبر                       | ۷۶۰۷  | ۲۱        |
| ۷    | حلقه های انژکتیو ۲- ساده و شبه فروبنیوس  | موسی     | شامحمدی      | جبر                       | ۷۸۳۵  | ۲۵        |
| ۸    | مشفق شبه استلزامی روی جبرهای هوب   | محمد مهد | معمدی نژاد   | جبر                       | ۸۰۸۳  | ۲۹        |
| ۹    | از اسطرلاب تا الگوریتم، میراث پایدار ریاضیات اسلامی  | سید حسین | جعفری پطرودی | کاربرد ریاضی در           | ۷۱۸۹  | ۳۳        |
| ۱۰   | آنالیز مدل های ریاضی پویایی تراکم جمعیتی در مباحث مربوط به برنامه ریزی شهری از گذشته تا به                           | رضا      | لحمیان       | کاربرد ریاضی در           | ۷۲۱۸  | ۳۷        |
| ۱۱   | کاربرد رتبه بندی اعداد فازی برای حل مسئله تجزیه ریسک فازی  | پریرسا   | اسدی         | کاربرد ریاضی در           | ۷۲۳۲  | ۴۱        |
| ۱۲   | یک روش جدید برای رتبه بندی اعداد فازی با استفاده از مقدار نماینده در قاعده اصلی توسعه یافته                          | پریرسا   | اسدی         | کاربرد ریاضی در           | ۷۲۳۳  | ۴۶        |
| ۱۳   | کاربرد الگوریتم های بهینه سازی و تحلیل آماری در تشخیص زودهنگام بیماری های عصبی                                       | الناز    | احمدی        | کاربرد ریاضی در           | ۷۲۳۷  | ۵۲        |
| ۱۴   | بررسی نقش توانایی های شناختی و اضطراب ریاضی در پیشرفت ریاضی دانش آموزان پایه هفتم                                    | فرهاد    | شکری         | کاربرد ریاضی در           | ۷۲۸۳  | ۵۶        |
| ۱۵   | درک دانش آموزان از راهبردهای مؤثر یادگیری ریاضی در شهرستان تنکابن  | مریم     | اسماعیل زاده | کاربرد ریاضی در           | ۷۲۹۵  | ۶۰        |
| ۱۶   | بررسی ارتباط حافظه دیداری، کاری و کلامی با پیشرفت ریاضی دانش آموزان ابتدایی شهرستان                                  | آرمین    | حاتم جعفری   | کاربرد ریاضی در           | ۷۲۹۶  | ۶۴        |
| ۱۷   | اثربخشی برنامه توانبخشی شناختی بر بهبود عملکرد ریاضی دانش آموزان ADHD  | محمد     | محمودوند     | کاربرد ریاضی در           | ۷۳۲۵  | ۶۸        |
| ۱۸   | توسعه مهارت های حل مسئله ریاضی در مدارس ابتدایی شهرستان تنکابن با استفاده از نمایش تصویری بر مبنای راهبردهای اکتشافی | علی      | راهی         | کاربرد ریاضی در سایر علوم | ۷۳۶۱  | ۷۳        |
| ۱۹   | آموزش ریاضی واقع گرایانه و اثربخشی آن بر بهبود مهارت حل مسئله دانش آموزان پایه چهارم مدارس ابتدایی شهرستان تنکابن    | امیر     | استبصاری     | کاربرد ریاضی در سایر علوم | ۷۴۱۰  | ۷۷        |

|    |   |            |              |                           |      |     |
|----|---|------------|--------------|---------------------------|------|-----|
| ۲۰ | تحلیل فرکتالی و کاربرد مدل سازی ریاضی در رشد و تبلور کانی های پیروکسن در سنگ های آذرین شمال مشکین شهر، استان اردبیل | محمد       | فدائیان      | کاربرد ریاضی در سایر علوم | ۷۴۲۱ | ۸۱  |
| ۲۱ | انبرک نوری تولید شده توسط توابع بسل   | حسام الدین | سعادت        | کاربرد ریاضی در           | ۷۴۴۲ | ۸۶  |
| ۲۲ | نقش ماتریس ها و تجزیه های خاص (PCA و SVD) در کاهش ابعاد و استخراج ویژگی ها  | مهدی       | نصرتی        | کاربرد ریاضی در           | ۷۴۴۵ | ۹۰  |
| ۲۳ | مروری بر رویکرد های محاسباتی در کشف پیوند های ژنی - بیماری با کمک هوش مصنوعی  | سیده مهدیس | موسوی        | کاربرد ریاضی در           | ۷۴۵۷ | ۹۴  |
| ۲۴ | مدل های ریاضی در دارورسانی و درمان سلولی سرطان با کمک هوش مصنوعی - مقاله مروری                                      | مریم       | تولیده       | کاربرد ریاضی در           | ۷۴۵۸ | ۹۹  |
| ۲۵ | بهینه سازی و شبیه سازی مولکولی انتقال انرژی در سلول با بهره گیری از هوش مصنوعی                                      | امیرحسین   | اسماعیل زاده | کاربرد ریاضی در           | ۷۵۰۸ | ۱۰۴ |
| ۲۶ | رویکردی ریاضی و داده محور برای شبیه سازی نفوذ دارو در بافت توموری   | سیده تکتم  | موسوی        | کاربرد ریاضی در           | ۷۵۳۸ | ۱۰۸ |
| ۲۷ | نقش ریاضیات در محاسبات فراسنجه های قابلیت اطمینان   | عادل       | تدین فر      | کاربرد ریاضی در           | ۷۵۴۸ | ۱۱۳ |
| ۲۸ | کاربردهای سیستم خاکستری در ورزش   | فرید       | پورافقی      | کاربرد ریاضی در           | ۷۵۷۴ | ۱۱۷ |
| ۲۹ | بررسی عملکرد جایگاه شش سیگما در بهبود نتایج یک آزمایشگاه پزشکی  | ساره       | حسنی سعدی    | کاربرد ریاضی در           | ۷۵۹۳ | ۱۲۱ |
| ۳۰ | خواص تابع گامای اولترا  | محمد       | جعفری        | کاربرد ریاضی در           | ۷۶۳۱ | ۱۲۵ |
| ۳۱ | بررسی پارادوکسهای راسل و دروغگو: تحلیل و مقایسه راه حل های مختلف و ارتباط آنها با فرضیه                             | نادر       | کنزی         | کاربرد ریاضی در           | ۷۶۴۵ | ۱۲۹ |
| ۳۲ | کاربرد مدل های ریاضی در تحلیل رفتار مصرف کننده: از نظریه انتخاب تا پیش بینی تصمیم                                   | جمشید      | سالار        | کاربرد ریاضی در           | ۷۶۷۱ | ۱۳۳ |
| ۳۳ | مدل های بهینه سازی ریاضی در تصمیم گیری بازاریابی: از تخصیص بودجه تبلیغات تا طراحی                                   | جمشید      | سالار        | کاربرد ریاضی در           | ۷۶۷۶ | ۱۳۷ |
| ۳۴ | کاربرد روش های ریاضی، توان لیاپانوف و مدل های تعادل عمومی پویای تصادفی در تبیین آشوب بازار ارز                      | محمد حسین  | احسان فر     | کاربرد ریاضی در           | ۷۷۰۳ | ۱۴۱ |
| ۳۵ | کاربرد مدل های ریاضی در پیش بینی تغییرات اقلیمی: یک مرور روش شناختی   | آرش        | کاکولاریمی   | کاربرد ریاضی در           | ۷۷۱۰ | ۱۴۶ |
| ۳۶ | ریاضیات پیشرفته: ابزار کلیدی استراتژیک برای مدیریت و تصمیم گیری اقتصادی نسل جدید                                    | جمشید      | سالار        | کاربرد ریاضی در           | ۷۷۳۳ | ۱۵۰ |
| ۳۷ | کاربرد ریاضیات پیشرفته در تصمیم گیری داده محور در مدیریت و بازاریابی  | جمشید      | سالار        | کاربرد ریاضی در           | ۷۷۴۶ | ۱۵۳ |
| ۳۸ | کاربرد ریاضی برای بیان ژن سرطان سینه با استفاده از هوش مصنوعی - یک مطالعه مروری                                     | هستی       | شهبابیان     | کاربرد ریاضی در           | ۷۷۸۰ | ۱۵۷ |

|    |   |               |                    |                                 |      |     |
|----|---|---------------|--------------------|---------------------------------|------|-----|
| ۳۹ | تأثیر آموزش های فوق برنامه و سبک های<br>فرزندپروری بر اضطراب ریاضی دانش آموزان  | ویدا          | رستم آبادی         | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۸۱۵ | ۱۶۴ |
| ۴۰ | ارزیابی مدل های ریاضی در تحلیل مدیریت منطقه<br>بندی کاربری اراضی شهری   | رضا           | لحمیان             | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۸۱۶ | ۱۶۶ |
| ۴۱ | حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات درون<br>صفحه نانو حلقه ها بر پایه تئوری الاستیسیته                                  | رضا           | حسینی آراء         | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۸۲۹ | ۱۷۰ |
| ۴۲ | بررسی اثر ناموضعی در حل معادلات دیفرانسیل<br>حاکم بر ارتعاشات نانو حلقه ها  | رضا           | حسینی آراء         | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۸۳۰ | ۱۷۴ |
| ۴۳ | پاسخ ارتعاشات عرضی نانو حلقه ها به کمک حل<br>معادلات دیفرانسیل حاکم   | رضا           | حسینی آراء         | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۸۳۱ | ۱۷۷ |
| ۴۴ | تأثیر روش تدریس مشارکتی بر پیشرفت تحصیلی<br>درس ریاضی دانش آموزان   | ویدا          | رستم آبادی         | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۸۳۳ | ۱۸۰ |
| ۴۵ | مدل سازی و تحلیل ماتریسی انتشار ویژگی ها در<br>شبکه های عصبی گراف ناهمگون برای سیستم های                                  | حسین          | حق شناس            | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۸۴۵ | ۱۸۴ |
| ۴۶ | کاربرد مدل های بهینه یابی پویایی تصادفی در تعیین<br>مسیر بهینه قیمت سهام  | یعقوب         | محمودیان           | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۸۵۵ | ۱۸۸ |
| ۴۷ | تحلیل کمی ریخت شناسی فرکتالی آنالسیم های<br>ثانویه در سنگ های آذرین شمال اردبیل با استفاده از                             | محمد          | فدائیان            | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۸۶۰ | ۱۹۳ |
| ۴۸ | ارزیابی کارایی فرایندهای پروفایلی خطی ساده با<br>استفاده از شاخص کارایی تابعی بر مبنای منطق فازی                          | روشنک         | زمان               | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۸۶۷ | ۱۹۷ |
| ۴۹ | از شخصیت تا همکاری: بررسی تأثیر تیپ های<br>شخصیتی بر همتاسنجی در محیطی مبتنی بر تئوری                                     | سیده<br>فاطمه | نورانی             | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۸۶۸ | ۲۰۳ |
| ۵۰ | بررسی عملکرد جایگاه شش سیگما در بهبود توانایی<br>روند کار در کارخانجات  | ساره          | حسینی سعدی         | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۸۶۹ | ۲۰۷ |
| ۵۱ | مدل سازی ریاضی پویایی دفاتر سفارش با معادله<br>دیفرانسیل جزئی تصادفی  | جواد          | عبادپور گلنبر      | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۸۷۰ | ۲۱۱ |
| ۵۲ | کاربرد مدل های ریاضی در اقتصاد خرد  | محمد<br>حسین  | احسان فر           | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۸۸۵ | ۲۱۶ |
| ۵۳ | کاربرد مبانی ریاضی در طراحی مدل های یادگیری<br>فدرال و یادگیری ماشین کوچک برای تحلیل<br>سیگنال های الکتروکاردیوگرام (ECG) | زهرا          | حسن زاده           | کاربرد<br>ریاضی در<br>سایر علوم | ۷۸۹۷ | ۲۲۲ |
| ۵۴ | مدل سازی پویایی هویت اسلامی در نسل جوان با<br>استفاده از ریاضیات بازه ای  | معصومه        | هزارجریبی<br>دستکی | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۹۲۴ | ۲۲۶ |
| ۵۵ | بررسی کاربرد نظریه بازیها در شبکه های رقابتی مولد<br>عمیق   | شیرین         | میرعابدینی         | کاربرد<br>ریاضی در              | ۷۹۲۷ | ۲۳۰ |
| ۵۶ | تحلیل پوششی داده ها در ارزیابی کارایی دانشگاه ها:<br>مروری بر چارچوب ها و ملاحظات پیشرفته                                 | خدیدجه        | قاضیانی            | کاربرد<br>ریاضی در              | ۸۰۶۹ | ۲۳۴ |
| ۵۷ | بررسی مدل های داده محور در پیش بینی شاخص<br>های سلامتی و عوارض دارویی   | ژاله          | شیرین نژاد         | کاربرد<br>ریاضی در              | ۸۱۰۳ | ۲۳۸ |

|    |  |         |                   |                           |      |     |
|----|--|---------|-------------------|---------------------------|------|-----|
| ۵۸ | استفاده از ضرایب همبستگی ریاضی در مدل‌سازی بارش - رواناب در حوزه های آبخیز   | آرش     | کاکولاریمی        | کاربرد ریاضی در           | ۸۱۲۹ | ۳۴۴ |
| ۵۹ | استفاده مدل‌سازی ریاضی رشد کشاورزی در استان مازندران: ادغام رگرسیون و انتخاب گام‌به‌گام برای بهینه‌سازی عملکرد محصول مبتنی بر رواناب | آرش     | کاکولاریمی        | کاربرد ریاضی در سایر علوم | ۸۱۳۵ | ۳۴۸ |
| ۶۰ | نقش و ارتباط نظریه بازی ها در علوم سیاسی و روابط بین الملل   | فرهاد   | عباسی             | کاربرد ریاضی در           | ۸۶۶۲ | ۳۵۲ |
| ۶۱ | حل معادله کوشی - ریمان به روش اسپکترال و تبدیل آن به دستگاه معادلات انتگرالی   | جواد    | عبادپور گلنبر     | معادلات دیفرانسیل         | ۷۸۷۳ | ۳۵۶ |
| ۶۲ | زیر مدوله‌های تی فازی از $R \# M$  | سی به ر | قادری             | ریاضیات فازی              | ۷۱۴۶ | ۳۶۰ |
| ۶۳ | منطق فازی در ارزیابی مهارت‌های آموزشی: مروری بر مبانی، چارچوب پیشنهادی و مثال کاربردی  | هانیه   | هاشمی             | ریاضیات فازی              | ۷۲۲۱ | ۳۶۴ |
| ۶۴ | روش نوین حل معادلات دیفرانسیل خاص  | سعید    | مصیبی             | ریاضیات فازی              | ۷۴۴۷ | ۳۶۹ |
| ۶۵ | بررسی ساختار یک گروه خارج قسمتی فازی با استفاده از زیرگروه فازی تعریف شده روی آن   | موسی    | جباری             | ریاضیات فازی              | ۷۵۷۵ | ۳۹۰ |
| ۶۶ | یک مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه فازی برای مدیریت جریان کالا در زنجیره تأمین سه‌سطحی در شرایط عدم قطعیت: مطالعه موردی چینی تقدیس       | مریم    | یعقوبی            | ریاضیات فازی              | ۷۶۲۹ | ۳۹۵ |
| ۶۷ | بررسی شرایط وجود ساختارهای آماری روی گروه‌های لی پوچ توان ناآبلی چهار بعدی   | مرتضی   | شریفی نجار        | هندسه                     | ۷۴۶۸ | ۳۹۹ |
| ۶۸ | تأثیر آموزش هندسه فراکتال بر پرورش خلاقیت و تفکر واگرا در دانش آموزان  | وحید    | رفیعی             | هندسه                     | ۷۶۰۱ | ۳۰۴ |
| ۶۹ | روش های تحلیلی انتگرال مرزی روی سطوح   | وحید    | رفیعی             | هندسه                     | ۷۶۰۴ | ۳۰۹ |
| ۷۰ | کاربرد هندسه فرکتالی در شناسایی سطح و حجم تومورهای سرطانی  | ریحانه  | درویشی سلوکلاهی   | هندسه                     | ۷۷۹۲ | ۳۱۴ |
| ۷۱ | بررسی وجود ساختار آماری متقارن مزدوج بر روی گروه‌های لی پوچ توان و ناآبلی چهار بعدی  | کیمیا   | باوفای سمیرمی     | هندسه                     | ۷۸۴۰ | ۳۱۸ |
| ۷۲ | بازنویسی الگوریتم دیجکسترا   | محمد    | طاعتی             | گراف و ترکیبیات           | ۷۴۷۰ | ۳۲۲ |
| ۷۳ | مدل‌سازی قابلیت اطمینان شبکه‌ی سامانه‌های چندعاملی با گراف‌های یال-تصادفی  | عادل    | تدین‌فر           | گراف و ترکیبیات           | ۷۵۵۳ | ۳۲۶ |
| ۷۴ | مروری بر گراف‌های مقسوم‌علیه صفر و مقسوم‌علیه صفر توسعه یافته حلقه ایده‌آل‌سازی  | رقیه    | علی‌پور           | گراف و ترکیبیات           | ۷۸۷۸ | ۳۳۰ |
| ۷۵ | رابطه هم ارزی و حل یک مساله در بهینه سازی گراف   | بهزاد   | صالحیان متی کلایی | گراف و ترکیبیات           | ۷۸۹۲ | ۳۳۴ |
| ۷۶ | بررسی کران داری عملگرهای انتگرالی نوع ولترا با امید شرطی روی فضاهاى برگمن وزندار   | امیر    | علی یان           | آنالیز ریاضی              | ۷۴۱۳ | ۳۳۸ |

|     |      |              |               |               |   |    |
|-----|------|--------------|---------------|---------------|---|----|
| ۳۴۴ | ۷۴۴۶ | آنالیز ریاضی | ذبیحین پور    | مریم السادات  | ارتباط بین مجموعه های تقریبا محدود با کلاسهای دیگری از مجموعه ها  | ۷۷ |
| ۳۴۶ | ۷۵۰۱ | آنالیز ریاضی | رحمتان        | هرمز          | برآوردی دقیق از کران بالای دترمینانهای توپولیتز مرتبه ی دوم و نا مساوی فکته -سزگو برای زیر رده ای خاص از رده ی توابع تک ارز               | ۷۸ |
| ۳۵۰ | ۷۵۲۳ | آنالیز ریاضی | ذبیحین پور    | مریم السادات  | روابط بین $L_1$ -مجموعه های محدود و کلاسهای دیگری از مجموعه ها  | ۷۹ |
| ۳۵۴ | ۷۵۹۲ | آنالیز ریاضی | دهقان چاچکامی | اکرم          | وجود جواب برای دستگاه معادلات انتگرالی غیر خطی از نوع ولترا با هسته های پیوسته  | ۸۰ |
| ۳۵۸ | ۷۷۰۶ | آنالیز ریاضی | نوروزی        | فاطمه         | ویژگی هایی از خاصیت نقطه ی ثابت مرتبه ی $\{p\}lr$ در مشبکه های باناخ  | ۸۱ |
| ۳۶۲ | ۷۷۲۰ | آنالیز ریاضی | نوروزی        | فاطمه         | ویژگی های مختلفی در ارتباط با خاصیت نقطه ی ثابت   | ۸۲ |
| ۳۶۶ | ۷۸۱۲ | آنالیز ریاضی | رحیمی         | محمد          | وجود جواب های کارا و بررسی خواص توپولوژیک آن برای سیستم های تعمیم یافته   | ۸۳ |
| ۳۷۰ | ۷۸۱۳ | آنالیز ریاضی | رحیمی         | محمد          | وجود جواب برای مسایل تعادل برداری تعمیم یافته   | ۸۴ |
| ۳۷۴ | ۷۸۴۷ | آنالیز ریاضی | کاظمی         | فهمیه السادات | تعمیم هایی از قضیه جایگزینی گردان برای سیستم های غیرخطی شامل قید مجموعه ای  | ۸۵ |
| ۳۷۸ | ۷۸۴۸ | آنالیز ریاضی | کاظمی         | فهمیه السادات | شرط اسلیتر در سیستم های غیرمحدب نیمه نامتناهی   | ۸۶ |
| ۳۸۲ | ۷۸۶۵ | آنالیز ریاضی | نادری پاریزی  | مریم          | مطالعه ای در فضای متریک متعامد  | ۸۷ |
| ۳۸۶ | ۷۸۸۰ | آنالیز ریاضی | نادری پاریزی  | مریم          | تعمیم اصل انقباض باناخ در فضای $R$ -متریک   | ۸۸ |
| ۳۸۹ | ۷۴۲۴ | ریاضیات مالی | خزل           | محمد          | مدل سازی و ارزیابی ریسک سرمای هگذاری در رمزارزها با استفاده از مدل ترکیبی GARCH-VaR   | ۸۹ |
| ۳۹۲ | ۷۵۲۸ | ریاضیات مالی | خزل           | محمد          | ارزیابی ریسک و نوسانات در بازار بورس ایران با استفاده از مدل GARCH  | ۹۰ |
| ۳۹۵ | ۷۸۹۴ | ریاضیات مالی | یعقوبی        | مریم          | حل مدل برنامه ریزی چندهدفه لجستیک بحران با استفاده از الگوریتم برنامه ریزی ارمانی فازی: (FGP) ارزیابی کارایی در شبکه های امدادی ایران     | ۹۱ |
| ۳۹۹ | ۷۲۱۱ | آموزش ریاضی  | اعیان منش شاد | مریم          | چگونه توانستم با استفاده از ابزار چرک نویس در سنجش، یادگیری درس ریاضی دانش آموزان را  | ۹۲ |
| ۴۰۲ | ۷۲۸۸ | آموزش ریاضی  | حیدرپور       | زهره          | ایده بازطراحی ریاضیات رشته بازرگانی   | ۹۳ |
| ۴۰۷ | ۷۳۵۱ | آموزش ریاضی  | عسکری         | علی           | تحلیل محتوای کتاب های درسی ریاضی رشته ادبیات و علوم انسانی بر اساس رویکرد مدل سازی  | ۹۴ |
| ۴۱۱ | ۷۴۱۶ | آموزش ریاضی  | مرادی دالینی  | مرضیه         | بررسی سواد دیجیتال بر عملکرد تحصیلی   | ۹۵ |
| ۴۱۵ | ۷۴۶۹ | آموزش ریاضی  | فلاح مقدم     | رضا           | بررسی میزان تأثیر استفاده از روش تخته حل مسئله کمیون بر فراشناخت دانش آموزان پایه هفتم تهران از دیدگاه شونفلد و شراو در مبحث جبر و معادله | ۹۶ |

|     |      |             |              |          |   |     |
|-----|------|-------------|--------------|----------|---|-----|
| ۴۱۹ | ۷۴۷۱ | آموزش ریاضی | فلاح مقدم    | رضا      | تأثیر استفاده همزمان دست‌ورزی و هندسه پویا بر سطوح تفکر هندسی؛ مطالعه‌ای نیمه آزمایشی روی دانش‌آموزان پایه هشتم شهرستان پاکدشت  | ۹۷  |
| ۴۲۳ | ۷۴۷۲ | آموزش ریاضی | فلاح مقدم    | رضا      | اثر بخشی نرم افزار دسموس بر کاهش بدفهمی استدلال و اثبات هندسی دانش‌آموزان پایه‌ی نهم  | ۹۸  |
| ۴۲۷ | ۷۴۷۸ | آموزش ریاضی | شفیع اف      | سید مهدی | بررسی کاربرد هوش مصنوعی در طراحی سوالات ریاضی و محتوای آموزشی   | ۹۹  |
| ۴۳۱ | ۷۴۹۵ | آموزش ریاضی | کازمی گلیمان | قاسم     | بررسی کارآمدی نرم افزارهای درسی در تقویت و عمق بخشی بر یادگیری ریاضیات  | ۱۰۰ |
| ۴۳۶ | ۷۵۲۷ | آموزش ریاضی | صالحی        | نگین     | چالش‌های آموزش ریاضی در ایران و راه حل‌ها   | ۱۰۱ |
| ۴۴۰ | ۷۵۹۸ | آموزش ریاضی | سعیدی        | هادی     | تأثیر هوش مصنوعی در آموزش تخصصی   | ۱۰۲ |
| ۴۴۴ | ۷۶۰۰ | آموزش ریاضی | سعیدی        | هادی     | کاربردهای هوش مصنوعی در آموزش، تشخیص و تربیت استعداد فردی   | ۱۰۳ |
| ۴۴۸ | ۷۶۰۶ | آموزش ریاضی | ایزدی        | زینب     | بررسی چالش‌های ضرب برای دانش‌آموزان و راههای رفع آنها   | ۱۰۴ |
| ۴۵۲ | ۷۶۱۵ | آموزش ریاضی | عبدالهیان    | مریم     | طراحی مدل مفهومی و الگوی اجرایی روش مرحله به مرحله تکلیف محور برای درس ریاضیات  | ۱۰۵ |
| ۴۵۶ | ۷۶۲۰ | آموزش ریاضی | ریواز        | ساناز    | بررسی اثربخشی یادگیری فعال در دانشجویان رشته ریاضیات و کاربردها   | ۱۰۶ |
| ۴۶۰ | ۷۶۳۶ | آموزش ریاضی | چقامیرزا     | مریم     | ارائه مدلی بر مبنای رابطه عملکرد ریاضی و راهبردهای خودتنظیمی با نقش میانجی تکانشگری و اهمال کاری تحصیلی در بین دانش‌آموزان مقطع | ۱۰۷ |
| ۴۶۴ | ۷۶۴۸ | آموزش ریاضی | مرادی دالینی | مرضیه    | بررسی روابط بین فردی با مانایی و تنش‌های تحصیلی   | ۱۰۸ |
| ۴۶۸ | ۷۶۵۱ | آموزش ریاضی | ایزدی        | زینب     | چالش‌های آموزش و یادگیری مفاهیم کسرها   | ۱۰۹ |
| ۴۷۲ | ۷۸۳۸ | آموزش ریاضی | وکیلی        | خاتون    | روانشناسی و ریاضی: کشف ارتباط ذهن و عدد   | ۱۱۰ |
| ۴۷۶ | ۷۸۷۵ | آموزش ریاضی | افراز        | هما      | دستیار آموزشی هوشمند WolframAlpha در مسیر یادگیری ریاضیات عمومی   | ۱۱۱ |
| ۴۸۰ | ۷۸۹۵ | آموزش ریاضی | پناهیان فرد  | سعید     | محاسبات قبله بابی بر اساس روش اول ابوریحان بیرونی مبتنی بر مثلثات کروی از کتاب تحدید نهایات الاماکن لتصحیح مسافات المساکن       | ۱۱۲ |
| ۴۸۳ | ۷۹۵۵ | آموزش ریاضی | رفیعی        | وحید     | مطالعه تأثیر به کارگیری بازی و یادگیری مبتنی بر بازی بر انگیزش و پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان                                      | ۱۱۳ |
| ۴۸۷ | ۷۳۳۸ | آنالیز عددی | کفاش         | بهزاد    | روش تحلیلی انتخاب تابع تکرار برای تضمین همگرایی در روش نقطه ثابت  | ۱۱۴ |

|     |  |               |                   |                    |      |     |
|-----|--|---------------|-------------------|--------------------|------|-----|
| ۱۱۵ | کاربرد روش تفاضل متناهی در حل عددی معادلات دیفرانسیل حاکم بر جو  | ایرج          | رضائی             | آنالیز عددی        | ۷۴۹۳ | ۴۹۱ |
| ۱۱۶ | بررسی حل معادله واندرپل با استفاده از روش هم محلی لاگرانژ  | فاطمه         | شایان فرد         | آنالیز عددی        | ۷۵۳۱ | ۴۹۶ |
| ۱۱۷ | بررسی عددی اثر پارامتر غیر خطی $\mu$ بر دینامیک معادله واندرپل با استفاده از روش رانگ-کوتای  | فاطمه         | شایان فرد         | آنالیز عددی        | ۷۵۳۳ | ۵۰۰ |
| ۱۱۸ | روش اویلر متعادل بهینه برای حل عددی معادلات انتگرال ایتو-ولترا   | آتنا          | غیائی             | آنالیز عددی        | ۷۸۷۹ | ۵۰۴ |
| ۱۱۹ | روش متعادل دوگام مارویاما بهینه برای سیستم‌های تصادفی سخت  | آتنا          | غیائی             | آنالیز عددی        | ۷۸۸۱ | ۵۰۸ |
| ۱۲۰ | مطالعه ی روش گرادیان مزدوج جدید مبتنی بر شرط سکانت اصلاح شده با کاربردهای آن در پردازش   | فاطمه زهرا    | بابائی رستاقی     | تحقیق در عملیات    | ۷۱۶۲ | ۵۱۲ |
| ۱۲۱ | رویکردی ریاضی محور به مدل سازی تحلیل پوشش داده فاصله‌ای بیزین جهت محاسبه کارایی  | علی           | علیزاده<br>گودرزی | تحقیق در عملیات    | ۷۵۳۰ | ۵۱۶ |
| ۱۲۲ | مدل $p$ -میانه معکوس و تابع توزیع شانس ایده آل $p$ -میانه معکوس روی شبکه تصادفی غیرقطعی  | فاطمه         | تیمورزاده         | تحقیق در عملیات    | ۷۵۹۱ | ۵۲۷ |
| ۱۲۳ | به کارگیری منطق فازی برای ارزیابی و رتبه بندی تأمین کنندگان مواد اولیه در صنایع خودروسازی (مطالعه‌ی موردی: شرکت ایران خودرو و سایپا) | سیده<br>حکیمه | حسینی             | تحقیق در عملیات    | ۷۷۱۶ | ۵۳۱ |
| ۱۲۴ | مسئله $p$ -میانه (مورد انتظار) دوفازی منظم   | شکوفه         | بازدار            | تحقیق در عملیات    | ۷۸۸۶ | ۵۳۶ |
| ۱۲۵ | مدل ریاضی برای مسأله بازیافت زباله خشک در شرایط عدم قطعیت  | گوهر          | شکوری             | تحقیق در عملیات    | ۷۸۹۰ | ۵۴۰ |
| ۱۲۶ | ارائه یک مدل فازی برای زنجیره تأمین معکوس با در نظر گرفتن معیارهای زیست محیطی  | ماریا         | طوفان             | تحقیق در عملیات    | ۷۹۲۶ | ۵۴۵ |
| ۱۲۷ | سیستم های چند سطحی فازی در هوش مصنوعی وریاضیات   | سیده سمیه     | موسوی<br>اوریمی   | تحقیق در عملیات    | ۷۹۲۹ | ۵۵۰ |
| ۱۲۸ | اعداد خاکستری بازه ای سه پارامتری و رتبه بندی آنها   | مهدی          | عینی              | تحقیق در عملیات    | ۷۹۵۴ | ۵۵۴ |
| ۱۲۹ | فاکتورهای نامطلوب و تحلیل پوششی داده های خاکستری   | مهدی          | عینی              | تحقیق در عملیات    | ۷۹۵۶ | ۵۵۸ |
| ۱۳۰ | رتبه بندی بندی مجتمع پالایشگاهی با تحلیل پوششی داده ها   | مهدی          | عینی              | تحقیق در عملیات    | ۷۹۵۷ | ۵۶۲ |
| ۱۳۱ | پیش بینی ترک تحصیل دانشجویان با استفاده از چارچوب ترکیبی گرافی مبتنی بر تعمیم پشته‌ای  | سپیده         | صبوری             | تحقیق در عملیات    | ۸۱۱۰ | ۵۶۶ |
| ۱۳۲ | طراحی کنترل کننده تطبیقی برای مسئله توافق یک سیستم چندعامله با دینامیک های غیر خطی یکسان   | آرش           | جدائی             | بهینه سازی و کنترل | ۷۱۹۷ | ۵۷۱ |
| ۱۳۳ | بررسی مهار یک سیستم چندعامله با دینامیک های غیر خطی  | آرش           | جدائی             | بهینه سازی و کنترل | ۷۲۲۴ | ۵۷۵ |

|     |      |                    |                       |              |   |     |
|-----|------|--------------------|-----------------------|--------------|---|-----|
| ۵۷۹ | ۷۳۹۳ | بهینه سازی و کنترل | شعبانی                | آذر          | حل مساله کوتاهترین زمان با حل دستگاه معادله دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ و مقایسه جواب آن با     | ۱۳۴ |
| ۵۸۴ | ۷۳۹۶ | بهینه سازی و کنترل | زارع                  | طاهره        | تحلیل فرکانسی و تشخیص ناهنجاری در داده‌های گازی ترانس قدرت با استفاده از تبدیل موجک         | ۱۳۵ |
| ۵۸۸ | ۷۴۰۹ | بهینه سازی و کنترل | شفیع اف               | سید مهدی     | حل مسائل کنترل بهینه کسری با استفاده از عملگر انتگرال کسری توابع ترکیبی چلیشکوف             | ۱۳۶ |
| ۵۹۲ | ۷۴۵۹ | بهینه سازی و کنترل | زارع                  | طاهره        | ریشه‌یابی تقریبی به کمک تبدیل ویولت با کاربرد روی معادله $(-x)x=e^x$                        | ۱۳۷ |
| ۵۹۷ | ۷۵۱۵ | بهینه سازی و کنترل | احمدی                 | قاسم         | شبکه عصبی سینک اصلاح‌شده: مزایا، چالش‌ها و کاربردهای نوین در مدل‌سازی داده‌های غیرخطی       | ۱۳۸ |
| ۶۰۱ | ۷۶۱۷ | بهینه سازی و کنترل | صادقی دیزج            | سمیه         | شناسایی دوگان بهینه g-قاب از طریق کمینه سازی نرم عملگری                                     | ۱۳۹ |
| ۶۰۸ | ۷۶۴۴ | بهینه سازی و کنترل | عطائی                 | اسفندیار     | مسیریابی بهینه وسایل نقلیه برای توزیع اقلام امدادی با در نظر گرفتن عدم قطعیت در شرایط بحران | ۱۴۰ |
| ۶۱۰ | ۷۶۷۴ | بهینه سازی و کنترل | میرحسینی<br>عالیزمینی | سید مهدی     | تجزیه و تحلیل مدل دینامیکی تأخیر زمانی و بروس HIV با استفاده از کنترل مد لغزشی              | ۱۴۱ |
| ۶۱۵ | ۷۶۸۱ | بهینه سازی و کنترل | محمدی نجف<br>آبادی    | محمد         | طراحی درمان رادیوتراپی بر پایه الگوریتم تکاملی چند هدف فازی برای انتخاب هم‌زمان زاویه و شدت | ۱۴۲ |
| ۶۲۰ | ۷۷۹۳ | بهینه سازی و کنترل | عطائی                 | اسفندیار     | بهینه‌سازی مسأله مسیریابی خودروهای لجستیکی در شرایط بحرانی                                  | ۱۴۳ |
| ۶۲۶ | ۷۸۳۴ | بهینه سازی و کنترل | احسان فر              | محمد<br>حسین | کاربرد نظریه کنترل بهینه در مدل‌های کلان خطی  | ۱۴۴ |
| ۶۳۱ | ۷۸۵۱ | بهینه سازی و کنترل | نصرتی                 | مهدی         | بررسی جامع تأثیر الگوریتم‌های بهینه‌سازی بر سرعت همگرایی و تعمیم مدل‌های یادگیری عمیق       | ۱۴۵ |
| ۶۳۵ | ۷۲۰۰ | آمار               | مختاری                | مهسا         | مدل‌سازی معادلات ساختاری در تحقیقات علوم رفتاری: بررسی مزایا و چالش‌های روش‌شناختی          | ۱۴۶ |
| ۶۴۲ | ۷۲۵۳ | آمار               | کلانتری               | مهدی         | تعبیرهای هندسی در روش مجموعه‌ی مقادیر تکین  | ۱۴۷ |
| ۶۴۷ | ۷۲۷۵ | آمار               | میرزایی               | شهریار       | یک مدل احتمال منعطف در سنجش نابرابری درآمد  | ۱۴۸ |
| ۶۵۱ | ۷۴۵۵ | آمار               | ساداتیان              | مونا         | روش‌های خوشه‌بندی در داده کاوی  | ۱۴۹ |
| ۶۵۵ | ۷۸۷۴ | آمار               | کریمی                 | حسین         | معرفی توزیع وارون ریلی تبدیل یافته  | ۱۵۰ |



12th National Mathematics Conference of Payame Noor University



Sari—Iran

6–7 November 2025

جبر



## ایده آل های لی نرم

رسول رسولی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

rasuli@pnu.ac.ir

سی به رقادری\*، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

ghaderi\_s@pnu.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله با توجه به مفهوم مجموعه های نرم، مفاهیم جدید مانند ایده آل های لی نرم و پاد ایده آل های لی نرم از جبرهای لی را بیان می کنیم. ارتباط آن ها را با ایده آل های لی نشان می دهیم، خصوصیات اساسی آن ها را ثابت می کنیم و در نهایت آن ها را تحت همریختی های جبرهای لی بررسی خواهیم کرد.  
**کلمات کلیدی:** جبرهای لی، مجموعه های نرم، ایده آل های لی نرم، پاد ایده آل های لی نرم، همریختی ها.

### ۱ مقدمه

جبرهای لی (Lie algebras) برای اولین بار توسط سوفوس لی (Sophus Lie) در سال ۱۸۴۲ مطرح شد. جبرهای لی کاربردهای زیادی در علوم ریاضی، فیزیک، معادلات دیفرانسیل، نظریه آشفتگی (Perturbation theory)، کیهان شناسی (Cosmology)، کنترل ربات متحرک (Mobile robot control) و بسیاری از زمینه های دیگر دارد. مجموعه های نرم (Soft sets) برای اولین بار توسط مولوتسو (Molodtsov) مطرح شد [۳]. مولف اول این مقاله قبلاً در مورد ساختار مجموعه های نرم در جبر کلاسیک مطالعاتی را انجام داده است [۴، ۵، ۶] و کاری که ما در این مقاله انجام می دهیم در ادامه کارهای قبلی ایشان می باشد.

در این مقاله ایده آل های لی نرم (Soft Lie ideals) و ایده آل های لی نرم پاد (Anti soft lie ideals) از جبرهای لی را بررسی و مطرح می کنیم. اجتماع و اشتراک آن ها را بررسی خواهیم کرد و رابطه نرم (Soft retation) روی جبرهای لی را تعریف می کنیم و نتایج مهمی را ثابت خواهیم کرد. بالاخره آن ها را تحت همریختی (Hemomorphism) بین جبرهای لی مورد مطالعه قرار می دهیم و مقاله را با بیان مفهوم جبرهای خارج قسمتی لی نرم به پایان خواهیم برد.

### ۲ پیش نیازها

در این بخش تعاریف و مفاهیم اولیه که در این مقاله لازم داریم را می آوریم و برای بیان جزئیات بیشتر، علاقه مندان را به منابع [۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶] ارجاع می دهیم.



**تعریف ۱.** فرض کنید  $E$  یک مجموعه دلخواه غیرتهی و  $A \subseteq E$  باشد. فرض کنید  $U$  یک مجموعه مرجع آغازی (initial universe set) باشد که  $p(U)$  همان مجموعه زیرمجموعه‌های  $U$  است. تابع

$$f_A : E \rightarrow p(U) \quad f_A(x) = \begin{cases} f_A(x) \in p(U) & \text{اگر } x \in A, \\ \emptyset & \text{اگر } x \notin A \end{cases}$$

را یک مجموعه نرم روی  $U$  می‌گوییم. پس  $f_A$  هر عضو  $A$  را به یک زیرمجموعه  $p(U)$  می‌برد و اعضای مجموعه نرم  $f_A$  را به صورت زوج‌های مرتب نمایش می‌دهیم و مجموعه تمامی مجموعه‌های نرم روی  $U$  را با  $S(U)$  نشان می‌دهیم. عبارتی

$$f_A(x) = \{(x, f_A(x)) : x \in E, f_A(x) \in p(U)\}$$

حال می‌خواهیم مجموعه تهی، زیرمجموعه بودن و مجموعه مرجع و تساوی اعضای  $S(U)$  را تعریف کنیم.

**تعریف ۲.** فرض کنید  $f_A, f_B \in S(U)$  در این صورت موارد زیر را داریم:

(الف) می‌گوییم  $f_A$  یک مجموعه نرم تهی (empty soft set) است اگر برای هر  $x \in E$  همواره  $f_A(x) = \emptyset$  برقرار باشد.

(ب) می‌گوییم  $f$  یک مجموعه نرم  $A$ -مرجع (A-universal soft set) است اگر برای هر  $x \in E$  همواره  $f_A(x) = U$  را داشته باشیم.

(ج) می‌گوییم  $f_A$  زیرمجموعه نرم  $f_B$  است اگر برای هر  $x \in E$  همواره  $f_A(x) \subseteq f_B(x)$  برقرار باشد.

(د) می‌گوییم  $f_A$  مساوی  $f_B$  است اگر برای هر  $x \in E$  همواره  $f_A(x) = f_B(x)$  برقرار باشد.

**تعریف ۳.** فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه و  $f_A, f_B \in S(U)$ . فرض کنید  $\varphi : A \rightarrow B$  یک تابع باشد  $\varphi(f_A)$  را تصویر نرم (Soft image) از  $f_A$  تحت  $\varphi$  می‌گوییم و به صورت

$$\varphi(f_A)(y) = \begin{cases} \bigcup \{f_A(x) \mid x \in A, \varphi(x) = y\} & \text{اگر } \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{اگر } \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. همچنین  $\varphi^{-1}(f_B)$  را پیش تصویر نرم (soft pre-image) از  $f_B$  تحت  $\varphi$  می‌گوییم و به صورت  $\varphi^{-1}(f_B)(x) = f_B(\varphi(x))$  در آن  $x \in A$  می‌باشد.

**تعریف ۴.** فرض کنید  $L$  یک فضای برداری (vector space) روی میدان  $F$  باشد. می‌گوییم  $L$  یک جبر لی است اگر عمل دوتایی  $L \times L \rightarrow L$  که با  $(x, y) \rightarrow [x, y]$  نمایش می‌دهیم دارای خواص زیر باشد:

(الف)  $[x, y]$  دوخطی (bilinear) باشد که  $x, y \in L$ . (ب) برای هر  $x \in L$  داشته باشیم  $[x, x] = 0$ .

(ج) برای هر  $x, y, z \in L$  داشته باشیم  $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$

توجه شود که در حالت کلی  $[[x, y], z] \neq [x, [y, z]]$  و  $[x, y] \neq [y, x]$  اما  $[x, y] = -[y, x]$ .

**تعریف ۵.** فرض کنید  $L$  یک جبر لی و  $H$  زیرمجموعه  $L$  باشد. می‌گوییم  $H$  یک زیرجبر لی از  $L$  است اگر برای هر  $x, y \in H$  همواره  $[x, y] \in H$  برقرار باشد. همچنین زیرمجموعه  $I$  از  $L$  را یک ایده‌آل لی از  $L$  می‌گوییم اگر برای هر  $x \in I$  و  $y \in L$  شرط  $[x, y] \in I$  یا معادل آن  $[I, L] \subseteq I$  برقرار باشد. واضح است که هر ایده‌آل لی یک زیرجبر لی است.



**تعریف ۶.** فرض کنید  $L_1$  و  $L_2$  هر دو جبر لی روی میدان  $F$  باشند. تبدیل خطی  $T : L_1 \rightarrow L_2$  را یک همریختی لی می‌گوییم اگر برای هر  $x, y \in L_1$  همواره  $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$  برقرار باشد.

## ۳ نتایج اصلی

در این بخش تعاریف و نتایج اصلی را ذکر می‌کنیم.

**تعریف ۷.** فرض کنید  $L$  یک جبر لی باشد. می‌گوییم  $f_L : L \rightarrow p(U)$  یک ایده‌آل لی نرم از  $L$  است اگر:  
الف)  $f_L(x+y) \supseteq f_L(x) \cap f_L(y)$  (ب)  $f_L(rx) \supseteq f_L(x)$  (ج)  $f_L([x, y]) \supseteq f_L(x)$   
برای هر  $x, y \in L$  و  $r \in F$  برقرار باشند. مجموعه تمامی ایده‌آل‌های لی نرم از  $L$  را با  $SLI(U)$  نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۸.** مجموعه نرم  $f_L : L \rightarrow p(U)$  را یک پاد ایده‌آل لی نرم روی جبر لی  $L$  می‌گوییم اگر شرایط زیر برای هر  $x, y \in L$  و  $r \in F$  برقرار باشند که مجموعه تمامی پاد ایده‌آل‌های لی نرم از  $L$  را با  $ASLI(U)$  نمایش می‌دهیم.  
الف)  $f_L(x+y) \subseteq f_L(x) \cup f_L(y)$  (ب)  $f_L(rx) \subseteq f_L(x)$  (ج)  $f_L([x, y]) \supseteq f_L(x)$

قضیه زیر خصوصیات  $SLI(U)$  و  $ASLI(U)$  و ارتباط آن‌ها را با ایده‌آل لی از حلقه لی  $L$  بررسی کنیم.

- قضیه ۱.** فرض کنید  $f_L \in SLI(U)$  و  $g_L \in ASLI(U)$  در این صورت موارد زیر برقرار می‌باشند.  
الف) برای هر  $x \in L$  همواره  $f_L(0) \supseteq f_L(x)$ . (ب) برای هر  $x, y \in L$  داریم  $f_L([x, y]) = f_L([y, x])$ .  
ج) مجموعه  $I = \{x \in L \mid f_L(x) \supseteq \alpha\}$  یک ایده‌آل لی از  $L$  برای هر  $\alpha \in p(U)$  می‌باشد.  
د) برای هر  $x \in L$  داریم  $g_L(0) \subseteq g_L(x)$ . (ه) برای هر  $x, y \in L$  داریم  $g_L([x, y]) = g_L([y, x])$ .  
و) مجموعه  $I = \{x \in L \mid g_L(x) \subseteq \alpha\}$  برای هر  $\alpha \in p(U)$  یک ایده‌آل لی از  $L$  می‌باشد.

**قضیه ۲.** فرض کنید  $f_L, g_L \in SLI(U)$  در این صورت  $f_L \cap g_L \in SLI(U)$  که در آن  $f_L \cap g_L : L \rightarrow p(U)$  با ضابطه‌ی  $(f_L \cap g_L)(x) = f_L(x) \cap g_L(x)$  تعریف می‌شود. همچنین این قضیه برای هر تعداد برقرار است. فرض کنید  $I$  یک مجموعه شاخص غیرتهی (nonempty index set) باشد و  $\{f_{L_i} : i \in I\} \subseteq SLI(U)$  در این صورت  $\bigcap_{i \in I} f_{L_i} \in SLI(U)$ .

**قضیه ۳.** اگر  $f_L, g_L \in ASLI(U)$  و  $f_L \cup g_L : L \rightarrow p(U)$  که در آن  $(f_L \cup g_L)(x) = f_L(x) \cup g_L(x)$  آنگاه  $f_L \cup g_L \in ASLI(U)$ . همچنین اگر  $I$  یک مجموعه شاخص و  $\{f_{L_i} \mid i \in I\} \subseteq ASLI(U)$  آنگاه نتیجه  $\bigcup_{i \in I} f_{L_i} \in ASLI(U)$  خواهیم داشت.

**قضیه ۴.** فرض کنید  $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$  یک همریختی بین جبرهای لی  $L_1$  و  $L_2$  باشد.  
الف) اگر  $\varphi$  پوشا (epimorphism) باشد و  $f_{L_1} \in SL_1I(U)$  آنگاه  $f_{L_2} \in SL_2I(U)$ .  
ب) اگر  $\varphi$  پوشا و  $f_{L_1} \in ASL_1I(U)$  آنگاه  $f_{L_2} \in ASL_2I(U)$ .  
ج) اگر  $f_{L_2} \in SL_2I(U)$  آنگاه  $f_{L_1} \in SL_1I(U)$ . (د) اگر  $f_{L_2} \in ASL_2I(U)$  آنگاه  $f_{L_1} \in ASL_1I(U)$ .

حال تعاریف جدیدی مانند رابطه نرم (soft relation)، ضرب دکارتی (cartesian product) و رابطه نرم قوی (strongest soft relation) روی جبر لی  $L$  را مطرح می‌کنیم.

**تعریف ۹.** فرض کنید  $L$  یک مجموعه باشد در این صورت  $f_{L \times L} : L \times L \rightarrow p(U)$  را یک رابطه نرم روی  $L$  می‌گوییم اگر  $g_L : L \rightarrow p(U)$  یک رابطه نرم روی  $L$  باشد آنگاه  $f_{L \times L}$  یک رابطه نرم روی  $L$  می‌گوییم اگر  $f_{L \times L}(x, y) \subseteq g_L(x) \cap g_L(y)$  برای هر  $x, y \in L$  برقرار باشد. فرض کنید  $f_L, g_L : L \rightarrow p(U)$  روی مجموعه نرم روی

$L$  باشند در این صورت ضرب دکارتی  $f_L$  و  $g_L$  را با نماد  $f_L \times g_L$  نشان می‌دهیم که  $f_L \times g_L : L \times L \rightarrow p(U)$  به صورت  $(f_L \times g_L)(x, y) = f_L(x) \cap g_L(y)$  برای هر  $x, y \in L$  تعریف می‌شود. فرض کنید  $g_L : L \rightarrow p(U)$  یک مجموعه نرم باشد. می‌گوییم  $f_{g_L}$  یک رابطه نرم قوی از  $g_L$  است که  $f_{g_L} : L \times L \rightarrow p(U)$  و به صورت  $f_{g_L}(x, y) = g_L(x) \cap g_L(y)$  برای هر  $x, y \in L$  تعریف می‌شود.

**قضیه ۵.** فرض کنید  $f_L, g_L \in SLI(U)$  در این صورت  $f_L \times g_L$  یک ایده‌آل لی نرم از  $L \times L$  می‌باشد.

**قضیه ۶.** فرض کنید  $g_L : L \rightarrow p(U)$  یک مجموعه نرم باشد. فرض کنید  $f_{g_L}$  یک رابطه نرم قوی روی  $L$  باشد. در این صورت  $g_L \in SLI(U)$  اگر و فقط اگر  $f_{g_L}$  یک ایده‌آل لی نرم از  $L \times L$  باشد.

**قضیه ۷.** فرض کنید  $L$  حلقه لی و  $I$  یک ایده‌آل از  $L$  باشد. فرض کنید  $f_L \in ASLI(U)$  و برای هر  $x \in L, i \in I$  مجموعه نرم  $f_{\frac{L}{I}} : \frac{L}{I} \rightarrow p(U)$  را با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم. در این صورت  $f_{\frac{L}{I}}$  یک پاد ایده‌آل لی نرم از  $\frac{L}{I}$  خواهد شد.

$$f_{\frac{L}{I}}(x + I) = \begin{cases} f_L(x) \cup f_L(i) & \text{اگر } x \neq i \\ \emptyset & \text{اگر } x = i \end{cases}$$

## ۴ نتیجه‌گیری و مساله باز

در این مقاله نتایج مهمی را در مورد ایده‌آل‌های لی نرم و پاد ایده‌آل‌های لی نرم ثابت کردیم. در جبر کلاسیک ایده‌آل‌ها را بررسی کرده‌ایم، می‌توان نتایج بدست آمده در ایده‌آل‌های جبر کلاسیک را در مورد ایده‌آل‌های لی نرم مطرح کرد. برای مثال قضیه‌های مربوط به هم‌ریختی حلقه‌ها را در مورد ایده‌آل‌های لی نرم هم بررسی و ایده‌آل‌های لی نرم ماکسیمال، مینیمال، اولیه و اول را مورد بحث قرار داد و این می‌تواند یک مساله باز برای علاقه‌مندان باشد.

## مراجع

- [1] J. E. Humphreys, "Introduction to Lie algebras and representation theory," Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1978).
- [2] P. K. Maji, R. Biswas and A. R. Roy, "Soft set theory, Computer Mathematics with Applications," 45 (2003), 555-562.
- [3] D. A. Molodtsov, "Soft set theory-first results," Comput. Math. Appl., 47 (1999), 19-31.
- [4] R. Rasuli, "Anti Q-soft Normal Subgroups," The Journal of Fuzzy Mathematics Los Angeles America, Vol 28, No 1 (2020), 237-248.
- [5] R. Rasuli, "Q-soft R-submodules and their properties," Caspian Journal of Mathematical Sciences (CJMS), 11(2)(2022), 430-438.
- [6] R. Rasuli and A. Shomali, "Algebraic Structures of Q-soft and anti Q-soft normal subgroups," 11th National Mathematics Conference of Payame Noor university, 16-17 October, 2024, Yazd, Iran.

## $d$ -تابی و ارتباط آن با مجموعه $V(d)$

میرصادق سیدصادقی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران  
 m\_sayedsadeghi@pnu.ac.ir

سیدحمید مسعودی\*، عضو هیأت علمی داخلی گروه ریاضی، دانشگاه افسری امام علی (ع)، صندوق پستی ۱۳۱۷۸۹۳۴۷۱، تهران، ایران  
 masoudipourlir@iamu.ac.ir

### چکیده:

در این مقاله، به مطالعه ویژگی‌های مدول‌های  $d$ -تاب و ارتباط آن‌ها با مجموعه ایده‌الی  $V(d)$  پرداخته می‌شود. نشان داده می‌شود که برای یک  $A$ -مدول  $M$ ، شرایط  $M = L_d(M)$ ،  $\text{Min}(M) \subseteq V(d)$ ،  $\text{Ass}(M) \subseteq V(d)$  و  $\text{Supp}(M) \subseteq V(d)$  با یکدیگر معادل هستند. همچنین، نتایجی در مورد رفتار مدول  $d$ -تاب در دنباله‌های دقیق کوتاه و ارتباط زیرمدول‌های موجود در  $L_d(M)$  با مجموعه‌ی تکیه‌گاه آن‌ها به دست می‌آید. این نتایج درک بهتری از ساختار  $d$ -کوهمولوژی موضعی و مدول‌های مرتبط با سیستم‌های ایده‌الی ارائه می‌دهند. کلمات کلیدی: ایده‌ال اول مینیمال؛ تکیه‌گاه؛  $d$ -تاب؛ وارپته دی

### ۱ مقدمه

در سراسر این مقاله،  $A$  یک حلقه یک‌دار، جابجایی و نوتری و  $d$  عدد صحیح نامنفی می‌باشد. فرض کنید  $\mathcal{I}(A)$  مجموعه تمام ایده‌ال‌های  $A$  باشند. فرض کنید

$$\Sigma = \{\mathfrak{a} \trianglelefteq A \mid \dim(A/\mathfrak{a}) \leq d\}.$$

به‌وضوح  $\Sigma$  بنا به [۲، ص. ۲۱] یک سیستم ایده‌الی است. بانیکا و همکاران در [۱]،

$$L_d(-) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, -)$$

را با عنوان اولین  $d$ -کوهمولوژی موضعی تعریف کردند و مطالعاتی را روی آن انجام دادند. همچنین ناصر زمانی، محمدحسن بیژن‌زاده و میرصادق سیدصادقی در [۳] و [۴] مطالعات تکمیلی در خصوص  $L_d(M)$  و مشتق‌های آن انجام دادند، قضایایی را بیان کرده و اثبات نمودند.



برای  $A$  - مدول  $M$ ، بنا به [۲، قضیه ۱.۲.۱] داریم:

$$\begin{aligned} L_d(M) &= \bigcup_{\mathfrak{a} \in \Sigma} \text{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, M) \\ &= \bigcup_{\mathfrak{a} \in \Sigma} (0 :_M \mathfrak{a}). \end{aligned}$$

لذا به راحتی می توان دید که

$$L_d(M) = \{x \in M \mid \exists I \in \Sigma; Ix = 0\}.$$

به وضوح  $L_d(-)$  یک فانکتور هم ورد خطی دقیق چپ از کاتگوری  $A$ -مدول ها است و  $L_d(L_d(M)) = L_d(M)$ . در اینجا مدول  $M$  را  $d$ -تاب می گوئیم هرگاه  $L_d(M) = M$ . در ادامه مجموعه ایده‌الی  $V(d)$  را وارسته دی می نامیم و به شکل

$$V(d) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid \exists I \in \Sigma; I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

تعریف می کنیم و برخی خصوصیات و روابط آن را با ایده‌ال های وابسته مدول  $M$  بررسی می کنیم.

## ۲ معیارهای مدول $d$ -تاب

**تعریف ۱.۲.** فرض کنیم  $d$  یک عدد صحیح غیر منفی باشد. برای یک ایده‌ال  $J$  از  $A$ ، مجموعه  $V(d)$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$V(d) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid \exists I \in \Sigma; I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

**قضیه ۲.۲.** فرض کنیم  $M$  یک  $A$ -مدول  $(d)$ -تاب باشد. آنگاه موارد زیر با هم معادل هستند:

$$M = L_d(M) \quad (i)$$

$$\text{Min}(M) \subseteq V(d) \quad (ii)$$

$$\text{Ass}(M) \subseteq V(d) \quad (iii)$$

$$\text{Supp}(M) \subseteq V(d) \quad (iv)$$

اثبات. موارد  $(ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$  واضح است.

$(ii) \Leftrightarrow (iv)$ : ابتدا فرض کنیم  $p \in \text{Supp}(M)$ . وجود دارد  $q \subseteq p$  به طوری که  $q \in \text{Min}(M)$ . از آنجایی که  $q \in V(d)$  باشد، وجود دارد  $I \in \Sigma$  به طوری که

$$I \subseteq q \subseteq p.$$

بنابراین  $p \in V(d)$ . در نتیجه  $\text{Supp}(M) \subseteq V(d)$ .

$(iii) \Leftrightarrow (i)$ : ابتدا فرض کنیم  $p \in \text{Ass}(M)$ . در این صورت وجود دارد  $x \in M$  به طوری که  $p = \text{Ann}(x)$ . از آنجایی که  $M = L_d(M)$ ، وجود دارد  $I \in \Sigma$  به طوری که  $I \subseteq \text{Ann}(x)$ . لذا  $p \in V(d)$ .

$(i) \Leftrightarrow (iv)$ : نشان می دهیم که  $M \subseteq L_d(M)$ . فرض کنیم  $x \in M$  و  $\text{Min}(Ax) = \{p_1, \dots, p_t\}$  باشد. از آنجایی که  $\text{Min}(Ax) \subseteq \text{Supp}(M) \subseteq V(d)$ ، لذا برای هر  $i = 1, 2, \dots, t$ ، وجود دارد  $I_i \in \Sigma$  به طوری که  $I_i \subseteq p_i$ . در این صورت  $I := \prod I_i \subseteq \prod p_i$  از آنجایی که

$$\sqrt{\text{Ann}(x)} = p_1 \cap p_2 \cap \dots \cap p_t,$$



بنابراین  $n \in \mathbb{N}$  وجود دارد به طوری که  $(\prod p_i)^n \subseteq \text{Ann}(x)$  و بنابراین  $I^n \subseteq (\prod p_i)^n \subseteq \text{Ann}(x)$ . از این رو  $I^n x = 0$ ،  
 بنابراین  $x \in L_d(M)$ .  $\square$

**نتیجه ۳.۲.** (الف) برای هر  $x \in M$  گزاره‌های زیر باهم معادل‌اند:

$x \in L_d(M)$  (i)

$\text{Ass}(Ax) \subseteq V(d)$  (ii)

(ب) فرض کنیم

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

دنباله‌ای دقیق از  $A$  - مدول‌ها و  $A$  - همومورفیسم‌ها باشد. در این صورت  $M$  یک مدول  $d$ -تاب است اگر و تنها اگر  $L$  و  $N$  مدول‌های  $d$ -تاب باشند.

اثبات. (الف)

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii): از آنجائی که  $x \in L_d(M)$ ، در این صورت  $L_d(Ax) = Ax$  است. از این رو بنابه قضیه ۲.۲، داریم  $\text{Ass}(Ax) \subseteq V(d)$ .

(ii)  $\Leftrightarrow$  (i): بنابه قضیه ۲.۲، داریم  $x \in Ax = L_d(Ax) \subseteq L_d(M)$ .

(ب)

ابتدا فرض می‌کنیم که  $M$  یک مدول  $d$ -تاب است، یعنی  $M = L_d(M)$ . باید نشان دهیم که  $L$  و  $N$  نیز  $d$ -تاب هستند. بنابه قضیه ۲.۲ نتیجه می‌شود که

$$\text{Supp}(M) \subseteq V(d).$$

همچنین از رشته‌ی دقیق کوتاه در فرض داریم:

$$\text{Supp}(M) = \text{Supp}(L) \cup \text{Supp}(N).$$

بنابراین

$$\text{Supp}(L) \cup \text{Supp}(N) \subseteq V(d)$$

$$\Rightarrow \text{Supp}(L) \subseteq V(d), \quad \text{Supp}(N) \subseteq V(d).$$

اکنون بنابه قضیه ۲.۲ نتیجه می‌شود

$$L_d(L) = L, \quad L_d(N) = N$$

و حکم تمام است.

برای قسمت عکس، به راحتی می‌توان مسیر اثبات قسمت اول را معکوس طی کرد و با استفاده از قضیه ۲.۲ به نتیجه رسید.  $\square$

**نتیجه ۴.۲.** فرض کنید  $\{M_i\}_{i \in I}$  خانواده‌ای از  $A$  - مدول‌ها باشد. آنگاه مدول  $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$  یک مدول  $d$ -تاب است اگر و تنها اگر هر  $M_i$  یک مدول  $d$ -تاب باشد.

اثبات. از آنجائی که

$$\text{Supp}(M) = \bigcup_{i \in I} \text{Supp}(M_i),$$

و با توجه به قضیه ۲.۲،  $M$  یک مدول  $d$ -تاب است اگر و تنها اگر

$$\text{Supp}(M) \subseteq V(d),$$

که این معادل است با

$$\text{Supp}(M_i) \subseteq V(d)$$

برای هر  $i \in I$ . پس هر  $M_i$  نیز  $d$ -تاب است. برعکس، اگر هر  $M_i$ ،  $d$ -تاب باشد، آنگاه

$$\text{Supp}(M) = \bigcup_{i \in I} \text{Supp}(M_i) \subseteq V(d),$$

و بنابراین  $M$ ،  $d$ -تاب است.  $\square$

**نتیجه ۵.۲.** فرض کنیم  $N$  یک  $A$ -زیرمدول از  $M$  باشد. در این صورت  $N \subseteq L_d(M)$  اگر و تنها اگر  $\text{Supp}(N) \subseteq V(d)$  باشد. به ویژه  $\text{Supp}(L_d(M)) \subseteq V(d)$ .

**اثبات.** ابتدا فرض کنیم  $\text{Supp}(N) \subseteq V(d)$  باشد. لذا بنابه قضیه ۲.۲،  $N = L_d(N)$  و در نتیجه  $N \subseteq L_d(M)$ .  
 حال برای قسمت عکس، فرض کنیم  $N \subseteq L_d(M)$ . فرض کنید  $x \in N$ . پس  $x \in L_d(M)$ . لذا بنابه تعریف،  $I \in \Sigma$  وجود دارد به طوری که  $Ix = 0$ . بنابراین  $x \in L_d(N)$ . در نتیجه  $N = L_d(N)$  و لذا حکم بنابه قضیه ۲.۲ برقرار است. قسمت دوم از این واقعیت که  $L_d(L_d(M)) = L_d(M)$  است و نیز قضیه ۲.۲ به دست می آید.  $\square$

### ۳ نتایج

در این مقاله، معیارهای معادل مختلفی برای  $d$ -تاب بودن یک  $A$ -مدول ارائه شد و ارتباط آن با مجموعه ایده‌آل‌های  $V(d)$  و نیز رفتار آن در زیرمدول‌ها و توسیع‌ها بررسی گردید. همچنین، نشان داده شد که فانکتور  $L_d(-)$  تحت دنباله‌های دقیق کوتاه رفتاری خوب دارد و شرایط لازم و کافی برای عضویت یک زیرمدول در  $L_d(M)$  بر اساس تکیه‌گاه آن بیان شد. این نتایج گامی در جهت درک بهتر ساختار مدول‌های  $d$ -تاب و کاربردهای آن در کوهمولوژی موضعی است.

### مراجع

- [1] C. Banica and M. Soia, "Singular sets of a module on local cohomology," *Boll. Un. Mat. Ital. B*, vol. 16, pp. 923–934, 1976.
- [2] M. P. Brodmann and R. Y. Sharp, "Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications," *Cambridge University Press*, 1998.
- [3] N. Zamani, M. H. Bijan-zadeh, and M. S. Sayedsadeghi, "Cohomology with supports of dimension  $\leq d$ ," *Journal of Algebra and Its Applications*, vol. 15, no. 3, pp. 1650042(1)–1650042(10), 2016.
- [4] N. Zamani, M. S. Sayedsadeghi, and M. H. Bijan-Zadeh, " $d$ -Transform Functor and Some Finiteness and Isomorphism Results," *Vie. J. Math.*, vol. 41, pp. 179–186, 2013.

## گروه‌های بی‌تاب جدایی‌پذیر، تجزیه‌پذیر و زیرگروه‌های خالص

فاطمه کریمی؛ عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

fatemehkarimi@pnu.ac.ir

(عضو هیأت علمی)

**چکیده:** در این مقاله گروه‌های جدایی‌پذیر و ۱-جدایی‌پذیر را مورد بررسی قرار داده، ارتباط آنها با یکدیگر را بیان می‌نماییم و سعی بر آن داریم که نتایجی در مورد زیرگروه‌ها و زیرگروه‌های خالص این گروه‌ها ارائه دهیم. همچنین گروه‌های بی‌تاب تقریبی کاملاً تجزیه‌پذیر را در نظر گرفته و شرط لازم برای آنکه هر زیرگروه خالص جدایی‌پذیر باشد را ارائه خواهیم نمود.

**کلمات کلیدی:** گروه بی‌تاب، جدایی‌پذیر، زیرگروه خالص، کاملاً تجزیه‌پذیر، رتبه

### ۱ تعریف‌ها و مفاهیم مقدماتی

گروه‌های بی‌تاب جدایی‌پذیر و ۱-جدایی‌پذیر به عنوان شاخه‌ای مهم در نظریه گروه‌های آبلی بی‌تاب، از دهه‌های میانی قرن بیستم مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته‌اند. تحقیقات اولیه در این حوزه به ویژه توسط کولیکو [۳] و لارنس [۴] آغاز شد و بعد از آن دیگران [۱]، [۶]، [۵] به توسعه نظریه ۱-جدایی‌پذیری و ارتباط آنها با ساختارهای دیگر گروهی پرداختند. این مطالعات پایه‌های محکمی برای درک بهتر پیچیدگی‌های گروه‌های بی‌تاب ایجاد کرده و مسیر تحقیقات بعدی را هموار ساخته‌اند. در این مقاله نیز ما سعی بر آن داریم که نتایجی در مورد زیرگروه‌ها و زیرگروه‌های خالص این گروه‌ها ارائه داده، گروه‌های بی‌تاب تقریبی کاملاً تجزیه‌پذیر را در نظر گرفته و شرط لازم برای آنکه هر زیرگروه خالص آنها جدایی‌پذیر باشد را مورد بحث قرار دهیم. بدین منظور فرض کنید که  $G$  یک گروه آبلی جمعی بی‌تاب باشد، برای هر  $S \subseteq G$ ، زیرگروه خالص تولید شده توسط  $S$  را با نماد  $\langle S \rangle_*$  نشان داده، گروه بی‌تاب  $G$  را جدایی‌پذیر گوئیم هرگاه هر زیرمجموعه‌ی متناهی از اعضای  $G$  در یک جمعوند کاملاً تجزیه‌پذیر از  $G$  قرار داشته باشد و آن را ۱-جدایی‌پذیر نامیم هرگاه هر عضو  $G$  در یک جمعوند کاملاً تجزیه‌پذیر از  $G$  قرار داشته باشد. بعلاوه گروه بی‌تاب  $G$  به طور تقریبی کاملاً تجزیه‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه  $G$  دارای زیرگروه کاملاً تجزیه‌پذیری مانند  $C$  باشد که  $[G : C]$  متناهی باشد. همچنین مجموعه تایپ  $G$  را به صورت

$$T(G) = \{t(g) \mid 0 \neq g \in G\},$$

Author Corresponding\*

تعریف نموده و گروهی که مجموعه تایپ آن فقط دارای یک عضو باشد را گروه همگن می نامیم. برای آشنایی با تعریف‌ها و مفاهیم مقدماتی به طور دقیقتر به [۲] مراجعه نمایید.

گزاره ۱.۱. گروه بی‌تاب همگن  $G$  جدایی‌پذیر است اگر و تنها اگر هر زیرگروه خالص با رتبه‌ی متناهی جمعوندی از  $G$  باشد.

□ برهان. به [۲]، گزاره‌ی ۸۷.۲ مراجعه نمایید.

در حالت کلی هر زیرگروه خالص از یک گروه جدایی‌پذیر، جدایی‌پذیر نیست. ولی در مورد گروه‌های همگن داریم:

نتیجه ۲.۱. زیرگروه‌های خالص از گروه‌های جدایی‌پذیر همگن جدایی‌پذیر هستند.

□ برهان. به [۲]، گزاره‌ی ۸۷.۳ مراجعه نمایید.

این مطلب برای هر زیرگروه دلخواه به صورت زیر توسعه می‌یابد:

قضیه ۳.۱. اگر  $G$  یک گروه بی‌تاب کاملاً تجزیه‌پذیر و همگن از تایپ  $t$  باشد آنگاه هر زیرگروه همگن با تایپ  $t$  از  $G$  کاملاً تجزیه‌پذیر خواهد بود.

□ برهان. به [۲]، قضیه ۸۶.۶ مراجعه نمایید.

## ۲ نتایج اصلی

قضیه ۱.۲. فرض کنید  $G$  یک گروه بی‌تاب با این خاصیت باشد که هر زیرگروه خالص با رتبه متناهی یک جمعوند کاملاً تجزیه‌پذیر از  $G$  باشد. در اینصورت هر زیرگروه خالص و به خصوص هر جمعوند از  $G$  این خاصیت را به ارث می‌برد.

□ برهان. ساده است.

قضیه ۲.۲. برای هر گروه بی‌تاب  $G$  موارد زیر معادلند:

(i) هر زیرگروه خالص از رتبه یک جمعوندی از  $G$  است.

(ii) هر زیرگروه خالص از رتبه متناهی یک جمعوند کاملاً تجزیه‌پذیر از  $G$  است.

برهان. (i)  $\Leftrightarrow$  (ii): فرض کنید (i) برقرار باشد و  $H$  یک زیرگروه خالص با رتبه متناهی  $n$  از  $G$  باشد. اثبات با استقراء روی  $n$  انجام می‌شود. اگر  $n = 1$ ، با استفاده از (i) حکم برقرار است. فرض کنید (ii) برای هر زیرگروه خالص از رتبه کمتر از  $n$  برقرار باشد و آن را برای رتبه‌ی  $n$  ثابت می‌کنیم. فرض کنید  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  یک مجموعه مستقل خطی از اعضای  $H$  باشد و قرار می‌دهیم  $L = \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle_*$ . در اینصورت با استفاده از فرض استقراء،  $L$  یک جمعوند کاملاً تجزیه‌پذیر از  $G$  است و می‌توان نوشت  $G = L \oplus C$ . لذا برای برخی  $x_n = l + c$ ،  $c \in C$  و  $l \in L$ . حال  $P = \langle c \rangle_*$  جمعوندی از  $C$  خواهد بود، یعنی  $C = P \oplus D$ . پس  $G = (L \oplus P) \oplus D$  و لذا  $H = L \oplus P$  اما از آنجاییکه  $L$  کاملاً تجزیه‌پذیر از رتبه متناهی و  $P$  دارای رتبه یک است؛  $H$  یک جمعوند کاملاً تجزیه‌پذیر از  $G$  خواهد بود.

□ (i)  $\Leftrightarrow$  (ii): واضح است.

**تعریف ۳.۲.** گوییم گروه بی‌تاب  $G$  دارای خاصیت جمعوند خالص است هرگاه  $G$  در یکی از شرایط قضیه‌ی بالا صدق کند.

**قضیه ۴.۲.** یک گروه بی‌تاب از رتبه متناهی همگن و کاملاً تجزیه‌پذیر است هرگاه دارای خاصیت جمعوند خالص باشد.

برهان. فرض کنید  $G$  گروهی با خاصیت گفته شده باشد. در اینصورت با استفاده از قضیه ۲.۲،  $G$  کاملاً تجزیه‌پذیر به صورت  $G = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_m$  می‌باشد که هر  $P_i$  از رتبه یک است. برای اثبات همگن بودن  $G$ ، کافی است ثابت کنیم تایپ دو جمعوند دلخواه  $P_i$  و  $P_j$  با هم برابر است.

فرض کنید  $x \in P_i$  و  $y \in P_j$  دو عضو دلخواه باشند و قرار دهید  $P = \langle x + y \rangle \leq P_i \oplus P_j$ . در اینصورت  $\pi_i(x + y) = x \in P_i$  و  $t(P) = t(x + y) \leq t(x) = t(P_i)$ . همچنین  $P$  جمعوندی از  $P_i \oplus P_j$  است و لذا می‌توان نوشت:  $P_i \oplus P_j = P \oplus C$ . بنابراین  $t(P_i) \leq t(P)$  که نتیجه می‌دهد  $t(P_i) = t(P)$ . به طریق مشابه  $t(P_j) = t(P)$  و بنابراین  $t(P_i) = t(P_j)$ . لذا همانگونه که ادعا کرده بودیم  $G$  همگن است.  $\square$

**نتیجه ۵.۲.** یک گروه آبدی بی‌تاب همگن و جدایی‌پذیر است هرگاه دارای خاصیت جمعوند خالص باشد.

**نتیجه ۶.۲.** یک گروه بی‌تاب از رتبه شمارا همگن و کاملاً تجزیه‌پذیر است هرگاه دارای خاصیت جمعوند خالص باشد.

**نتیجه ۷.۲.** فرض کنید  $G$  یک گروه بی‌تاب تجزیه‌پذیر همگن باشد که هر جمعوند همگن در تجزیه  $G$  دارای رتبه‌ی شمارا و دارای خاصیت جمعوند خالص باشد. در اینصورت  $G$  کاملاً تجزیه‌پذیر است.

در دو قضیه‌ی آتی شرط آن را که هر جمعوند یک گروه بی‌تاب همگن کاملاً تجزیه‌پذیر باشد و این شرط را که تحت آن جمعوندی از گروه، ۱-جدایی‌پذیر باشد را مورد بررسی قرار داده و به دلیل طولانی بودن برهان‌ها فقط به بیان صورت این قضیه‌ها اکتفا می‌نماییم.

**قضیه ۸.۲.** فرض کنید  $G$  یک گروه بی‌تاب تجزیه‌پذیر همگن از رتبه‌ی متناهی باشد بطوریکه هر جمعوند همگن در تجزیه‌ی  $G$  دارای خاصیت جمعوند خالص باشد. در اینصورت هر جمعوند از  $G$  کاملاً تجزیه‌پذیر است.

**قضیه ۹.۲.** فرض کنید  $G$  یک گروه بی‌تاب ۱-جدایی‌پذیر باشد که هر جمعوند همگن از رتبه متناهی آن دارای خاصیت جمعوند خالص باشد. اگر  $G = H \oplus K$ ، که  $H$  کاملاً تجزیه‌پذیر از رتبه متناهی است، آنگاه  $K$ ، ۱-جدایی‌پذیر خواهد بود.

**قضیه ۱۰.۲.** فرض کنید  $G$  یک گروه بی‌تاب ۱-جدایی‌پذیر باشد که هر جمعوند همگن با رتبه متناهی دارای خاصیت جمعوند خالص باشد. در اینصورت  $G$  جدایی‌پذیر است.

برهان. فرض کنید هر زیرمجموعه از  $G$  که دارای حداکثر  $n$  عضو است در یک جمعوند کاملاً تجزیه‌پذیر قرار داشته باشد و  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  اعضای از  $G$  باشند. با استفاده از فرض  $x_1, x_2, \dots, x_n$  در یک جمعوند کاملاً تجزیه‌پذیر با رتبه متناهی از  $G$  قرار دارند،  $G = A \oplus B$ . با استفاده از ۹.۲،  $B$  ۱-جدایی‌پذیر است و بنابراین مولفه‌ی  $x_{n+1}$  در  $B$  در یک جمعوند کاملاً تجزیه‌پذیر  $C$  از  $B$  قرار دارد. لذا  $A \oplus C$  یک جمعوند کاملاً تجزیه‌پذیر از  $G$  است که شامل همه‌ی  $x_i$  هاست.  $\square$

**قضیه ۱۱.۲.** فرض کنید  $G$  یک گروه بی‌تاب همگن به طور تقریبی کاملاً تجزیه‌پذیر باشد. در اینصورت  $G$  و هر زیرگروه خالص از  $G$  جدایی‌پذیر هستند.

برهان. با استفاده از نتیجه ۲.۱ اگر  $G$  جدایی پذیر باشد آنگاه هر زیرگروه خالص از  $G$  جدایی پذیر خواهد بود. پس کافی است ثابت کنیم  $G$  جدایی پذیر است. بدین منظور فرض کنید  $C$  زیرگروه کاملاً تجزیه پذیر از شاخص متناهی  $m$  از  $G$  و  $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq G$  یک زیرمجموعه متناهی از اعضای  $G$  باشد. قرار دهید  $H = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle_*$  و با استفاده از متناهی بودن شاخص  $C$  در  $G$ ،  $mH = H' \subseteq C$ ، حال از آنجاییکه  $G$  بی تاب است همریختی  $\varphi: H \rightarrow H'$  با ضابطه  $\varphi(h) = mh$  یک یکرختی است و  $H \cong H'$  خواهد بود. بنابراین  $H'$  زیرگروهی خالص از  $G$  است و از آنجاییکه دارای رتبه متناهی است در یک جمعود،  $C'$ ، با رتبه متناهی از  $C$  قرار دارد. حال با استفاده از تمرین ۸ [۲] و قضیه ۳.۱ جمعودی کاملاً تجزیه پذیر از  $C$  خواهد بود. فرض کنید  $C = H' \oplus D$  و نگاشت تصویر  $\pi: C \rightarrow H'$  با هسته  $D$  را در نظر بگیرید. حال تعریف کنید  $\tilde{\pi}: G \rightarrow H' \otimes Q$  که  $\tilde{\pi}(g) = \frac{\pi(mg)}{m}$  و لذا  $\tilde{\pi}|_H = id_H$ ، زیرا  $\tilde{\pi}(h) = \frac{\pi(mh)}{m}$ . در نتیجه خواهیم داشت  $G = H \oplus \ker(\tilde{\pi})$  که همان حکم مطلوب ما است.  $\square$

## مراجع

- [1] E. Bunina, "Types in torsion free abelian groups," Communication in Algebra, vol. 53 (8), pp. 3524-3525, 2025.
- [2] L. Fuchs, *Abelian groups*, Springer Int. Publ, Cham, **1, 2** (2015).
- [3] V.S. Kulikov, "Direct sum of countable abelian groups," Mathematics of the USSR-Sbornik, vol. 3 (4), pp. 627-648, 1967.
- [4] J.D. Lawrence, "On 1-separable abelian groups and their applications," Journal of Algebra, vol. 71 (1), pp. 123-139, 1981.
- [5] O. Lubimcev, A.M. Sebedin, and C. Vinsonhaler, "Separable torsion free abelian  $E^*$ -groups," Journal of pure and applied Algebra, vol. 133 (1), pp. 203-208, 1998.
- [6] A.M. Sebedin, "Definability of separable torsion free abelian groups by endomorphism semigroups," Algebra and Logic, vol. 34, pp. 290-294, 1995.

## ابرده‌ها و زیررده‌های ارثی برخی از گروه‌های مستقیماً متناهی

فاطمه کریمی\*، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

fatemehkarimi@pnu.ac.ir

(عضو هیأت علمی)

**چکیده:** در پی مطالعات اخیر پیرامون ویژگی‌های ارثی و ابرویژگی‌های دسته‌های خاصی از گروه‌های آبلی، در این مقاله به بررسی این خصوصیات در رده‌ی گسترده‌ای از گروه‌های آبلی، یعنی گروه‌های مستقیماً متناهی، می‌پردازیم. به طور دقیق‌تر، هدف ما مطالعه‌ی زیررده‌های مرتبط  $\mathcal{X}^s$  و  $\mathcal{X}_h$  برای رده‌های  $B \subseteq \mathcal{X} \subseteq DF$  است. کلمات کلیدی: گروه‌های مستقیماً متناهی، گروه‌های باسی، گروه‌های باسی توسعه یافته، ابر رده، رده ارثی.

### ۱ تعریف‌ها و مفاهیم مقدماتی

گروه‌های مستقیماً متناهی را به صورت گروه‌های آبلی‌ای تعریف می‌کنیم که جمعوند مستقیم یکریخت با خود ندارند و رده‌ی تمام این گروه‌ها را با نماد  $DF$  نمایش می‌دهیم. این گروه‌ها ارتباط نزدیکی با گروه‌های باسی و هوفمین دارند [۱]. در حقیقت، بررسی ویژگی‌های ارثی و ابررده‌ای این گروه‌ها نشان می‌دهد که گروه‌های مستقیماً متناهی - به ویژه گروه‌های باسی توسعه یافته - از جهاتی با خواص گروه‌های هوفمین سازگارند [۲]. بر این اساس، پژوهش‌های اخیر بر تبیین دقیق روابط و تعمیم رده‌های مختلف این گروه‌ها متمرکز بوده است. نتایج به دست آمده در زمینه‌ی ارتباط میان این سه نوع گروه، می‌تواند به تعمیم و طبقه‌بندی ساختارها در نظریه‌ی گروه‌ها کمک نماید. افزون بر این، نتایج کلیدی در این حوزه، [۳] و [۴]، به معرفی رده‌های جدیدی از گروه‌ها با ویژگی‌های ترکیبی پرداخته و تأثیر این طبقه‌بندی‌ها را در تحلیل ساختار گروه‌های آبلی و ناآبلی مورد بررسی قرار می‌دهند.

**تعریف ۱.۱.** فرض کنید  $\mathcal{X}$  رده‌ای از گروه‌ها باشد، توجه داشته باشید که اگر  $G$  عضوی از این رده باشد، آنگاه هر گروهی که با  $G$  یکریخت است نیز به  $\mathcal{X}$  تعلق دارد. اکنون زیررده‌های  $\mathcal{X}^s$  و  $\mathcal{X}_h$  از  $\mathcal{X}$  را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\mathcal{X}^s = \{G \in \mathcal{X} \mid \text{هر نقش همریخت } G \text{ عضوی از } \mathcal{X} \text{ باشد.}\},$$

$$\mathcal{X}_h = \{G \in \mathcal{X} \mid \text{هر زیرگروه } G \text{ از } \mathcal{X} \text{ باشد.}\}.$$

$\mathcal{X}^s$  را رده‌ی گروه‌های ابر  $\mathcal{X}$  و  $\mathcal{X}_h$  را رده‌ی گروه‌های ارثی  $\mathcal{X}$  می‌نامیم.

Author Corresponding\*

برای هر رده‌ای از گروه‌ها، خواص زیر برقرار است که به سادگی قابل بررسی اند:

**گزاره ۲.۱.** دوردی  $\mathcal{X}$  و  $\mathcal{Y}$  از گروه‌ها با زیررده‌های  $\mathcal{X}^s, \mathcal{X}_h, \mathcal{Y}^s, \mathcal{Y}_h$  را در نظر بگیرید. در این صورت، عبارات زیر برقرارند:

(i) اگر  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$  آنگاه  $\mathcal{X}^s \subseteq \mathcal{Y}^s$  و  $\mathcal{X}_h \subseteq \mathcal{Y}_h$ .

(ii) اگر  $G \in \mathcal{X}^s$ ، آنگاه هر تصویر همریخت از  $G$  نیز عضوی از  $\mathcal{X}^s$  است؛ و اگر  $G \in \mathcal{X}_h$ ، آنگاه هر زیرگروه از  $G$  نیز در  $\mathcal{X}_h$  قرار دارد.

(iii)  $(\mathcal{X}^s)^s = \mathcal{X}^s$  و  $(\mathcal{X}_h)_h = \mathcal{X}_h$ .

**تعریف ۳.۱.** گروه  $G$  را باسی می‌نامیم هرگاه  $G$  در هیچ تصویر همریخت سره‌ی خود قابل نشانیدن نباشد و آن را باسی توسعه‌یافته گوئیم هرگاه بتوان آن را به صورت  $G = B \oplus D$  نوشت که در آن  $B$  یک گروه باسی و  $D$  یک گروه تاب‌ی بخش‌پذیر به فرم  $D = \left(\bigoplus_p Z(p^\infty)\right)^{(n_p)}$ ، با  $n_p$ های متناهی، باشد. با توجه به [۱] و [۲]، رده‌ی همه‌ی گروه‌های باسی را با  $B$  و رده‌ی همه‌ی گروه‌های باسی توسعه‌یافته را با  $\mathcal{EB}$  نمایش داده و برای این دو رده داریم:  $B \subseteq \mathcal{EB} \subseteq \mathcal{DF}$ .

**تعریف ۴.۱.** گروه  $G$  را هوفین نامیم هرگاه  $G$  دارای هیچ خارج قسمت یکرخت سره‌ای نباشد و رده‌ی همه‌ی گروه‌های هوفین را با نماد  $\mathcal{H}$  نمایش می‌دهیم.

**گزاره ۵.۱.** فرض کنید  $G$  یک گروه بی‌تاب از رتبه‌ی متناهی  $n$  و  $\varphi: G \rightarrow X$  یک همریختی پوشا باشد. در این صورت گروه  $X$  با زیرگروهی از  $Q^{(n)} \oplus D$  یکرخت است، که در آن  $D$  یک گروه بخش‌پذیر تاب‌ی به فرم  $D = \bigoplus_{p \in P} D_p$  بوده و به ازای هر  $p$ ،  $D_p$  به صورت جمع مستقیم  $k_p$  کپی از  $Z(p^\infty)$  با  $k_p \leq n$  می‌باشد. به طور معادل می‌توان گفت  $X \leq (Q \oplus \frac{Q}{Z})^n$ .

برهان. به گزاره ۳.۲ [۱] مراجعه نمایید. □

**قضیه ۶.۱.** گروه بی‌تاب  $G$  برای هر عدد اول  $p$ ، دارای تصویر همریختی به فرم  $\bigoplus_{\mathbb{N}_0} Z(p^\infty)$  است اگر و فقط اگر  $G$  دارای رتبه‌ی نامتناهی باشد.

برهان. به قضیه ۷.۲ [۵] مراجعه نمایید. □

## ۲ نتایج اصلی

**گزاره ۱.۲.** اگر  $G \in \mathcal{DF}_h$  آنگاه  $G \in \mathcal{EB} = \mathcal{EB}_h$ .

برهان. اگر  $G$  عضوی دلخواه از  $\mathcal{DF}_h$  باشد آنگاه  $r_0(G)$  متناهی است، زیرا در غیر این صورت  $G$  دارای زیرگروهی آزاد از رتبه‌ی غیر متناهی خواهد بود که در  $\mathcal{DF}$  قرار ندارد. اکنون می‌نویسیم  $G = D \oplus G'$  که در آن  $D$  ماکسیمال زیرگروه بخش‌پذیر تاب‌ی از  $G$  است. بنابراین داریم  $D = \bigoplus_p \left(Z(p^\infty)\right)^{(k_p)}$  و با توجه به جمع‌وند مستقیم بودن  $D$ ، هر یک از  $k_p$ ها متناهی می‌باشد. حال اگر  $T_p, p$ -مولفه‌ی زیرگروه تاب‌ی  $G'$  باشد، آنگاه  $T_p[p]$  عضوی از  $\mathcal{DF}$  است و بنابراین ساکل باید دارای بعد متناهی باشد. از آنجا که  $G'$  هیچ زیرگروه تاب‌ی بخش‌پذیری ندارد، نتیجه می‌شود که هر  $T_p$  متناهی است. اکنون می‌نویسیم  $G' = Q^{(k_0)} \oplus G''$ ، که در آن  $G''$  دارای هیچ زیرگروه بی‌تاب بخش‌پذیری نیست. توجه کنید که  $G''$  تحویلیافته است و چون  $r_0(G) = r_0(G') = k_0$ ، هر دوی  $k_0$  و  $r_0(G'')$  متناهی هستند. بنابراین  $G''$  یک گروه

تحویلیافته با زیرگروه‌های  $p$ -مقدماتی متناهی و از رتبه‌ی بی‌تاب متناهی است، که طبق دسته‌بندی گروه‌های باسی در قضیه‌ی اصلی [۱]، نتیجه می‌شود که  $G''$  باسی می‌باشد. در نهایت از آنجا که  $k_0$  متناهی است، همان رده‌بندی نشان می‌دهد که  $G'$  نیز باسی بوده و بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

**قضیه ۲.۲.** (i) اگر  $\mathcal{E}B \subseteq \mathcal{X} \subseteq DF$  آنگاه  $\mathcal{X}_h = \mathcal{E}B$

(ii) اگر  $B \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}$  آنگاه  $\mathcal{X}_h = B$

برهان. (i) با استفاده از فرض و گزاره‌ی ۲.۱ داریم:

$$\mathcal{E}B_h \subseteq \mathcal{X}_h \subseteq DF_h,$$

و با توجه به گزاره‌ی ۱.۲ برای قسمت انتهایی خواهیم داشت:

$$DF_h \subseteq \mathcal{E}B_h,$$

که نتیجه می‌دهد  $\mathcal{X}_h = \mathcal{E}B_h = \mathcal{E}B$ .

(ii) اگر  $G \in \mathcal{X}_h$  با توجه به این که  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{H} \subseteq DF$  داریم:  $G \in DF_h = \mathcal{E}B$ . حال اگر  $G = B \oplus D$  که  $B$  باسی و  $D$  بخشپذیر بی‌تاب است، آنگاه  $G \in \mathcal{H}$  ایجاب می‌کند که  $D = \{0\}$  و از اینرو  $G \in B = B_h$ . بنابراین

$$B_h \subseteq \mathcal{X}_h \subseteq B_h = B,$$

و لذا  $\mathcal{X}_h = B$ . □

**قضیه ۳.۲.** گروه بخش‌پذیر  $D$  یک گروه ابر مستقیماً متناهی است اگر و فقط  $r_0(D)$  و همه‌ی  $r_p(D)$ ها متناهی باشند. برهان. اگر هر یک از این رتبه‌ها نامتناهی باشد، آنگاه  $D$  دارای یک جمعوند مستقیم سره‌ی یکریخت خواهد بود. بنابراین اثبات لزوم روشن است.

برعکس، فرض کنید که تمام این رتبه‌ها متناهی باشند. گروه  $D$  را به صورت می‌نویسیم،  $D = F \oplus T$  که  $T$  زیرگروه تابی و  $F$  بخش بی‌تاب  $D$  می‌باشند. در این صورت با استفاده از گزاره‌ی ۱۷.۲ (b) از [۲]،  $D$  مستقیماً متناهی است و اگر  $\varphi: D \rightarrow X$  یک همریختی پوشا باشد، آنگاه  $X = D_1 \oplus Y$ ، که  $D_1 = \varphi(F)$  و  $Y = \varphi(T)$ . با استفاده از گزاره‌ی ۵.۱،  $r_0(D_1)$  و همه‌ی  $r_p(D)$ ها متناهی می‌باشند و با به کارگیری گزاره‌ی ۱۵.۲ از [۲] برای  $Y$ ، همه‌ی  $r_p(Y)$ ها متناهی خواهند بود. بنابراین  $r_0(X)$  و  $r_p(X)$ ها نیز متناهی هستند. لذا با استفاده از گزاره‌ی ۱۷.۲ از [۲]،  $X$  مستقیماً متناهی است و از آنجا که  $X$  دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم که  $D$  یک گروه ابر مستقیماً متناهی می‌باشد. □

**گزاره ۴.۲.** فرض کنید  $G = D \oplus R$  یک گروه باشد که در آن  $D$  بخش‌پذیر و  $R$  تحویلیافته است. در این صورت  $G$  گروهی ابر مستقیماً متناهی است اگر و فقط اگر  $D$  و  $R$  هر دو مستقیماً متناهی باشند.

برهان. از آنجایی که  $R$  و  $D$  هر دو تصویرهای همریخت  $G$  هستند، اگر  $G$  ابر مستقیماً متناهی باشد،  $R$  و  $D$  نیز هر دو ابر مستقیماً متناهی خواهند بود. برعکس، فرض کنید  $R$  و  $D$  هر دو ابر مستقیماً متناهی بوده و  $\varphi: G \rightarrow X$  یک همریختی پوشا باشد. در این صورت  $\varphi(D)$  بخش‌پذیر است و لذا برای برخی زیرگروه  $Y$  از  $X$  می‌توان نوشت:

$$X = \varphi(D) \oplus Y$$

$$\psi: G \rightarrow X \rightarrow \frac{X}{\varphi(D)},$$

را در نظر بگیرید. واضح است که  $\frac{G}{\ker(\psi)} \cong \frac{X}{\varphi(D)}$  تصویر همریختی از گروه خارج قسمتی  $G/\ker(\psi)$  است. از آنجایی که  $D \subseteq \ker(\psi)$ ، لذا  $G/\ker(\psi)$  یک تصویر همریخت از گروه خارج قسمتی  $G/D$  است و بنابراین  $Y$  تصویر همریختی از  $R$  خواهد بود. این مطلب نتیجه می‌دهد  $Y$  مستقیماً متناهی می‌باشد. می‌توان نوشت  $X = \varphi(D) \oplus Y$ . با استفاده از فرض  $D$  ابر مستقیماً متناهی است و بنابراین طبق قضیه‌ی ۳.۲ رتبه‌های  $D$  همگی متناهی هستند. لذا با توجه به برهان ۳.۲، گزاره‌ی ۱۵.۲ از [۲] و گزاره‌ی ۵.۱ نتیجه می‌شود که همه‌ی رتبه‌های  $\varphi(D)$  متناهی می‌باشند. بنابراین  $X = \varphi(D) \oplus Y$  مستقیماً متناهی است و چون  $X$  دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم که  $G$  گروهی ابر مستقیماً متناهی است.  $\square$

نتیجه ۵.۲. اگر  $G \in DF^s$  باشد آنگاه  $G$  گروهی باسی خواهد بود.

برهان. با توجه به گزاره‌های ۳.۲ و ۴.۲، همه‌ی رتبه‌های  $G$  متناهی هستند. بنابراین حکم از قضیه‌ی اصلی [۱] به دست می‌آید.  $\square$

گزاره ۶.۲. فرض کنید  $G$  یک گروه بی‌تاب تحویل یافته در  $DF^s$  باشد. در این صورت  $r_0(G)$  متناهی است.

برهان. فرض کنیم چنین نباشد. در این صورت گروه خارج قسمتی  $G/tG \in DF$ ، بی‌تاب و از رتبه نامتناهی است. با استفاده از گزاره‌ی ۶.۱،  $G/tG$  و بنابراین خود  $G$  دارای نقش همریختی به فرم  $\bigoplus_{\mathbb{N}_0} Z(p^\infty)$  خواهد بود، که گروهی مستقیماً متناهی نیست. این تناقض اثبات را کامل می‌کند.  $\square$

## مراجع

- [1] A. R. Chekhlov, P. V. Danchev and B. Goldsmith, "On the Bassian property for abelian groups", Arch. Math. (Basel), vol. 117 pp593-600, 2021.
- [2] A. R. Chekhlov, P. V. Danchev, B. Goldsmith and P. W. Keef, "Two generalization of Hopfian abelian groups", Math. GR, DOI:10.48550/arXiv.2408.01277, August 2024.
- [3] Y. Choi, "Directly finite algebras of pseudofunction on locally compact groups" Glasgow Math. Journal, vol. 57 (3), pp. 693-707, 2015.
- [4] P. V. Danchev, P. W. Keef "Bassian-finite abelian groups," Math. GR, DOI:10.48550/arXiv.2507.11388, 2025.
- [5] L. Fuchs, "Abelian groups", Springer Monogr. Math., Springer (Cham, 2015).



## برخی از مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته آرتینی با حلقه پایه شبه موضعی

محمد شفیعی دیزج\*، عضو هیأت علمی گروه علوم پایه، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

dizaj.m@gmail.com

**چکیده:** فرض کنید  $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} R_n$  یک حلقه همگن نوتری با ایده‌آل نامرتب  $R_+ = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n$  و حلقه پایه شبه موضعی  $R_0$  و  $m_0^{(1)}, \dots, m_0^{(t)}$  ایده‌آل‌های ماکسیمال  $R_0$  باشند. همچنین  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$  و  $N = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} N_n$  را دو  $R$ -مدول باتولیدمتهای  $Z$ -مدرج و  $J_0$  را رادیکال جیکوبسن  $R_0$  در نظر می‌گیریم. در این مقاله نشان خواهیم داد: برای هر  $i \geq 0$ ،  $R$ -مدول  $H_{R_+}^i(M, \Gamma_{J_0 R}(N))$  آرتینی است. **کلمات کلیدی:** کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته، ایده‌آل نامرتب، آرتینی.

### ۱ مقدمه

در این مقاله، فرض می‌کنیم  $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} R_n$  یک حلقه همگن نوتری با حلقه پایه شبه موضعی  $R_0$  باشد که  $R_0$  یک حلقه نوتری است؛ یعنی تعداد متناهی عضو  $u_1, \dots, u_r \in R_1$  وجود دارد به طوری که  $R = R_0[u_1, \dots, u_r] = R_0[R_1]$ . فرض کنید  $M, N$  دو  $R$ -مدول  $Z$ -مدرج باتولیدمتهای باشند. مشخص است که برای هر  $i \in \mathbb{N}_0$  و هر ایده‌آل مدرج  $a$  از  $R$ ،  $i$ -امین مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته  $H_a^i(M, N) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Ext}_R^i \left( \frac{M}{a^n M}, N \right)$  یک ساختار مدولی  $Z$ -مدرج به صورت  $H_a^i(M, N) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_a^i(M, N)_n$  دارد و هرگاه  $a = R_+$  باشد،  $R_0$ -مدول  $H_{R_+}^i(M, N)_n$  به ازای هر  $n \in \mathbb{Z}$  باتولیدمتهای است و برای هر  $n \gg 0$  صفر است. در این مقاله آرتینی بودن برای هر  $i \geq 0$ ،  $R$ -مدول  $H_{R_+}^i(M, \Gamma_{J_0 R}(N))$  بررسی می‌کنیم. موارد مشابه برای حالتی که حلقه پایه  $R_0$  موضعی است قبلاً اثبات شده است.

## ۲ قضایای مقدماتی

لم ۱: فرض کنیم  $M$  یک  $R$ -مدول  $a$ -تاب باشد. در این صورت یک تحلیل انژکتیو از  $M$  وجود دارد که هر جمله آن  $R$ -مدول،  $a$ -تاب است.

اثبات. رجوع شود به برهان نتیجه 2.1.6 از مرجع (Brodmann and Sharp, 1998). □

لم ۲: فرض کنیم  $M, N$  دو  $R$ -مدول ( $M$  با مولد متناهی) و  $E^N$  یک تحلیل انژکتیو برای  $N$  باشد. در این صورت برای هر  $i \geq 0$  داریم  $H_a^i(M, N) = H^i(\text{Hom}_R(M, \Gamma_a(E^N)))$

اثبات. هر دو دنباله  $(H_a^i(M, -))_{i \in \mathbb{N}_0}$  و  $(H^i(\text{Hom}_R(M, \Gamma_a(E^N)))_{i \in \mathbb{N}_0}$  دنباله مرتبط از فانکتورها هستند به طوری که به ازای هر مدول انژکتیو مانند  $I$  و هر  $i \geq 1$  صفر می شوند. بعلاوه

$$\begin{aligned} H_a^0(M, N) &= \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Ext}_R^0\left(\frac{M}{a^n M}, N\right) \cong \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_R(R/a^n, N)) \\ &\cong \text{Hom}_R(M, \Gamma_a(N)) \cong H^0(\text{Hom}_R(M, \Gamma_a(E^N))) \end{aligned}$$

اینک حکم بنابر قضیه اساسی جبر همولوژی نتیجه می شود. □

لم ۳: فرض کنیم  $a$  ایده آلی از  $R$  و یک  $N$  یک  $R$ -مدول  $a$ -تابدار باشد در این صورت برای هر  $i \geq 0$  داریم:  $H_a^i(M, N) = \text{Ext}_R^i(M, N)$

اثبات. چون  $N$  یک  $R$ -مدول  $a$ -تابدار است بنابر لم ۱ تحلیل انژکتیو  $E^N$  از  $N$  وجود دارد که هر جمله آن  $a$ -تابدار است. با اعمال فانکتور  $\Gamma_a(-)$  بر همبافت  $E^N$  همبافت  $\Gamma_a(E^N)$  باز هم یک تحلیل انژکتیو  $N$  است. لذا برای هر  $i \geq 0$  داریم

$$H_a^i(M, N) = H^i(\text{Hom}_R(M, \Gamma_a(E^N))) = \text{Ext}_R^i(M, N)$$

و حکم ثابت می شود. □

### ۳ نتایج

قضیه: فرض کنیم  $R$  یک حلقه نوتری و همگن با حلقه پایه شبه موضعی  $R_0$  و  $J_0$  رادیکال جیکوبسن  $R_0$  باشد. فرض کنیم  $M, N$  دو  $R$ -مدول متناهی مولد و  $p = \text{pd}(M) < \infty$  در این صورت: برای هر  $i \geq 0$   $R$ -مدول  $H_{R_+}^i(M, \Gamma_{J_0 R}(N))$  آرتینی است.

اثبات. طبق لم ۱ یک تحلیل انژکتیو  $\mathbf{I}$  از  $\Gamma_{J_0 R}(N)$  وجود دارد که هر جمله آن  $R$ -مدول  $J_0 R$ -تاب است. فرض کنیم  $I^i$   $i$ -امین جمله باشد. پس خانواده  $(p_\lambda)$  از ایده‌آل‌های اول  $R$  وجود دارد که  $J_0 R \subseteq p_\lambda$  برای هر  $\lambda$  و

$$I^i = \bigoplus_{\lambda} E(R/p_\lambda)^{\mu_i},$$

که  $E_R(-)$  پوشش انژکتیو و  $\mu_i = \mu_i(p_\lambda, \Gamma_{J_0 R}(N))$   $i$ -امین عدد باس  $\Gamma_{J_0 R}(N)$  نسبت به  $p_\lambda$  است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که برای هر  $\lambda$  و  $0 \leq j \leq t$  وجود دارد به طوری که  $m_0^{(j)} \subseteq p_\lambda$  و لذا  $\Gamma_{R_+}(E(R/p))$  برابر با  $E(R/m_0^{(j)} + R_+)$  خواهد بود اگر  $R_+ \subseteq p_\lambda$  و برابر صفر خواهد بود اگر  $R_+ \not\subseteq p_\lambda$ . چون  $R$  یک  $R$ -مدول آرتینی است و مدول  $(\text{Hom}_R(M, I^i))$   $\mu_i$ -کپی از  $\text{Hom}_R(M, E(R/m_0^{(j)} + R_+))$  است لذا آرتینی است. طبق لم ۳ و ۲

$$H_{R_+}^i(M, \Gamma_{J_0 R}(N)) = H^i(\text{Hom}_R(M, \Gamma_{R_+}(E^N))) = \text{Ext}_R^i(M, \Gamma_{R_+}(N))$$

خارج قسمتی از یک مدول آرتینی است لذا خود آرتینی است.

□



## مراجع

- [1] M. P. Brodmann, and R. Y. Sharp, *Local cohomology, volume 136 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, second edition, An algebraic introduction with geometric applications, 2103.
- [2] W. Bruns, and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings, volume 39 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [3] R. Y. Sharp, *Steps in commutative algebra*, London Mathematical Society Student Texts 19 (Cambridge University Press), 1990.
- [4] L. Melkersson, *On asymptotic stability for sets of prime ideals connected with the powers of an ideal*, Math. proc. Cambridge Philos. Soc, **107** (1990), 267–271.
- [5] N. Zamani, *On graded generalized local cohomology*, Arch. Math. (Basel), **86(4)** (2006), 321–330.

## جبر در توسعه‌ی هوش مصنوعی

روجا جعفری شکوه، دبیر ریاضی استان خوزستان، شهرستان شوش،  
 دانشجوی کارشناسی ارشد جبر، دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول.  
[rojajafary.6589@gmail.com](mailto:rojajafary.6589@gmail.com)

### چکیده

هوش مصنوعی امروزه به یکی از مهم‌ترین دستاوردهای بشر در عرصه‌ی فناوری و علم تبدیل شده است. در پس این فناوری پیچیده، ساختارهایی نهفته‌اند که ریشه در مبانی عمیق ریاضی دارند. یکی از این بنیان‌ها، جبر است که به‌عنوان زبان مشترک میان داده‌ها، الگوریتم‌ها و مدل‌های یادگیری عمل می‌کند. بدون درک دقیق از مفاهیم جبری، طراحی و تحلیل سیستم‌های هوشمند امکان‌پذیر نیست. جبر، از طریق مفاهیمی همچون ساختار، تقارن، ترکیب و تبدیل، چارچوبی فراهم می‌کند تا داده‌ها به شکلی منظم و قابل فهم برای ماشین‌ها بازنمایی شوند.

در این مقاله، به بررسی نقش جبر در توسعه‌ی هوش مصنوعی پرداخته می‌شود. ابتدا ارتباط میان ساختارهای جبری و مدل‌های یادگیری توضیح داده می‌شود و سپس چگونگی تأثیر این ساختارها بر دقت، پایداری و توانایی تعمیم مدل‌ها مورد تحلیل قرار می‌گیرد. نتایج این بررسی نشان می‌دهد که فهم مفهومی جبر نه تنها موجب بهبود عملکرد الگوریتم‌های یادگیری می‌شود، بلکه به دانشمندان این امکان را می‌دهد که مدل‌هایی طراحی کنند که رفتار آن‌ها قابل توضیح و منطقی‌تر باشد.

کلمات کلیدی: جبر، ساختارهای ریاضی، هوش مصنوعی، یادگیری ماشین، پایداری مدل‌ها.

### ۱. مقدمه

هوش مصنوعی حاصل تلاقی علوم مختلف از جمله منطق، آمار، ریاضی و علوم شناختی است. در میان این شاخه‌ها، جبر جایگاه ویژه‌ای دارد، زیرا بنیان بسیاری از ساختارهای مورد استفاده در الگوریتم‌های یادگیری، بر اصول جبری استوار است. هر داده، هر مدل و هر شبکه‌ی هوشمند، در نهایت به صورت نوعی ساختار جبری قابل بازنمایی است. از دیدگاه مفهومی، جبر زبان نظم و رابطه است؛ همان چیزی که هوش مصنوعی برای درک و پردازش داده‌ها به آن نیاز دارد.

جبر این امکان را می‌دهد که روابط میان عناصر داده، به صورت قانونمند و قابل تکرار توصیف شوند. در واقع، ماشین‌ها با بهره‌گیری از همین روابط جبری می‌آموزند چگونه الگوها را شناسایی کرده و بر اساس آن تصمیم‌گیری کنند. بدون ساختارهای جبری، مفاهیمی چون یادگیری، تعمیم یا حتی بازشناسی الگو، پایه‌ی ریاضی مشخصی

نخواهند داشت. از سوی دیگر، نظریه‌ی گروه‌ها، حلقه‌ها و فضاهای برداری به دانشمندان اجازه می‌دهند که تقارن‌ها و هم‌ارزی‌ها را در داده‌ها شناسایی و از آن‌ها برای بهبود عملکرد مدل‌ها استفاده کنند.

جبر نه تنها در درک عملکرد الگوریتم‌ها مؤثر است، بلکه در تفسیرپذیری آن‌ها نیز نقش حیاتی دارد. بسیاری از مدل‌های یادگیری ماشین، به‌ویژه شبکه‌های عصبی عمیق، در نگاه اول ساختارهایی پیچیده و غیرشفاف هستند. اما هنگامی که آن‌ها از دیدگاه جبری بررسی می‌شوند، رفتارشان در قالب نگاشت‌ها و ترکیبات ساختاری قابل تحلیل می‌شود. از این رو، جبر به عنوان ابزاری مفهومی و تحلیلی، در قلب توسعه‌ی مدل‌های هوش مصنوعی جای گرفته است.

در این مقاله، تمرکز بر پیوند میان جبر و هوش مصنوعی از جنبه‌ی مفهومی است؛ به‌گونه‌ای که خواننده بدون نیاز به ورود به جزئیات پیچیده‌ی محاسباتی، بتواند اهمیت نظری جبر را در طراحی الگوریتم‌های یادگیرنده درک کند.

در بخش‌های بعدی مقاله، نشان داده خواهد شد که چگونه اندیشه‌ی جبری می‌تواند چارچوبی برای فهم بهتر از هوش مصنوعی فراهم آورد. به بیان دیگر، به جای آنکه جبر صرفاً به عنوان ابزاری محاسباتی دیده شود، باید آن را زبانی دانست که با آن می‌توان هوش را به‌صورت ریاضی توصیف کرد.

## ۲. نتایج اصلی

در بررسی نقش جبر در توسعه‌ی هوش مصنوعی، می‌توان سه جنبه‌ی اصلی را شناسایی کرد: «بازنمایی داده‌ها، یادگیری ساختاری و بهینه‌سازی مدل‌ها». هر یک از این جنبه‌ها نشان می‌دهند که جبر نه تنها زیربنای ریاضی این علم است، بلکه در سطح مفهومی نیز به‌صورت مستقیم با فرایند یادگیری و تصمیم‌گیری ماشین‌ها در ارتباط است.

### ۲-۱. بازنمایی داده‌ها

یکی از مهم‌ترین چالش‌ها در هوش مصنوعی، نحوه‌ی نمایش داده‌هاست. داده‌ها در حالت خام، فاقد نظم و معنا هستند و تا زمانی که ساختاری ریاضی برای توصیف آن‌ها تعریف نشود، امکان تحلیل یا یادگیری از آن‌ها وجود ندارد. جبر این ساختار را فراهم می‌کند. در واقع، مفاهیمی مانند ترکیب، تقارن و تبدیل، به ماشین‌ها اجازه می‌دهد داده‌ها را نه صرفاً به عنوان اعداد، بلکه به عنوان الگوهای دارای معنا درک کنند.

برای مثال، در پردازش تصویر، روابط مکانی میان نقاط تصویر، نوعی ساختار جبری ایجاد می‌کند که در آن، هر تغییر در موقعیت یا زاویه را می‌توان به‌صورت یک تبدیل ساختاری تفسیر کرد. همین دیدگاه جبری است که به مدل‌های یادگیری کمک می‌کند تا نسبت به تغییرات زاویه یا اندازه‌ی اشیاء مقاوم باشند.

### ۲-۲. یادگیری ساختاری

در بسیاری از الگوریتم‌های یادگیری، فرایند یادگیری در اصل نوعی کشف رابطه‌ی پایدار میان داده‌هاست. این پایداری همان چیزی است که در جبر با مفاهیمی همچون بسته بودن، هم‌ارزی و ترکیب شناخته می‌شود. هر الگوریتم یادگیری موفق، در حقیقت ساختاری را می‌آموزد که تحت برخی تبدیل‌ها تغییر نکند. این ایده‌ی

بنیادی، ریشه در نظریه‌ی گروه‌ها دارد و باعث می‌شود مدل‌ها بتوانند الگوهای عمومی را از میان داده‌های پراکنده تشخیص دهند.

درک مفهومی از این جنبه، به طراحان الگوریتم‌ها کمک می‌کند تا بدانند کدام ساختارهای داده را باید حفظ و کدام را نادیده بگیرند. برای نمونه، در یادگیری زبان طبیعی، ماشین باید بداند که ترتیب کلمات ممکن است تغییر کند، اما معنی جمله ثابت بماند. چنین رفتاری بدون وجود یک درک جبری از رابطه‌ی بین عناصر زبانی ممکن نیست.

## ۲-۳. بهینه‌سازی مدل‌ها

جبر در فرایند یادگیری نقش دیگری نیز ایفا می‌کند و آن، سامان‌دهی مسیر یادگیری است. هر فرایند یادگیری، نیازمند یافتن حالتی بهینه میان بی‌نهایت امکان است. در اینجا، ساختارهای جبری کمک می‌کنند تا مسیر جست‌وجوی مدل به سمت حالت‌های سازگار و پایدار هدایت شود. به بیان دیگر، جبر چارچوبی فراهم می‌کند تا حرکت در فضای پیچیده‌ی تصمیم‌ها به صورت قانون‌مند و هدفمند انجام گیرد. نتایج بررسی‌های مفهومی نشان می‌دهد که مدل‌هایی که در طراحی آن‌ها از اصول جبری الهام گرفته شده، در برابر نویز داده‌ها مقاوم‌ترند، سرعت یادگیری بالاتری دارند و خروجی‌هایشان قابل‌تفسیرتر است. بنابراین، جبر نه تنها پایه‌ی ریاضی الگوریتم‌هاست، بلکه عامل کلیدی در پایداری و تعمیم‌پذیری آن‌ها محسوب می‌شود.

## ۳. نتایج عددی (تحلیل مفهومی)

اگرچه هدف این مقاله تمرکز بر دیدگاه مفهومی جبر در هوش مصنوعی است، اما برای درک بهتر اثرات این ارتباط، مرور نتایج تجربی موجود در منابع علمی ضروری است. مطالعات اخیر نشان داده‌اند که استفاده از ساختارهای جبری در طراحی مدل‌های هوشمند، تأثیر قابل توجهی بر عملکرد و پایداری آن‌ها دارد. در پژوهش‌های انجام‌شده بر روی مدل‌های پردازش تصویر، مشخص شده است که الگوریتم‌هایی که بر مبنای درک تقارن و ترکیب داده‌ها طراحی شده‌اند، در برابر تغییر زاویه، اندازه و روشنایی اشیاء مقاوم‌تر عمل می‌کنند. در سیستم‌های پردازش زبان طبیعی نیز، بهره‌گیری از روابط جبری میان واژه‌ها باعث افزایش دقت در درک مفاهیم و کاهش خطای تفسیر شده است.

به طور کلی، هر جا که داده‌ها دارای الگوهای تکرارشونده، روابط هم‌ارز یا ساختارهای قابل ترکیب باشند، جبر به عنوان ابزاری برای ساده‌سازی و سامان‌دهی یادگیری وارد عمل می‌شود. از این منظر، حتی اگر نتایج عددی متفاوت باشند، حضور تفکر جبری در طراحی مدل‌ها، همواره به ایجاد نظم، کاهش پیچیدگی و افزایش قابلیت تعمیم کمک کرده است.

## ۴. نتیجه‌گیری

جبر، ستون فکری و نظری بسیاری از پیشرفت‌های هوش مصنوعی است. درک مفاهیم بنیادی آن، مانند ساختار، ترکیب و تقارن، کلید فهم عمیق‌تری از عملکرد مدل‌های یادگیری محسوب می‌شود. نتایج این پژوهش نشان داد که

جبر نه فقط ابزاری محاسباتی، بلکه زبانی تحلیلی است که می‌تواند به بازتولید فرایندهای شناختی در قالب ریاضی کمک کند.

اگر هوش مصنوعی را تلاشی برای شبیه‌سازی تفکر انسانی بدانیم، جبر همان منطق درونی این تفکر است؛ منطقی که روابط را می‌بیند، آن‌ها را می‌سنجد و بر اساس الگوها تصمیم می‌گیرد. آینده‌ی توسعه‌ی هوش مصنوعی بی‌تردید در گرو پیوند عمیق‌تر میان ریاضیات انتزاعی و طراحی الگوریتم‌های یادگیرنده خواهد بود، و در این مسیر، جبر نقش محوری خود را بیش از پیش نشان خواهد داد.

## منابع

۱. ر. منصوری، «استفاده از شبکه‌های عصبی در حل مسائل بهینه‌سازی ناهموار»، \*مجله بهینه‌سازان\*، شماره ۲۳-۳۲، ص ۷۸، ۱۳۹۳.

۲. ب. خادمی، «کاربرد جبر در تحلیل داده‌های هوش مصنوعی»، \*مجله ریاضی نوین ایران\*، شماره ۴۴، ۱۳۹۹.

3. Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). \*Deep Learning\*. MIT Press.
4. Strang, G. (2019). \*Linear Algebra and Learning from Data\*. Wellesley—Cambridge Press.
5. Bronstein, M. M., Bruna, J., Cohen, T., & Veličković, P. (2021). \*Geometric Deep Learning: Grids, Groups, Graphs, Geodesics, and Gauges\*. arXiv:2104.13478.



## حلقه‌های انژکتیو ۲ - ساده و شبه فروبنیوس

موسی شامحمدی؛ عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

m.shamohammadi@pnu.ac.ir

**چکیده:** حلقه‌های انژکتیو ۲ - ساده راست، وسیع‌تر از حلقه‌های انژکتیو ساده راست و حلقه‌های ۲ - انژکتیوی راست هستند. در این مقاله مشخصه‌ها و خواص حلقه‌های انژکتیو ۲ - ساده راست، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین شرایط متعددی که تحت این شرایط، حلقه‌های انژکتیو ۲ - ساده، تبدیل به حلقه‌های  $QF$  می‌شوند، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

**کلمات کلیدی:** حلقه‌های انژکتیو ۲ - ساده، حلقه‌های کش، حلقه‌های  $QF$ .

### ۱ مقدمه

برای اولین بار حلقه‌های شبه فروبنیوس در سال ۱۹۴۱ با عنوان Frobeniusean algebra on بررسی شد. حلقه‌های انژکتیو ساده در سال ۱۹۸۲ مورد مطالعه قرار گرفت. در سال ۲۰۱۰ دسته خاصی از حلقه‌های انژکتیو ساده مورد بررسی قرار گرفت. به طور کلی در این مقاله تمامی حلقه‌ها شرکت پذیر و یکدار و همه مدول‌ها یکانی هستند.

**تعریف ۱.** مجموع تمام ایده‌ال‌های راست و چپ مینیمال  $R$  که با  $S_r$  و  $S_l$  نشان می‌دهند را ساکل راست و چپ می‌نامند.

**تعریف ۲.** اگر  $K$  زیرمدولی از مدول  $M$  باشد،  $K$  یک زیر مدول اساسی از  $M$  نامیده می‌شود هر گاه برای هر زیر مدول  $X \neq 0$  از  $M$ ،  $K \cap X \neq 0$  باشد، در این صورت نمایش داده می‌شود  $K \subseteq^{ess} M$ .

**تعریف ۳.** اگر مدول  $M_R$  با  $M$  مساوی باشد، آنگاه ساکل  $M$ ، عبارتست از مجموع همه زیر مدول‌های ساده  $M$ ، که با  $SOC(M)$  نمایش داده می‌شود، اگر  $M$  زیر مدول ساده نداشته باشد آنگاه  $SOC(M)$  برابر صفر است.

**تعریف ۴.** حلقه‌ی  $R$  انژکتیو ساده نامیده می‌شود اگر برای هر ایده‌ال  $I$  از  $R$ ، هر نگاشت  $R$  - خطی  $\gamma: I \rightarrow R$  با  $\gamma(I)$  ساده، به  $R$  توسعه داده شود.

**تعریف ۵.** حلقه‌ی  $R$  فروبنیوس وار یا شبه فروبنیوس یا مختصراً « $QF$ » نامیده می‌شود، اگر آرتینی راست (چپ) یا «نوتری» و خودانژکتیو راست (چپ) باشد.



مثال ۱. اگر  $R$  جبری از ماتریس ها به روی میدان  $K$ ، به فرم زیر باشد

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in K \right\}$$

آنگاه  $R$  شبه فروبنیوس است.

## ۲ حلقه‌های انژکتیو ۲- ساده

تعریف ۶. حلقه‌ی  $R$  انژکتیو ۲- ساده راست نامیده می‌شود اگر برای هر ایده‌ال راست ۲- تولید شده  $I$  از  $R$  هر  $R-I$  نگاشت خطی  $\gamma: I \rightarrow R$  با  $\gamma(I)$  ساده، به درونریختی از  $R$  توسیع داده شود.

قضیه ۱. فرض کنید  $\mathbb{Z}_{2^\infty} = \{\frac{m}{2^i} + \mathbb{Z} \mid m \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z}^+\}$  گروه از نوع  $2^\infty$  باشد. سپس توسیع بدیعی  $T(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{2^\infty})$  از  $\mathbb{Z}$  بوسیله‌ی  $\mathbb{Z}_{2^\infty}$  یک حلقه‌ی انژکتیو ساده‌ی تعویض پذیر با  $Soc$  اساسی ساده است، البته انژکتیو ۲- ساده نیز هست ولی  $P$ - انژکتیو نیست.

مثال ۲. اگر  $R$ ، حلقه  $R = \mathbb{Z}_2[x_1, x_2]$  باشد، در حالی که  $x_i$  مجهول‌های جابجا پذیری هستند که در روابط  $x_i^3 = 0$  برای همه‌ی  $i$  ها،  $x_i x_j = 0$  برای همه‌ی  $j \neq i$  و  $x_i^2 = x_j^2$  برای همه‌ی  $i, j$  صدق کند.  $m = x_1^2 = x_2^2 = \dots$  در نظر بگیرید. سپس  $R$  یک حلقه موضعی جابجایی، با خواص  $J = \text{span}_{\mathbb{Z}_2}\{m, x_1, x_2, \dots\}$  و  $J^3 = 0, Soc(R) = J^2$  و  $Fm$  اساسی و ساده در  $R$  است. همچنین  $R$  یک حلقه‌ی  $FP$  انژکتیو است. بنابراین  $R$  یک حلقه‌ی جابجایی، کش، نیمه ابتدایی و یک حلقه‌ی انژکتیو ۲- ساده با  $Soc$  اساسی ساده است که انژکتیو ساده نیست.

## ۳ حلقه‌های $QR$

قضیه ۲. شرایط زیر برای حلقه  $R$  هم ارز است.

(۱)  $R$ ، یک حلقه  $QF$  است.

(۲) آرینی چپ یا راست و خود انژکتیو چپ یا راست است.

(۳)  $R$ ، نوتری چپ یا راست و خود انژکتیو چپ یا راست است.

(۴)  $R$ ، دارای شرط زنجیره افزایشی چپ یا راست به روی پوچسازها است و خود انژکتیو چپ یا راست است.



(۵)  $R$ ، نوتری چپ یا راست است و برای همه ایده‌آل‌های راست  $T$ ،  $rl(T) = T$  باشد. همچنین برای همه ایده‌آل‌های چپ  $L$ ،  $lr(L) = L$ .

اثبات. [۶]. □

قضیه ۳. فرض کنید  $R$  یک حلقه انژکتیو ۲- ساده باشد، آنگاه گزاره‌های زیر هم ارزند:

(۱)  $R$ ، یک حلقه  $QF$  است.

(۲)  $R$ ، یک حلقه کش راست و  $CF$  چپ است.

(۳)  $R$ ، آرتینی چپ است.

(۴)  $R$ ، یک حلقه نیمه ابتدایی با شرط زنجیره افزایشی به روی پوچسازهای چپ است.

(۵)  $R$ ، یک حلقه کامل چپ و راست با شرط زنجیره افزایشی به روی پوچسازهای چپ است.

(۶)  $R$ ، یک حلقه کامل چپ با شرط زنجیره افزایشی به روی پوچسازهای چپ است.

اثبات  $2 \Rightarrow 1$  با استفاده از قضیه قبل برقرار می‌شود.

$3 \Rightarrow 2$  با استفاده از قضیه قبل برقرار می‌شود.

$3 \Rightarrow 4$  با استفاد از قضایای قبلی نیمه ابتدایی بودن حلقه، و از قضیه قبل شرط زنجیره افزایشی به روی پوچسازهای چپ برقرار می‌شود.

$4 \Rightarrow 5$  برای اینکه  $R$  کامل باشد، باید نیمه کامل و  $J$  پوچتوان باشد. با توجه به (۴)،  $R$  نیمه ساده و  $J$  پوچتوان است.  $J$  خیز خود توان است. بنابراین  $R$  نیمه کامل می‌شود. شرط زنجیره افزایشی نیز با استفاده از (۴) برقرار می‌شود.

$5 \Rightarrow 6$  واضح است.

$6 \Rightarrow 1$  چون  $R$  یک حلقه کامل چپ و انژکتیو ۲- ساده‌ی راست است مینی انژکتیو راست و چپ می‌شود (۱۳، ۵۰۲). بنابراین  $Soc(\square_R R) \subseteq^{ess} R$  است. حال با توجه به داشتن شرط زنجیره‌ی افزایشی به روی پوچسازهای چپ، و با استفاده از قضیه قبل، حلقه  $R$ ،  $QF$  می‌شود.

□

قضیه ۴. فرض کنید  $R$ ، یک حلقه انژکتیو ۲- ساده باشد. آنگاه گزاره‌های زیر هم ارزند:

(۱)  $R$ ، یک حلقه  $QF$  است.

(۲)  $R$ ، یک حلقه  $GP$  - انژکتیو راست با شرط زنجیره افزایشی به روی پوچسازهای راست است.

(۳)  $R$ ، یک حلقه  $AGP$  - انژکتیو راست با شرط زنجیره افزایشی به روی پوچسازهای راست است.

(۴)  $R$ ، یک حلقه نیمه ابتدایی با شرط زنجیره افزایشی به روی پوچسازهای چپ است.

(۵)  $R$ ، یک حلقه کامل چپ با شرط زنجیره افزایشی به روی پوچسازهای راست است.

قضیه ۵. اگر  $R$  حلقه انژکتیو ۲- ساده و کامل چپ باشد و هر  $R$  مدول راست دوری آن با بعد متناهی باشد، آنگاه  $R$  شبه فروبنیوس است.

اثبات. چون  $R$  کامل چپ است، مینی انژکتیو راست و چپ می شود. علاوه بر این برای هر ایده ال راست  $I$  از  $R$ ،  $\frac{R}{I}$  با بعد متناهی است (طبق فرض).

بنابراین  $Soc(\frac{R}{I})$  با بعد متناهی است. از طرفی  $\frac{R}{I} \subseteq^{ess} Soc(\frac{R}{I})$  هست، زیرا  $R$  نیمه آرتینی راست بوده. سپس  $\frac{R}{I}$  با هم تولید شده متناهی می شود. بنابراین  $R$  آرتینی راست و مینی انژکتیو دو طرفه است و از این رو شبه فروبنیوس است.  $\square$

## مراجع

[۱] د. هانگرفورد، جبر، نوشته توماس؛ ترجمه علی اکبر عالم زاده، حسین ذاکری. تهران: پژوهش ۱۳۷۵.

- [2] J.L. Chen, N.Q. Ding and M.F. Yousif, "Onnoetherian rings with essential socle," J. Aust. Math. Soc., 76(2004), 39-49.
- [3] J.L. Chen, N.Q. Ding and M.F. Yousif, On generalizations of PF-rings, Comm. Algebra, 32(2004), 521-533.
- [4] J.L. Chen, Y.Q. Zhou and Z.M. Zhu, GP-injective rings need not be Pinjective, Comm.Algebra, 35(2005), 2395-2402.
- [5] J.L. G´omez, P.A. GuilAsensio, Torsionless modules and rings with finite essential socle, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 201(1998), 261-278.
- [6] S.B. Nam, N.K. Kim and J.Y. Kim, On simple GP-injective modules, Comm.Algebra, 23(1995), 5437-5444.



## مشتق شبه استلزامی روی جبرهای هوپ

علی معدنشکاف\*؛ عضو هیأت علمی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر دانشگاه سمنان

amadanshekaf@semnan.ac.ir

محمد مهدی معتمدی نژاد، عضو هیأت علمی دانشگاه جامع علمی کاربردی

motamedinezhad@semnan.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله، ضمن معرفی مشتق شبه استلزامی و مثال‌هایی برای این مشتق، خواص مشتق معرفی شده را بر روی جبرهای هوپ بررسی می‌کنیم. سپس ضمن معرفی نقطه ثابت برای این مشتق، نشان می‌دهیم مجموعه مشتق‌های شبه استلزامی تحت شرایطی تشکیل شبکه کراندار و توزیع پذیر می‌دهند.

**کلمات کلیدی:** جبر هوپ، مشتق شبه استلزامی، نقاط ثابت.

### ۱ مقدمه

جبرهای هوپ، یکی از انواع جبرهای منطقی بوده که در سال ۱۹۶۹ توسط بوسباخ<sup>۱</sup> معرفی شدند [۱، ۲]. یکی از ویژگی‌هایی که کمتر در این جبرها، مورد بررسی قرار گرفته، مفهوم مشتق و کاربردهای آن است. درخصوص مشتق شبه استلزامی، ابتدا در سال ۲۰۱۷، یانگ<sup>۲</sup> و ژین، عمل دوتائی شبه استلزام، را تعریف نمودند [۸]. در همین سال، مافی‌یو و همکاران در زمینه مشتق‌های ضربی و استلزامی روی چندمشبکه‌های باقی‌مانده‌ای، نتایجی را ارائه نمودند [۶]. در سال ۲۰۱۹، وانگ<sup>۳</sup> و همکاران، مفهوم مشتق استلزامی را روی  $MV$ -جبرها تعریف نمودند [۷]. در سال ۲۰۲۰، یمن و همکاران [۳]، ضمن تعریف برخی انواع مشتق‌ها بر مشبکه‌های باقی‌مانده‌ای جابجایی کراندار مانند مشتق ضربی، مشتق شبه استلزامی و مشتق استلزامی، برخی از ویژگی‌های این مشتق‌ها را مطالعه نمودند. در این مقاله مشتق شبه استلزامی در جبرهای هوپ، معرفی و خواص آن مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در نهایت روی این مشتق، ضمن معرفی مجموعه نقاط ثابت و بررسی برخی از خصوصیات این مجموعه، نشان داده می‌شود که مجموعه مشتق‌های شبه استلزامی تحت شرایطی تشکیل شبکه کراندار و توزیع پذیر می‌دهند.

Author Corresponding\*

<sup>1</sup>Bosbach

<sup>2</sup>Yang

<sup>3</sup>Wang



## ۲ جبرهای هوپ

در این بخش، تعاریف و برخی ویژگی‌های جبرهای هوپ و همچنین انواع جبرهای هوپ شامل کراندار، دارای (DNP) و غیره را ارائه می‌کنیم.

**تعریف ۱.۲.** [۴] جبر هوپ  $(H; \odot, \rightarrow, 1)$  ساختار جبری از نوع  $(2, 2, 0)$  است بطوریکه:

$$(H1). (H; \odot, 1). \text{ تکواریه جابجایی با عضو همانی باشد،}$$

$$(H2). x \rightarrow x = 1, \text{ برای هر } x \in H,$$

$$(H3). x \odot (x \rightarrow y) = y \odot (y \rightarrow x), \text{ برای هر } x, y \in H,$$

$$(H4). (x \odot y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z), \text{ برای هر } x, y, z \in H.$$

**تعریف ۲.۲.** در جبر هوپ  $H$ ، تعریف می‌کنیم  $x \rightarrow y = 1$  اگر تنها و اگر  $x \leq y$ . به راحتی قابل بررسی است که  $\leq$  رابطه ترتیب جزئی روی  $H$  است. جبر هوپ کراندار، جبر  $(H; \odot, \rightarrow, 0, 1)$  است بطوریکه  $0 \leq x$ ، برای هر  $x \in H$ . در جبر هوپ  $H$ ، تعریف می‌کنیم  $x^0 = 1$  و  $x^n = x^{n-1} \odot x$ ، برای هر  $n \in \mathbb{N}$ . فرض کنیم  $H$  جبر هوپ کراندار باشد. عمل متمم " ' " را برای هر  $x \in H$  به صورت  $x' = x \rightarrow 0$  تعریف می‌کنیم. همچنین قرار می‌دهیم  $(x')' = x$ . اگر برای هر  $x \in H$ ،  $x'' = x$  باشد، آنگاه گوئیم جبر هوپ کراندار  $H$ ، دارای «ویژگی نفی مضاعف» یا به اختصار (DNP) است. عضو  $x \in H$  را خودتوان نامیم اگر و فقط اگر  $x^2 = x$ . مجموعه اعضای خودتوان  $H$  را با  $Id(H) = \{x \in H : x^2 = x\}$  نشان می‌دهیم.

**تعریف ۳.۲.** جبر هوپ  $H$  را  $\vee$ -هوپ می‌نامیم اگر عمل دوتائی  $\vee$  که به صورت

$$x \vee y = ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x)$$

تعریف می‌شود، سوپریمم (کوچکترین کران بالا) روی  $H$  باشد.

## ۳ مشتق شبه استلزامی

در این بخش، ضمن تعریف مفهوم مشتق شبه استلزامی بر جبرهای هوپ، به بررسی برخی خاصیت‌های آن می‌پردازیم.

**تعریف ۱.۳.** فرض کنیم  $H$  جبر هوپ کراندار است. عمل دوتائی  $\rightarrow$  را شبه استلزام می‌نامیم و به صورت  $x \rightarrow y = x \odot y'$ ، برای هر  $x, y \in H$ ، تعریف می‌کنیم.

**لم ۲.۳.** فرض کنیم  $H$  جبر هوپ کراندار است. برای هر  $x, y \in H$ ، داریم:

$$(۱) \quad x \rightarrow x = 0, 0 \rightarrow x = 0, x \rightarrow 0 = x$$

$$(۲) \quad 1 \rightarrow x = x', x \rightarrow 1 = 0$$

$$(۳) \quad x \rightarrow y = 0 \text{ آنگاه } x \leq y \text{ و اگر } x \leq y \text{ آنگاه } x \rightarrow y = 0$$

$$(۴) \quad \text{اگر } x \leq y \text{ آنگاه } x \rightarrow z \leq y \rightarrow z \text{ و } z \rightarrow y \leq z \rightarrow x$$

$$(۵) \quad \text{اگر } x \rightarrow y = 0 \text{ آنگاه } y' \leq x'$$



$$(۶) \text{ اگر } x \rightarrow x' = x^2 \text{ و } 1 \rightarrow x' = x \text{ ، } x \in \text{reg}(H) \text{ آنگاه}$$

$$(۷) (x \rightarrow z) \rightarrow (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow y$$

$$(۸) (x \rightarrow y) \odot (y \rightarrow x) \leq x \odot y \text{ و } x \rightarrow y \leq y \rightarrow x$$

**تعریف ۳.۳.** فرض کنیم  $H$  جبر هوپ کراندار و  $d: H \rightarrow H$  تابعی روی  $H$  است.  $d$  را مشتق شبه استلزامی روی  $H$  می‌نامیم اگر

$$d(x \rightarrow y) = (d(x) \rightarrow y) \odot (x \rightarrow d(y)),$$

برای هر  $x, y \in H$ . این مشتق را با  $d_p$  نشان می‌دهیم. مشتق شبه استلزامی  $d_p$  را یکنوا روی  $H$  می‌نامیم اگر  $x \leq y$  آنگاه  $d_p(x) \leq d_p(y)$ . مجموعه‌ی همه مشتق‌های شبه استلزامی روی  $H$  را با  $\text{PIDer}(H)$  نشان می‌دهیم. در ادامه فرض می‌کنیم  $H$  جبر هوپ کراندار است.

#### مثال ۴.۳

(۱) تابع  $d_{p_0}: H \rightarrow H$  را به صورت  $d_{p_0}(x) = 0$ ، برای هر  $x \in H$  تعریف می‌کنیم. در این صورت  $d_{p_0}$  مشتق شبه استلزامی روی  $H$  است که آن را مشتق شبه استلزامی صفر می‌نامیم.

(۲) فرض کنیم  $H$  خودتوان باشد. تابع  $d_{p_1}: H \rightarrow H$  را به صورت  $d_{p_1}(x) = x$ ، برای هر  $x \in H$  تعریف می‌کنیم. به راحتی قابل بررسی است که  $d_{p_1}$  مشتق شبه استلزامی روی  $H$  است که آن را مشتق شبه استلزامی یک می‌نامیم.

**گزاره ۵.۳.** فرض کنیم  $d_p$  مشتق شبه استلزامی روی  $H$  است. در این صورت عبارات‌های زیر برقرارند.

$$(۱) d_p(0) = 0$$

$$(۲) \text{ برای هر } x \in H, d_p(x) = d_p(x) \odot x \text{ . در نتیجه } d_p(x) \leq x$$

$$(۳) \text{ برای هر } x, y \in H, d_p(x \rightarrow y) \leq x \odot y'$$

$$(۴) \text{ برای هر } x, y \in H, d_p(x \odot y') \leq d_p(x) \odot d_p(y)'$$

$$(۵) \text{ برای هر } x, y \in H, \text{ آنگاه } d_p(x \rightarrow y) = 0 \text{ ، اگر } x \leq y$$

$$(۶) d_p(x') \leq d_p(x) \text{ و } d_p(x') \leq d_p(1) \text{ ، برای هر } x \in H$$

**قضیه ۶.۳.** فرض کنیم  $H$  جبر هوپ کراندار و خودتوان باشد. در این صورت گزاره‌های ذیل معادل‌اند:

$$(۱) d_p \text{ مشتق شبه استلزامی روی } H \text{ است؛}$$

$$(۲) \text{ برای هر } x, y \in H, d_p(x \rightarrow y) = d_p(x) \rightarrow y$$

**تعریف ۷.۳.** فرض کنیم  $d_p$  مشتق شبه استلزامی روی  $H$  است. مجموعه‌ی نقاط ثابت تحت  $d_p$  روی  $H$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. یعنی  $\text{Fix}_{d_p}(H) = \{x \in H : d_p(x) = x\}$ . براساس گزاره ۵.۳ (۱)، داریم  $\text{Fix}_{d_p}(H) \neq \emptyset$ .

**گزاره ۸.۳.** فرض کنیم  $d_p$  مشتق شبه استلزامی روی  $H$  است. در این صورت برای هر  $x \in H$ :

$$(۱) \text{Fix}_{d_p}(H) \subseteq \text{Id}(H)$$

$$(۲) \text{ اگر } H \text{ خودتوان باشد و } x \in \text{Fix}_{d_p}(H) \text{ ، آنگاه } x \rightarrow y \in \text{Fix}_{d_p}(H) \text{ ، برای هر } y \in H$$

(۳) اگر  $d_p(x \rightarrow y) = (x \rightarrow y)^2$ ، آن‌گاه  $x, y \in \text{Fix}_{d_p}(H)$

(۴) اگر  $x, y \in \text{Fix}_{d_p}(H)$  و  $d_p$  یکنوا باشد، آن‌گاه  $x \vee y \in \text{Fix}_{d_p}(H)$ .

**قضیه ۹.۳.** فرض کنیم  $\text{PIDer}(H)$  مجموعه‌ی مشتق‌های شبه استلزامی روی  $H$  است. فرض کنیم برای هر  $x, y \in H$  داشته باشیم  $x \odot y = x \wedge y$ . در این صورت  $(\text{PIDer}(H); \vee, \wedge, d_{p_0}, d_{p_1})$  با تعاریف زیر، شبکه‌ی کراندار و توزیع پذیر است.

$$(d \vee \bar{d})(x) = d(x) \vee \bar{d}(x), \quad (d \wedge \bar{d})(x) = d(x) \wedge \bar{d}(x),$$

برای هر  $x, y \in H$  و  $d, \bar{d} \in \text{PIDer}(H)$ .

## مراجع

- [1] B. Bosbach, Komplementäre Halbgruppen. Axiomatik und Arithmetik, Fund. Math. 64, (1969), 257–287; <http://eudml.org/doc/214075>.
- [2] B. Bosbach, Komplementäre Halbgruppen. Kongruenzen und Quotienten, Fund. Math. 69, (1970), 1–14; <https://doi.org/10.4064/fm-69-1-1-14>.
- [3] D. L. Keubeng Yemene, L. E. Diekouam Fotso, D. Akume, C. Lele, Some types of derivations in bounded commutative residuated lattices, J. Algebr. Hyperstruct. Log. Algebras, 1(4), (2020), 21-37; <https://doi.org/10.52547/HATEF.JAHLA.1.4.2>.
- [4] M. Kondo, Some types of filters in hoops, 41st IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, (2011), 50-53; <https://doi.org/10.1109/ISMVL.2011.9>.
- [5] A. Madanshekaf, M. M. Motamedi Nezhad,  $f$ -Derivations,  $(f, g)$ -derivations, and  $s$ -derivations on hoop algebras: Properties and Lattice Structures, J. Algebr. Hyperstruct. Log. Algebras, 2025, 16(2): 111-137.
- [6] L. N. Maffeu, C. Lele, J. B. Nganou, E. A. Temgoua, Multiplicative and implicative derivations on residuated multilattices, Soft Comput., 23, (2019), 12199–12208; <https://doi.org/10.1007/s00500-019-04184-z>.
- [7] J. T. Wang, Y. H. She, T. Qian, Study of  $MV$ -algebras via derivations, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, 27(3), (2019), 259–278; <https://doi.org/10.2478/auom-2019-0044>.
- [8] Y. Yang, X. Xin, On characterizations of  $BL$ -algebras via implicative ideals, Ital. J. Pure Appl. Math., 37, (2017), 493–506;



**کاربرد ریاضی در سایر علوم**

## از اسطرلاب تا الگوریتم، میراث پایدار ریاضیات اسلامی

سید حسین جعفری پطرودی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران، [petroudi@pnu.ac.ir](mailto:petroudi@pnu.ac.ir)

**چکیده:** در دوران شکوه تمدن اسلامی، ریاضیات به عنوان علمی کلیدی، هم در کاربردهای عملی و هم در توسعه نظری به طرز چشمگیری پیشرفت کرد. این مقاله ضمن بررسی مراکز علمی، ابزارها و دانشمندان برجسته مسلمان، نقش ریاضیات اسلامی را در علوم طبیعی، نجوم، مهندسی و هنر نشان می‌دهد. انتقال این دانش به اروپا، زمینه‌ساز رنسانس علمی و پیشرفت‌های بعدی در جهان غرب شد. میراث ریاضیات اسلامی همچنان در علوم نوین، از جمله کامپیوتر و معماری، جریان دارد و گواهی بر نقش اساسی آن در توسعه علمی و فرهنگی بشریت است.  
**کلمات کلیدی:** ریاضیات اسلامی، تاریخ علم، مراکز علمی، میراث فرهنگی، علوم نوین.

### ۱. مقدمه

قرآن کریم، سنت نبوی (ص) و امامان معصوم همواره بر اهمیت دانش و فراگیری و نشر آن تأکید کرده‌اند. آیه‌ی «أَفْرَأَ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ» (سوره علق: آیه ۱) دعوت به فراگیری علم است و پیامبر اسلام (ص) فرموده‌اند: «طلب العلم فریضة علی کل مسلم». بر این اساس، دانشمندان مسلمان، علم را بخشی از عبادت می‌دانستند و تلاش علمی را مقدس تلقی می‌کردند. در این زمینه، ریاضیات جایگاهی ویژه یافت. این علم نه تنها دارای بنیان‌های نظری غنی بود، بلکه کاربردهای عملی گسترده‌ای از جمله در تعیین قبله و محاسبه زمان‌های شرعی گرفته تا تقسیم ارث و محاسبات مالی داشت. چنین نیازهای عملی باعث شد ریاضیات در تمدن اسلامی به عنوان دانشی هم کاربردی و هم مقدس شناخته شود و تلاش بسیاری برای فراگیری آن انجام شد.

در این مقاله با رویکردی تاریخی و تحلیلی، مسیر تحول ریاضیات اسلامی را از ابزارهای عملی مانند اسطرلاب تا بنیان‌های نظری جبر و الگوریتم‌های خوارزمی را بررسی می‌کنیم و با بیان چند بخش مختلف نشان می‌دهیم که این دستاوردها نه تنها در زندگی روزمره مسلمانان تأثیرگذار بوده‌اند، بلکه انتقال این دستاوردها به اروپا زمینه‌ساز رنسانس علمی را فراهم کردند. میراث این پیشرفت‌های علمی مسلمانان تا امروز در علوم معاصر، از الگوریتم‌ها و محاسبات عددی گرفته تا هندسه و معماری، همچنان پایدار است (برای اطلاعات بیشتر به [1-6] و [11] ارجاع می‌دهیم).

### ۲. تاسیس مراکز علمی و فرهنگی

یکی از مهم‌ترین عوامل شکوفایی ریاضیات در تمدن اسلامی، ایجاد و توسعه مراکز علمی و فرهنگی در سراسر جهان اسلام بود. این مراکز علمی علاوه بر نقش پژوهشی ای که داشتند، به نمادی از توجه جوامع اسلامی به علم به عنوان سرمایه‌ای فرهنگی و دینی تبدیل شدند که در اینجا به برخی از این مراکز اشاره می‌کنیم:

**بیت‌الحکمه در بغداد:** این مرکز به عنوان کانون ترجمه و پژوهش علمی شناخته می‌شد و آثار یونانی، هندی و ایرانی در این مرکز گردآوری و به زبان عربی ترجمه می‌شدند [11]. بیت‌الحکمه، علاوه بر امر بسیار مهم ترجمه، به تولید دانش بومی در حوزه‌های مختلف مانند ریاضیات، نجوم و فلسفه نیز کمک فراوانی کرد و به مرکز تجمع دانشمندان و فراگیران آن زمان تبدیل شد.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول.

**نیشابور و سمرقند:** در این شهرها رصدخانه‌ها و مدارس علمی کاملاً فعال بودند و همین زمینه ساز رشد ریاضیات بصورت کاربردی و نجوم شد. این مراکز به دانشمندان امکان می‌داد تا ابزارهایی مانند اسطرلاب و ابزارهای محاسباتی پیشرفته را توسعه دهند و نظریه‌های ریاضی را با کاربردهای عملی در زندگی روزمره و علوم طبیعی پیوند دهند [7].

**اندلس و شهرهای قرطبه و غرناطه (در اسپانیا):** این مناطق با ایجاد مدارس و کتابخانه‌های بزرگ، نه تنها به تولید دانش علمی کمک کردند، بلکه نقش کلیدی در انتقال علوم اسلامی به اروپا ایفا نمودند و به شکل‌گیری رنسانس علمی در غرب منجر شدند. این نهادها، با ترکیب پژوهش‌های نظری و کاربردهای عملی، نمونه‌های بسیار روشن از دیدگاه دین مبین اسلام به علم بودند، جایی که ریاضیات و دانش، هم ابزار فهم جهان بودند و هم به عنوان بخشی از عبادت و خردورزی تلقی می‌شدند.

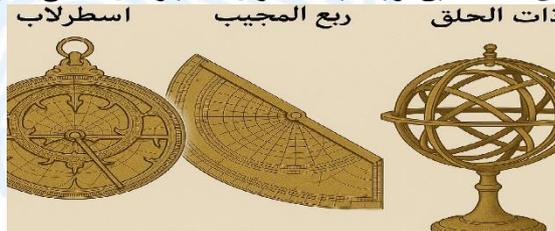
### ۳. کاربرد عملی ریاضیات اسلامی در علوم

ابزارها و روش‌های عملی ریاضی در جهان اسلام نقش مهمی در پیشرفت علوم ایفا کردند و ارتباط موثری میان نظریه علمی و کاربرد آن ایجاد نمودند. این ابزارها، از نجوم و جغرافیا گرفته تا مهندسی و محاسبات عددی، پایه‌های علمی بسیاری از فناوری‌های مدرن را شکل دادند که برخی از موارد به شرح زیر می‌باشند:

**اسطرلاب:** این ابزار برای اندازه‌گیری ارتفاع ستارگان، تعیین موقعیت زمان و جهت‌ها، تعیین قیله و ناوبری دریایی به‌کار می‌رفت. اسطرلاب نمونه‌ای بارز از کاربرد ریاضیات در حل مسائل عملی زندگی روزمره و علمی بود [7].

**ربع‌المجیب و ذات‌الحلق:** ربع‌المجیب نوعی ربع‌دایره (ربع‌دایره فلزی یا چوبی) بود که برای محاسبات زوایای و مثلثاتی استفاده می‌شد. بیشتر کاربرد آن در محاسبه زمان، تعیین ارتفاع ستارگان و خورشید، قبله‌یابی و مسائل نجومی بود. تفاوتش با ربع ساده این بود که روی آن شبکه‌های محاسباتی و خطوط سینوس و کسینوس حک می‌کردند، تا بتوان بدون محاسبات طولانی، مستقیماً روابط مثلثاتی را به‌دست آورد.

**ذات الحلق** یک نوع اسطرلاب کروی سه‌بعدی بود که از چندین حلقه فلزی مدور تشکیل می‌شد. این حلقه‌ها نمایانگر دایره‌های اصلی نجوم (مانند نصف‌النهار، استوا، منطقه‌البروج، و دایره افق) بودند. با چرخاندن حلقه‌ها می‌شد موقعیت ستارگان، خورشید و سیارات را نسبت به زمین مشخص کرد. کاربرد اصلی آن در رصدهای دقیق نجومی، تعیین مختصات جغرافیایی و محاسبه حرکات سیارات بود. به‌عنوان گفت پیش‌نمونه‌ای از کره‌های آسمانی مدرن بوده است. این ابزارها نشان‌دهنده تلفیق ریاضیات نظری با نیازهای عملی نجوم و زمان‌بندی در زندگی اجتماعی و دینی مسلمانان بودند [12].



**جدول عددی و الگوریتم‌ها:** جداول جبری و مثلثاتی خوارزمی و بوزجانی محاسبات علمی و مهندسی را تسریع کردند و پایه‌ای برای توسعه الگوریتم‌ها و محاسبات مدرن فراهم آوردند. این دستاوردها، ارتباط مستقیم میان ریاضیات نظری و توسعه فناوری‌های محاسباتی را نشان می‌دهند [1].

**ساعت‌های آبی و مکانیکی:** با بهره‌گیری از اصول هندسه و مکانیک، در سده دوم هجری قمری ساعت‌هایی مکانیکی ساخته شد که دقت زمان را بهبود می‌بخشید و زمینه‌ساز پیشرفت مهندسی مکانیک شد. این نمونه‌ها نشان‌دهنده کاربرد ریاضیات در طراحی و ساخت ابزارهای دقیق برای زندگی روزمره و پژوهش علمی بودند [1].

**نجوم و جغرافیا:** محاسبات ریاضی برای تعیین عرض و طول جغرافیایی و تهیه نقشه‌های دقیق به‌کار گرفته شد. جداول نجومی خواجه نصیرالدین طوسی پایه‌ای برای رصدخانه‌ها و مطالعات نجومی اروپایی گردید و نشان‌دهنده تاثیر مستقیم ریاضیات اسلامی بر توسعه علوم در غرب بود [5].

### ۴. تاثیر ریاضیات اسلامی بر دنیای غرب

آثار دانشمندان مسلمان به خصوص ریاضی دانان مسلمان، از قرن ۱۲ میلادی به‌واسطه مترجمان لاتین در مدرسه طلیطله به زبان لاتین ترجمه شد و به این ترتیب، دانش ریاضی دانشمندان اسلامی به اروپا منتقل شد. این انتقال علمی، آن چنان اهمیتی پیدا کرد که زیربنای بسیاری از پیشرفت‌های علمی و فکری اروپا در دوره رنسانس شد و نقش اساسی در شکل‌گیری ریاضیات مدرن ایفا نمود. از جمله می‌توان به موارد زیر در این زمینه اشاره نمود:

**آثار خوارزمی در جبر و الگوریتم:** نوشته‌های دانشمند بزرگ، محمد بن موسی خوارزمی، به‌ویژه در حوزه جبر و الگوریتم، الهامبخش ریاضیات غربی شدند و بسیاری از مفاهیم بنیادی این علم را پایه‌گذاری کردند [10].

**جدول نجومی ابوالوفای بوزجانی و خواجه نصیرالدین طوسی:** این جداول تا قرون وسطی در اروپا تدریس می‌شدند و نقش مهمی در توسعه نجوم و تقویم‌نگاری غرب ایفا کردند. دانشمندان اروپایی با بکارگیری از این منابع با ارزش، توانستند محاسبات دقیق‌تر و نظریه‌های پیشرفته‌تری در نجوم ارائه کنند [1]، [5].

**نظام عددنویسی هندی-عربی و مفهوم صفر:** ریاضی‌دانان هندی برای نشان‌دادن «خالی بودن یک مرتبه عددی» نمادی شبیه نقطه یا دایره کوچک به کار بردند. این نماد بعدها به شکل ۰ درآمد. دانشمندان مسلمان، این سیستم عددی را از هندی‌ها گرفتند، آن را گسترش دادند و به جهان اسلام و سپس به اروپا منتقل کردند. معرفی این سیستم عددی و جایگاه عدد صفر، تحول عظیمی در ریاضیات اروپا ایجاد کرد. استفاده از اعداد هندی-عربی جایگزین اعداد رومی شد و زمینه را برای پیشرفت در حساب، جبر و حسابداری فراهم آورد.

بنابراین، انتقال ریاضیات اسلامی به غرب، نه تنها موجب غنای علمی و توسعه نظری در اروپا شد، بلکه نشان می‌دهد تمدن اسلامی در پل زدن میان فرهنگ‌ها و ایجاد پایه‌های پایدار برای علوم معاصر چه نقش مهمی را ایفا کرد.

#### ۴. میراث علمی و فرهنگی ریاضیات اسلامی

ریاضیات در تمدن اسلامی علاوه بر حوزه‌های نظری و عملی در حوزه‌های دیگری نظیر فرهنگ، هنر و فلسفه نیز تأثیر چشمگیری داشت. این تأثیرات نشان‌دهنده دیدگاه جامع اسلامی نسبت به علم بود، جایی که دانش، هنر و زیبایی با هم پیوند داشتند که در اینجا به برخی از این موارد اشاره می‌کنیم:

**معماری اسلامی:**

بسیاری از الگوهای هندسی پیچیده، مانند ستاره‌های چندضلعی، تقارن‌ها، مقرنس‌ها و کاشی‌کاری‌های هندسی، بر اساس اصول ریاضی طراحی شده‌اند. نمونه‌های شاخص از این الگوها را می‌توان در اماکنی مانند مسجد شیخ لطف‌الله در اصفهان، مسجد شاه (امام) اصفهان، مسجد نصیرالملک شیراز، گنبد سلطانیه زنجان، مسجد کبود تبریز اشاره نمود، جایی که ریاضیات و هنر به شکلی هماهنگ در خلق فضایی زیبا و هماهنگ به کار رفته‌اند.

**خوشنویسی و هنرهای تزئینی:**

نسبت‌های ریاضی در طراحی خطوط و فاصله بین حروف، به‌ویژه در کتابت قرآن کریم و کتاب‌های علمی، مورد استفاده قرار گرفتند. بهره‌گیری از نسبت طلایی و تقسیمات هندسی در تزئینات، پیوندی عمیق میان هنر و ریاضیات ایجاد کردند که این نشان‌دهنده توجه هنرمندان اسلامی به نظم و هارمونی بوده است.

به عنوان نمونه در ایوان‌ها و محراب‌های مسجد امام اصفهان، اگر به نقوش کاشی‌کاری دقت کنیم، می‌بینیم بسیاری از طرح‌ها از چندضلعی‌های منتظم و ستاره‌های ۸، ۱۰، ۱۲ و ۱۴ پر ساخته شده‌اند. این چندضلعی‌ها با تقسیمات دقیق دایره طراحی شده‌اند، که خودشان نسبت‌های خاصی مثل ریشه‌ی ۲، ریشه‌ی ۳ و نزدیک به نسبت طلایی تولید می‌کنند. به‌ویژه در گنبد مسجد امام، نسبت قطر دهانه‌ی گنبد به ارتفاع آن نزدیک به نسبت طلایی است. همین امر باعث شده که گنبد هم از بیرون شکوه داشته باشد و هم از داخل هماهنگ و زیبا به نظر برسد.

**توسعه تفکر علمی و فلسفی:**

ریاضیات باعث رشد روش‌های تحلیلی و منطقی در فلسفه و علوم طبیعی شد و ابزار تحلیل دقیق روابط علت و معلول را فراهم آورد. دانشمندانی مانند ابن سینا و فارابی از اصول ریاضی برای تحلیل منطقی و فلسفی استفاده می‌کردند، که این امر به شکل‌گیری تفکر علمی منظم در جهان اسلام کمک کرد.

این پیوند میان ریاضیات، هنر و فلسفه، نشان‌دهنده نقش گسترده علم در زندگی فرهنگی و فکری مسلمانان و استمرار اثرات آن در میراث علمی و هنری جهان امروز می‌باشد. بنابراین در تمدن اسلامی، علم تنها ابزار محاسباتی نبود بلکه به هنر و فلسفه جان تازه‌ای بخشید و تأثیری پایدار بر فرهنگ و دانش جهانی گذاشت.

#### ۶. میراث ریاضیات اسلامی در علوم جدید

تأثیر ریاضیات اسلامی نه تنها در تاریخ، بلکه در علوم و فناوری‌های مدرن نیز مشهود است. دستاوردهای ریاضی و الگوریتمی دانشمندان مسلمان، پایه‌های بسیاری از علوم امروز را شکل داده‌اند که می‌توان به نمونه‌های زیر اشاره کرد:

**علوم کامپیوتر و الگوریتم‌ها:**

الگوریتم‌های خوارزمی و روش‌های محاسباتی او، پایه‌ای برای طراحی الگوریتم‌های رایانه‌ای و پردازش داده‌ها شدند. معرفی مفهوم صفر و سیستم عددی هندی-عربی، امکان طراحی ساختار داده‌ها و انجام عملیات ریاضی در کامپیوترها را فراهم کرد و انقلاب دیجیتال را تسهیل نمود [11].

**ریاضیات کاربردی و مهندسی:**

جداول مثلثاتی و روش‌های عددی دانشمند بزرگ؛ غیاث الدین جمشید کاشانی، الگویی برای تحلیل عددی در مهندسی، شبیه‌سازی‌های علمی و طراحی سیستم‌های پیچیده فراهم کردند. این دستاوردها پایه‌ای برای توسعه روش‌های محاسباتی پیشرفته در علوم مهندسی و فناوری مدرن شدند.

#### فیزیک و اپتیک:

روش تجربی ابن هیثم در مطالعه نور و اپتیک، اساس علوم تجربی و فیزیک مدرن شد. تحقیقات او در خصوص نور، بینایی و انعکاس، پایه‌ای برای توسعه لنزها، ابزارهای اپتیکی و فناوری‌های بینایی در دوران مدرن گردید [6, 12].

#### مهندسی و معماری:

الگوهای هندسی و تقارن ریاضی در معماری اسلامی، الهام‌بخش طراحی‌های نوین و معماری دیجیتال شدند. الگوریتم‌های طراحی مبتنی بر ریاضیات، در مدل‌سازی سه‌بعدی، کامپیوتر گرافیک و طراحی پیشرفته ساختمان‌ها کاربرد دارند و نشان‌دهنده پیوند ماندگار ریاضیات و هنر است [8].

این میراث، گواهی صادق بر پایداری و گستردگی تأثیر ریاضیات اسلامی از نظریه و محاسبات تا فناوری‌های مدرن و هنر می‌باشد.

## ۷. نتیجه‌گیری

ریاضیات اسلامی نه تنها پایه‌های علمی و فناوری دوران خود را مستحکم کرد، بلکه با تلفیق اندیشه‌های نظری و کاربردی، تأثیری بسیار عمیق و ماندگار در تاریخ علم جهان برجای گذاشت. دستاوردهای ریاضی‌دانان مسلمان در جبر، نجوم، هندسه و الگوریتم‌ها، علاوه بر خدمت به تمدن اسلامی، موجب شکوفایی علمی در اروپا و شکل‌گیری علوم مدرن شدند. این میراث علمی، فرهنگی و هنری، همچنان منبع الهام برای پیشرفت‌های جدید در علوم و فناوری‌های معاصر است و اهمیت توجه و بازشناسی آن در تاریخ علم را دوچندان می‌کند.

## سیاسگزاری

از داوران محترم به خاطر راهنمایی‌های ارزشمند در جهت اصلاح مقاله صمیمانه تشکر می‌کنیم.

## منابع

۱. بوزجانی‌نامه: شرح احوال و آثار ریاضی ابوالوفا بوزجانی، تهران: انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۱.
۲. دانشنامه جهان اسلام، ساعت‌های آبی و مکانیکی در تمدن اسلامی، تهران، مرکز دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ۱۳۷۸.
۳. ف. سعادت‌مند، تاریخ ریاضیات دوره اسلامی: نقش ابزاری «شعر» در آموزش حساب هندی، مجله به سوی علوم ریاضی، ۳(۱)، ۲۲-۴۳، ۱۴۰۲.
۴. ف. میرزایی، بررسی تاریخ ریاضیات در دوره اسلامی و نقش اضطراب بر یادگیری این درس، اولین کنفرانس بین‌المللی پژوهش‌های مدیریت، تعلیم و تربیت در آموزش و پرورش، تهران، ۱۴۰۲.
۵. نقش خواجه نصیرالدین طوسی در توسعه ریاضیات و نجوم، مجله تاریخ علم، ۳۱(۲)، ۲۳-۳۹، ۱۳۹۵.
۶. ح. معصومی، بنیان‌گذاری علم جبر در دوره اسلامی، دوفصلنامه فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۱(۲)، ۱۴۰۱.
۷. نورمگز. اسطرلاب در تمدن اسلامی: کاربرد در نجوم و قبله‌یابی. تهران: مجله تاریخ و تمدن اسلامی، شماره ۲۳، ۱۳۸۵.

8. Berggren, J. L. (2003) Mathematics in medieval Islam, Encyclopedia of the History of Arabic Science.
9. Garrison, D. H. (2012) Ibn Khaldun and the Modern Social Sciences: A Comparative Theoretical Inquiry into Society, the State, and Revolution. PhD Thesis, University of Denver.
10. Katz, V. J. (2009). A history of mathematics: An introduction. Addison-Wesley.
11. Rashed, R. (1994). The development of Arabic mathematics Between Arithmetic and Algebra. Springer.
12. Sabra, A. I. The Optics of Ibn al-Haytham: Books I-III on Direct Vision. University of Chicago Press, 1989.

## آنالیز مدل های ریاضی پویایی تراکم جمعیتی در مباحث مربوط به برنامه ریزی شهری از گذشته تا به امروز

دکتر رضا لحمیان

(دانشیار، عضو هیئت علمی گروه جغرافیا، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران)

[r\\_lahmian@pnu.ac.ir](mailto:r_lahmian@pnu.ac.ir)

دکتر مارال فیروزمند

(فارغ التحصیل دکتری جغرافیا و برنامه ریزی شهری)

### چکیده:

عدم ارتباط ملموس بین علوم ریاضیات و علوم مدیریت شهری، باعث ناکارآمدی برنامه ریزی های توسعه شهری و اتلاف هزینه، زمان و سرمایه های زیادی شده است. مدل های ریاضی در این زمینه، ابزارهایی حیاتی برای درک، تحلیل و پیش بینی مسائل مدیریت شهری هستند. این مدل ها به برنامه ریزان شهری اجازه می دهند تا به جای تصمیم گیری های مقطعی، بر اساس کمیت های و مدل های ریاضی، سیاست های مناسبی را برای دستیابی به کیفیت زندگی شهری اتخاذ کنند. در این پژوهش، به بررسی اقسام مدل های ریاضی پویایی تراکم جمعیتی در مناطق شهری پرداخته می شود و کارایی هر کدام از این مدل ها، مزایا و معایب، بررسی و اولویت بندی می شود. این تحقیق از لحاظ ماهیت و روش، توصیفی-تحلیلی با هدف کاربردی به روش کتابخانه ای و اسنادی است. از نتایج این پژوهش، استفاده موثر متخصصان حوزه شهری از مدل های ریاضی در تصمیم گیری مباحث برنامه ریزی شهری است تا کمترین نارسایی ها پیش آید که نتیجه آن مدیریت بهینه در سطح شهر و منطقه است و بازخورد آن ارتقای سیستم های شهری و رضایتمندی شهروندان خواهد بود.

**واژگان کلیدی:** مدل های ریاضی، پویایی تراکم جمعیتی، برنامه ریزی شهری و منطقه ای

### مقدمه:

ریاضیات به عنوان یک زبان دقیق و ابزار قدرتمند، نقشی اساسی و حیاتی در علوم مدیریت شهری ایفا می کند. علوم شهری، سیستمی پیچیده و چندوجهی است که شامل مدیریت جمعیت، زیرساخت ها، منابع، خدمات و اقتصاد است. ریاضیات در تمام این جنبه ها به برنامه ریزان و مدیران شهری کمک می کند تا به صورت داده محور و علمی تصمیم گیری کنند. از آنجایی که شهر یک پدیده پیچیده و بسیار بزرگ است، سرمایه گذاری های کلانی هم در بخش های مختلف آن اجرا می شود. این شاخه از ریاضیات برای درک، تحلیل و پیش بینی روندهای شهری به کار می رود. مهمترین کاربرد آن جلوگیری از اتلاف سرمایه های مالی، زمانی و مکانی در بعد کلان است. کاربرد ریاضیات در علوم مدیریت شهری بر اساس شاخه های مختلف شکل می گیرد. ساده ترین و اولین مورد آن مبحث آمار و احتمال کاربردی است. استفاده از مدل های ریاضی در مدیریت و برنامه ریزی شهری پدیده ای کاملاً جدید نیست، اما تکامل و پیچیدگی آن در طول زمان بسیار چشمگیر بوده است. این کاربردها ریشه در تلاش بشر برای درک، پیش بینی و کنترل محیط های شهری خود دارند. در ادامه پیشینه ای از کاربرد مدل های ریاضی در مباحث مدیریت شهری ارائه می شود.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول



## ۱. ریشه‌های اولیه و دوران کلاسیک (اواخر قرن ۱۹ تا اواسط قرن ۲۰):

• نقشه‌برداری و آمار شهرهای اولیه: حتی پیش از اینکه "مدل ریاضی" به معنای امروزی آن شناخته شود، نقشه‌برداران و آماردانان شهری اولیه با جمع‌آوری داده‌ها (مانند جمعیت، بیماری‌ها، کاربری زمین) و نمایش آن‌ها به صورت نمودار و نقشه، سنگ بنای تحلیل‌های کمی را گذاشتند. این‌ها پایه‌های اولیه برای درک توزیع فضایی و شناسایی الگوها بودند (علیجانی، ۱۳۹۸).

• جغرافیای کمی و اکولوژی شهری شیکاگو: در اوایل قرن بیستم، مکتب اکولوژی شهری شیکاگو (با افرادی مانند ارنست برگس و رابرت پارک) الگوهای فضایی شهر را بر اساس اصول اکولوژیکی توضیح دادند (مانند مدل نواحی هم‌مرکز برگس). اگرچه مستقیماً ریاضی نبودند، اما مفاهیم آن‌ها (مانند شیب تراکم) بعدها به مدل‌های ریاضی تبدیل شدند.

### ❖ مزایا:

۱) افزایش کارایی و بهره‌وری: مدل‌ها به تصمیم‌گیری‌های منطقی‌تر و علمی‌تر کمک کردند و منجر به افزایش بازدهی در پروژه‌های زیربنایی مانند شبکه‌های حمل‌ونقل و توزیع منابع شدند. ۲) کاهش ابهام در تصمیم‌گیری: با استفاده از داده‌های عددی، تصمیم‌گیری‌ها کمتر بر پایه حدس و گمان و بیشتر بر اساس محاسبات انجام می‌شد. ۳) سادگی و قابل فهم بودن: مدل‌های این دوره نسبتاً ساده بودند و اجرای آن‌ها به دانش تخصصی پیچیده‌ای نیاز نداشت.

### ❖ معایب:

۱) نادیده گرفتن پیچیدگی‌های شهری: این مدل‌ها شهر را به عنوان یک سیستم مکانیکی ساده می‌دیدند و عوامل اجتماعی، فرهنگی، و انسانی را نادیده می‌گرفتند. انسان‌ها در این مدل‌ها به مثابه روبات‌هایی بودند که رفتارهایشان قابل پیش‌بینی است. ۲) نعطاف‌ناپذیری: رویکردی از بالا به پایین (Top-Down) داشتند و امکان انعطاف‌پذیری و خلاقیت را از بین می‌بردند. ۳) کمبود داده و قدرت محاسباتی: در آن زمان، جمع‌آوری داده‌های دقیق و تحلیل آن‌ها با توجه به محدودیت‌های تکنولوژی کامپیوتری، بسیار دشوار بود.

## ۲. انقلاب کمی و دوران طلایی مدل‌سازی (دهه‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۷۰):

این دوران را می‌توان "عصر طلایی" مدل‌سازی شهری دانست. با توسعه کامپیوترها و پیشرفت در علم آمار و تحقیق در عملیات (Operations Research)، مدل‌های ریاضی به ابزاری قدرتمند برای برنامه‌ریزان شهری تبدیل شدند.

• مدل‌های مکان‌یابی و تخصیص: (Location-Allocation Models) یکی از اولین و تأثیرگذارترین کاربردها، مدل‌های بهینه‌سازی برای مکان‌یابی تأسیسات عمومی (مدارس، بیمارستان‌ها، ایستگاه‌های آتش‌نشانی) و تخصیص منابع به آن‌ها بود. هدف، حداقل کردن فاصله سفر یا حداکثر کردن پوشش جمعیتی بود.

• مدل‌های حمل‌ونقل چهار مرحله‌ای: (Four-Step Transportation Models) این مدل‌ها برای پیش‌بینی جریان‌های ترافیکی و برنامه‌ریزی زیرساخت‌های حمل‌ونقل شهری توسعه یافتند.

• مدل‌های کاربری زمین - حمل‌ونقل: (Land Use-Transportation Models) محققانی مانند آلن ویلسون (با توسعه مدل‌های آنتروپی) تلاش کردند تا رابطه متقابل بین کاربری زمین و سیستم حمل‌ونقل را مدل‌سازی کنند.

• مدل‌های رشد شهری: (Urban Growth Models) اولین تلاش‌ها برای مدل‌سازی دینامیک رشد شهری و گسترش فضایی شهرها نیز در این دوره آغاز شد (محمدپور، ۱۳۹۷).

### ❖ مزایا:

۱) توانایی مدل‌سازی مسائل پیچیده‌تر: با افزایش قدرت محاسباتی، مدل‌ها توانستند عوامل بیشتری را در نظر بگیرند و به مسائل پیچیده‌تری مانند برنامه‌ریزی حمل‌ونقل در مقیاس بزرگ بپردازند. ۲) رویکرد سیستمی: شهر به

عنوان یک سیستم پیچیده با اجزای مرتبط به هم در نظر گرفته شد. (۳) پیش‌بینی و تحلیل سناریوها: مدل‌ها امکان پیش‌بینی پیامدهای بلندمدت سیاست‌های مختلف شهری را فراهم کردند و به برنامه‌ریزان اجازه دادند تا سناریوهای مختلف را ارزیابی کنند.

#### ❖ معایب:

(۱) فرض‌های ساده‌انگارانه: با وجود پیچیدگی بیشتر، مدل‌ها هنوز بر اساس فرض‌های ساده‌ای مانند رفتار عقلانی و اقتصادی انسان‌ها ساخته شده بودند که اغلب با واقعیت‌های اجتماعی مطابقت نداشت. (۲) عدم درک رفتار انسانی: این مدل‌ها به جای درک رفتار واقعی مردم، بر روی قوانین و فرمول‌های ریاضی تمرکز داشتند. (۳) پروژه‌های بسیار بزرگ و هزینه‌بر: توسعه و اجرای این مدل‌ها به پروژه‌های بزرگ و پرهزینه تبدیل شد که اغلب نتایج عملی و قابل قبولی نداشت. (۴) داده‌های ناکافی: با وجود افزایش داده‌ها، هنوز حجم و کیفیت آن‌ها برای تغذیه مدل‌های پیچیده کافی نبود.

#### ۳. دوران نقد، اصلاح و پیچیدگی (دهه‌های ۱۹۸۰ تا اوایل ۲۰۰۰):

با وجود هیجان اولیه، مدل‌های اولیه ریاضیات شهری با انتقاداتی نیز روبرو شدند. پیچیدگی و دسترسی به داده‌های مورد نیاز، فرض عقلانیت کامل (Perfect Rationality)، عدم درک تغییرات ناگهانی و ... این انتقادات منجر به توسعه مدل‌های کاربردی‌تر، ادغام با سیستم‌های اطلاعات جغرافیایی (GIS) به ابزاری حیاتی برای جمع‌آوری، مدیریت و بصری‌سازی داده‌های مکانی تبدیل شد که قابلیت‌های مدل‌سازی را به شدت افزایش داد (کلانتری، ۱۳۹۳).

#### ❖ مزایا:

(۱) توجه به عوامل کیفی: مدل‌سازان به اهمیت عوامل اجتماعی، فرهنگی، و ذهنی مانند "کیفیت زندگی" و "عدالت اجتماعی" پی بردند. (۲) افزایش مشارکت شهروندان: در این دوره، تلاش شد تا مدل‌سازی تنها ابزاری در دست متخصصان نباشد و شهروندان نیز در فرایند برنامه‌ریزی دخیل شوند. (۳) مدل‌های ترکیبی: رویکردهای ترکیبی که هم از مدل‌های کمی و هم از تحلیل‌های کیفی استفاده می‌کردند، توسعه یافتند. (۴) انتقال به مدل‌های خرد-Agent Based Models): به جای مدل‌های کلان که کل شهر را یکپارچه تحلیل می‌کردند، مدل‌های خرد که بر رفتار عوامل فردی (مانند افراد، خانواده‌ها و کسب‌وکارها) تمرکز داشتند، مورد توجه قرار گرفتند.

#### ❖ معایب:

(۱) کاهش اعتماد به مدل‌سازی: به دلیل انتقادات شدید، برخی از متخصصان از مدل‌سازی فاصله گرفتند. (۲) پیچیدگی فزاینده: مدل‌های جدید (مانند مدل‌های عامل‌محور) بسیار پیچیده‌تر شدند و نیاز به دانش تخصصی بیشتری داشتند. (۳) تکه‌تکه شدن دانش: به دلیل تمرکز بر رویکردهای کیفی و مدل‌های خاص، هماهنگی بین مدل‌ها و سیستم‌های مختلف شهری دشوار شد.

#### ۴. عصر جدید: مدل‌سازی پیشرفته و رویکردهای نوین (اواخر دهه ۲۰۰۰ تا امروز):

با قدرت محاسباتی فزاینده، داده‌های بزرگ (Big Data)، پیشرفت در علوم کامپیوتر و هوش مصنوعی، مدل‌سازی شهری وارد مرحله جدیدی شده است (Batty, 2010):

- **مدل‌های مبتنی بر عامل (Agent-Based Models - ABM):** این مدل‌ها که پیشتر اشاره شد، با شبیه‌سازی رفتار عوامل منفرد (افراد، خانوارها، شرکت‌ها) و تعاملات آن‌ها، به درک الگوهای پیچیده‌تر و نوظهور شهری کمک می‌کنند. این رویکرد به دلیل توانایی‌اش در انعکاس رفتار غیرخطی و ناهمگونی عوامل، بسیار محبوب شده است.
- **مدل‌های خودکار سلولی (Cellular Automata):** برای مدل‌سازی رشد شهری در مقیاس‌های فضایی بزرگ.
- **استفاده از هوش مصنوعی و یادگیری ماشین (Machine Learning & AI):** الگوریتم‌های یادگیری ماشین برای تحلیل حجم عظیمی از داده‌های شهری (مانند داده‌های سنسورها، رسانه‌های اجتماعی، داده‌های تلفن همراه) و

- شناسایی الگوهای پیچیده‌ای که با مدل‌های سنتی قابل کشف نیستند، استفاده می‌شوند. این شامل پیش‌بینی تقاضای حمل‌ونقل، الگوهای جرم و جنایت، و توزیع خدمات می‌شود (McLoughlin, 2007)
- **مدل‌های شبکه‌ای (Network Models):** تحلیل شبکه‌های حمل‌ونقل، شبکه‌های اجتماعی و شبکه‌های زیرساختی برای درک چگونگی جریان اطلاعات، افراد و منابع در شهر.
  - **پلتفرم‌های مدل‌سازی یکپارچه (Integrated Modeling Platforms):** تلاش برای ایجاد پلتفرم‌هایی که مدل‌های مختلف (کاربری زمین، حمل‌ونقل، انرژی، محیط زیست) را با هم ترکیب کنند تا تصویری جامع‌تر از سیستم شهری ارائه دهند (مثلاً مدل‌های UrbanSim یا ILUTE).
  - **مدل‌های ریسک و تاب‌آوری (Risk and Resilience Models):** با توجه به تغییرات آب و هوایی و بلایای طبیعی، مدل‌های ریاضی برای ارزیابی آسیب‌پذیری شهرها و برنامه‌ریزی برای افزایش تاب‌آوری آن‌ها اهمیت فزاینده‌ای یافته‌اند.

#### ❖ مزایا:

۱) استفاده از داده‌های لحظه‌ای و دقیق: داده‌های لحظه‌ای از سنسورها، تلفن‌های همراه و شبکه‌های اجتماعی، مدل‌ها را قادر ساخت تا با واقعیت‌های متغیر شهری هماهنگ شوند. ۲) مدل‌های پیشرفته‌تر و دقیق‌تر: استفاده از الگوریتم‌های یادگیری ماشین و هوش مصنوعی امکان پیش‌بینی‌های دقیق‌تری را فراهم کرده است. ۳) تعامل بهتر با شهروندان: مدل‌ها به ابزارهایی برای اطلاع‌رسانی و تعامل مستقیم با شهروندان تبدیل شده‌اند (مانند اپلیکیشن‌های حمل‌ونقل عمومی یا مدیریت پسماند). ۴) رویکردهای غیرخطی و واقع‌بینانه: مدل‌های جدید رفتار غیرخطی و پیچیده سیستم‌های شهری را بهتر درک می‌کنند.

#### ❖ معایب:

۱) چالش‌های حریم خصوصی: جمع‌آوری حجم عظیمی از داده‌های شخصی، نگرانی‌های جدی در مورد حریم خصوصی و امنیت ایجاد کرده است. ۲) شکاف دیجیتال: دسترسی نابرابر به فناوری‌های هوشمند می‌تواند نابرابری‌های موجود در جامعه را تشدید کند. ۳) هزینه‌های بالا: توسعه و نگهداری زیرساخت‌های لازم برای شهرهای هوشمند و مدل‌های پیچیده بسیار گران است. ۴) وابستگی به تکنولوژی: وابستگی بیش از حد به مدل‌ها و تکنولوژی‌های پیشرفته می‌تواند در صورت بروز خطا یا حملات سایبری، سیستم‌های شهری را آسیب‌پذیر کند.

#### نتیجه‌گیری:

تاریخچه کاربرد مدل‌های ریاضی در مدیریت شهری و تحلیل مزایا و معایب آنها در هر دوره، به ما کمک می‌کند تا تکامل این رشته و چالش‌های آن را بهتر درک کنیم. از مدل‌های ساده خطی تا سیستم‌های شبیه‌سازی مبتنی بر عامل با هوش مصنوعی، هدف همواره یکسان بوده است: کمک به مدیران و برنامه‌ریزان شهری برای تصمیم‌گیری‌های آگاهانه‌تر به منظور ایجاد شهرهایی کارآمدتر، پایدارتر و با کیفیت زندگی بهتر است.

#### منابع:

1. علیجانی. بهلول (۱۳۹۸). روش‌شناسی کمی در جغرافیا. چاپ اول. انتشارات سمت
2. کلانتری. خلیل (۱۳۹۳). مدل‌های کمی در برنامه‌ریزی (منطقه‌ای، شهری و روستایی). انتشارات فرهنگ صبا
3. محمدپور. نغمه (۱۳۹۷). مروری بر مدل‌های کمی و کیفی پیشرفته در شهرسازی. انتشارات سیمای دانش
4. J. B. McLoughlin. (2007). "Urban Models in Planning: An Introduction to the Theory and Practice of Urban Modelling". University of Coimbra
5. Michael Batty. (2010). "Cities and Complexity: Towards an Evolutionary Understanding of Cities as Complex Systems". The MIT Press.

# کاربرد رتبه بندی اعداد فازی برای حل مسئله تجزیه ریسک فازی

پریسا اسدی<sup>۱\*</sup>، دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ارومیه

رحیم صانعی فرد<sup>۲</sup>، گروه آموزشی ریاضی کاربردی، دانشیار، عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد ارومیه

چکیده:

رتبه بندی اعداد فازی به عنوان یکی از موضوعات کلیدی در محیط های تصمیم گیری با عدم قطعیت شناخته می شود. در این پژوهش، روشی نوین مبتنی بر مقدار نماینده در قاعده اصلی ارائه شده است که می تواند محدودیت های روش های پیشین را برطرف سازد. در این روش، ابتدا اعداد فازی عمومی به اعداد فازی ذوزنقه ای استاندارد تبدیل شده، سپس مرکز هندسی و مساحت آن ها محاسبه می شود. بر اساس این دو شاخص، مقدار نماینده هر عدد فازی تعیین شده و رتبه بندی نهایی به دست می آید. ویژگی برجسته روش پیشنهادی، تفسیرپذیری ساده و لحاظ کردن ترجیحات تصمیم گیرندگان در شرایط مختلف است؛ به گونه ای که برای اعداد با مراکز نزدیک به سمت چپ، مساحت بیشتر ترجیح داده می شود و برای مراکز نزدیک به سمت راست، قطعیت و مرکز بزرگ تر اهمیت می یابد. نتایج مثال های عددی نشان داد که روش پیشنهادی علاوه بر اعداد فازی معمولی، قادر است اعداد خاص نظیر اعداد قطعی، اعداد با ارتفاع های متفاوت و اعداد ذوزنقه ای توسعه یافته را نیز رتبه بندی کند. همچنین مقایسه با روش های موجود بیانگر منطق پذیری و رفع نارسایی های آنهاست. در نهایت، کاربرد روش پیشنهادی در تجزیه ریسک فازی بررسی شد و نشان داده شد که می تواند در شناسایی و اولویت بندی ریسک های مؤلفه های تولیدی بسیار مؤثر باشد.

واژگان کلیدی: کلیدواژه ها: رتبه بندی اعداد فازی، مقدار نماینده، قاعده اصلی، سیستم فازی TSK، تحلیل ریسک

## ۱- مقدمه

مسئله رتبه بندی اعداد فازی از دهه ۱۹۸۰ میلادی مورد توجه قرار گرفت. نخستین تلاش ها در این حوزه بر مبنای شاخص های ساده ای همچون نقطه مرکزی یا فاصله از مبدأ انجام شد. روش یاگر<sup>۱</sup> با تکیه بر موقعیت نقطه مرکزی عدد فازی روی محور افقی، یکی از نخستین رویکردهای رسمی محسوب می شود. پس از آن، روش های دیگری نظیر روش چنگ<sup>۲</sup> بر اساس فاصله، و روش چو-تسائو<sup>۳</sup> بر پایه مساحت توسعه یافتند. [1] یکی از موضوعات محوری در تحلیل های فازی، مسئله رتبه بندی اعداد فازی است. از زمان معرفی اولین روش ها توسط «جین» و «یاگر»،

<sup>1</sup> Yager

<sup>2</sup> Cheng

<sup>3</sup> Chu-Tsao

پژوهشگران متعددی تلاش کرده‌اند راهکارهایی برای مقایسه و رتبه‌بندی اعداد فازی ارائه دهند. این روش‌ها اغلب بر شاخص‌هایی چون نقطه مرکزی، فاصله تا مبدأ، مساحت، یا روابط ترجیحی مبتنی هستند [2]. با وجود این، استفاده از شاخص‌های تک‌بعدی نمی‌تواند در همه شرایط پاسخگو باشد؛ به‌ویژه در مواردی که اعداد فازی دارای مراکز یکسان یا ارتفاع‌های متفاوت باشند. به‌منظور رفع این چالش‌ها، در این مقاله یک روش نوین رتبه‌بندی مبتنی بر مقدار نماینده قاعده اصلی توسعه‌یافته معرفی می‌شود. این روش با استفاده از مدل فازی TSK و ترکیب دو عامل کلیدی یعنی مرکز و مساحت اعداد فازی، امکان تفسیر بهتر نتایج را برای تصمیم‌گیرندگان فراهم می‌آورد. افزون بر آن، پیچیدگی محاسباتی کاهش یافته و کارایی روش در مثال‌های عددی و یک کاربرد عملی در تحلیل ریسک سیستم‌های هوشمند نشان داده می‌شود.

## ۲- روش پژوهش

برای حل مسئله تجزیه و تحلیل ریسک در محیط فازی، پژوهش حاضر از رویکرد رتبه‌بندی اعداد فازی با استفاده از مقدار نماینده بهره‌گرفته است. در این بخش مراحل و گام‌های روش پژوهش به تفصیل بیان می‌شود.

### - مدل‌سازی ریسک در محیط فازی

در گام نخست، ریسک‌های پروژه یا سیستم مورد مطالعه شناسایی شده و معیارهای اصلی آن‌ها مانند احتمال وقوع (Likelihood) و شدت اثر (Severity) تعریف می‌شوند [3]. از آنجا که قضاوت خبرگان معمولاً به صورت زبانی (مانند: زیاد، متوسط، کم) است، این ارزیابی‌ها به اعداد فازی ذوزنقه‌ای تبدیل می‌شوند.

### - محاسبه مقدار نماینده اعداد فازی

برای امکان مقایسه و رتبه‌بندی اعداد فازی، از فرمول مقدار نماینده استفاده می‌شود. مقدار نماینده یک عدد فازی ذوزنقه‌ای  $A = (a_1, a_2, a_3, a_4; h)$  به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$h \times \frac{4a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4}{6} = (A) \text{Rep}$$

که در آن  $a_1, a_2, a_3, a_4$  نقاط مرزی عدد فازی و  $h$  ارتفاع آن است. این مقدار به عنوان یک عدد حقیقی عمل کرده و مبنای رتبه‌بندی ریسک‌ها قرار می‌گیرد.

### - محاسبه شاخص ریسک فازی (FRPN)

برای هر ریسک، شاخص عددی (FRPN (Fuzzy Risk Priority Number) از ترکیب احتمال و شدت اثر محاسبه می‌شود:

$$FRPN = Rep(L) \times Rep(S)$$

که در آن Rep(L) مقدار نماینده احتمال وقوع و Rep(S) مقدار نماینده شدت اثر است.

### - رتبه‌بندی ریسک‌ها

پس از محاسبه مقدار FRPN برای تمام ریسک‌ها، رتبه‌بندی انجام می‌شود. ریسکی که دارای بالاترین مقدار FRPN باشد به‌عنوان مهم‌ترین ریسک شناخته می‌شود. این رتبه‌بندی می‌تواند مبنایی برای تصمیم‌گیری در اولویت‌بندی اقدامات کنترلی و تخصیص منابع باشد.

### ۳- یافته‌ها

در این بخش، نتایج حاصل از اجرای روش پیشنهادی رتبه‌بندی اعداد فازی بر اساس مقدار نماینده قاعده اصلی و کاربرد آن در تجزیه ریسک فازی ارائه می‌شود. هدف از این مرحله بررسی کارایی روش پیشنهادی در رتبه‌بندی مؤثر و منطقی اعداد فازی و همچنین تحلیل ریسک محصولات تولیدکنندگان مختلف است.

### - رتبه‌بندی اعداد فازی

با استفاده از روش پیشنهادی، ابتدا اعداد فازی مربوط به شاخص‌های ریسک و احتمال خرابی هر مؤلفه استانداردسازی شدند. سپس مرکز هر عدد فازی و مساحت آن محاسبه و مقدار نماینده قاعده اصلی برای هر عدد فازی به دست آمد.

نتایج نشان می‌دهد که:

اعداد فازی با مرکز بیشتر و مساحت کمتر، نمایانگر ریسک بالاتر هستند و رتبه بالاتری دریافت کردند.  
 اعداد فازی با مرکز کمتر و مساحت بیشتر، نمایانگر فرصت‌های بیشتر یا عدم قطعیت بیشتر هستند و رتبه پایین‌تری دارند.

این روش قادر است حتی در شرایطی که اعداد فازی دارای ارتفاع‌های چپ و راست متفاوت هستند، رتبه‌بندی منطقی ارائه دهد.

### - تجزیه ریسک فازی

برای مثال کاربردی، سه تولیدکننده با محصولاتش شامل چند زیرمؤلفه مورد بررسی قرار گرفتند. برای هر زیرمؤلفه، احتمال خرابی و شدت خسارت به صورت اعداد فازی تعریف شد. مراحل انجام تجزیه ریسک شامل موارد زیر بود:

تجمع ارزیابی‌ها: با استفاده از عملیات حسابی اعداد فازی توسعه یافته، مقادیر احتمال خرابی هر زیرمؤلفه به دست آمد.

استانداردسازی اعداد فازی: اعداد فازی حاصل به فرم ذوزنقه‌ای استاندارد تبدیل شدند تا قابلیت رتبه‌بندی داشته باشند.

محاسبه مرکز و مساحت: برای هر عدد فازی، مختصات مرکزی و مساحت محاسبه شد.

محاسبه مقدار نماینده: با استفاده از مدل TSK و قواعد اصلی، مقدار نماینده برای هر عدد فازی تعیین شد.

رتبه‌بندی مؤلفه‌ها: با مقایسه مقادیر نماینده، مؤلفه‌ها از بیشترین به کمترین ریسک رتبه‌بندی شدند.

نتایج نشان دادند که:

مؤلفه‌های تولیدکننده با بیشترین مقدار نماینده، بیشترین احتمال خرابی را دارند و باید در اولویت بررسی قرار گیرند. این روش امکان مقایسه دقیق و منطقی مؤلفه‌ها را فراهم می‌کند و تصمیم‌گیری در انتخاب تولیدکننده یا مدیریت ریسک را بهبود می‌بخشد.

روش پیشنهادی توانایی مدیریت اعداد فازی با شرایط مختلف (مثل ارتفاع‌های متفاوت و مساحت‌های گوناگون) را دارا است و با شهود انسانی در تطابق است

### جدول ۳-۱: مقادیر نماینده و رتبه ریسک مؤلفه‌ها بر اساس اعداد فازی

| رتبه ریسک | مقدار نماینده | مساحت عدد فازی | مرکز عدد فازی | عدد فازی (ذوزنقه‌ای) | مؤلفه/زیرمؤلفه |
|-----------|---------------|----------------|---------------|----------------------|----------------|
| 2         | 0.56          | 0.24           | 0.5           | (0.2, 0.4, 0.6, 0.8) | A1             |
| 3         | 0.45          | 0.24           | 0.4           | (0.1, 0.3, 0.5, 0.7) | A2             |
| 1         | 0.78          | 0.20           | 0.7           | (0.5, 0.6, 0.8, 0.9) | A3             |
| 4         | 0.42          | 0.16           | 0.4           | (0.2, 0.3, 0.5, 0.6) | A4             |

ستون "مقدار نماینده" بر اساس ترکیب مرکز و مساحت عدد فازی محاسبه شده و برای رتبه‌بندی استفاده شده است. عدد بزرگ‌تر نمایانگر ریسک بالاتر است.

### – مقایسه با روش‌های موجود

با مقایسه نتایج روش پیشنهادی با روش‌های سنتی رتبه‌بندی اعداد فازی، مشخص شد که:

روش‌های سنتی در مواجهه با اعداد فازی با ارتفاع‌های متفاوت یا مراکز نزدیک به سمت چپ، نتایج غیرمنطقی ارائه می‌دهند.

روش پیشنهادی علاوه بر دقت بالاتر، شفافیت و تفسیرپذیری بهتری دارد و ترجیحات تصمیم‌گیرندگان نسبت به اعداد فازی را لحاظ می‌کند.

در مجموع، یافته‌ها نشان می‌دهند که روش رتبه‌بندی اعداد فازی مبتنی بر مقدار نماینده قاعده اصلی، ابزاری کارآمد و قابل اعتماد برای تحلیل ریسک فازی و تصمیم‌گیری چندمعیاره است.

## ۴- نتایج

در این مقاله کاربرد رتبه‌بندی اعداد فازی برای تجزیه و تحلیل ریسک فازی بررسی شد. روش پیشنهادی با معرفی یک قاعده اصلی برای محاسبه مقدار نماینده، ریسک‌های فازی را به مقادیر حقیقی تبدیل و امکان رتبه‌بندی آن‌ها را فراهم ساخت. نتایج مطالعه موردی نشان داد که این روش قابلیت شناسایی دقیق‌تر ریسک‌های بحرانی را دارد و محدودیت‌های روش‌های موجود را برطرف کند و برای طیف وسیعی از اعداد فازی (معمولی، ذوزنقه‌ای، مثلثی، قطعی و با ارتفاع متفاوت) نتایج منطقی و سازگار ارائه دهد. این روش بر پایه دو شاخص ساده و قابل فهم یعنی مرکز هندسی و مساحت طراحی شده است. همین امر باعث شده نتایج رتبه‌بندی هم با استدلال انسانی سازگار باشد و هم محاسبات پیچیده‌ای نداشته باشد. برخلاف بسیاری از روش‌های پیشین، در این روش ترجیحات تصمیم‌گیرندگان به‌طور مستقیم وارد فرآیند رتبه‌بندی می‌شود؛ به این معنا که برای مراکز نزدیک به چپ، مساحت بیشتر اهمیت دارد و برای مراکز نزدیک به راست، قطعیت و مرکز بزرگ‌تر ترجیح داده می‌شود. بررسی‌ها نشان داد که برخی روش‌های موجود در مواردی نتایج غیرمنطقی یا غیرقابل تفکیک ارائه می‌دهند؛ در حالی که روش پیشنهادی توانست رتبه‌بندی روشن و منطقی ایجاد کند. استفاده از روش پیشنهادی در یک مطالعه موردی نشان داد که می‌تواند به‌خوبی در شناسایی و اولویت‌بندی ریسک‌های تولیدی کمک کند و ابزاری عملی برای تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت باشد.

## منابع

- 1) Revathi, M.; Valliathal, M. Non-normal fuzzy number analysis in various levels using centroid method for fuzzy optimization. *Soft Comput.* 2021, 25, 8957–8969
- 2) He, W.; Rodríguez, R.M.; Takáč, Z.; Martínez, L. Ranking of Fuzzy Numbers on the Basis of New Fuzzy Distance. *Int. J. Fuzzy Syst.* 2023
- 3) 3-Nguyen, V.H. Ranking fuzzy numbers based on relative positions and shape characteristics. *Expert Syst. Appl.* 2022, 191, 116312



## یک روش جدید برای رتبه بندی اعداد فازی با استفاده از مقدار نماینده در قاعده اصلی توسعه یافته

پریسا اسدی \*<sup>۱</sup> ، دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی ، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ارومیه

رحیم صانعی فردی<sup>۲</sup> ، گروه آموزشی ریاضی کاربردی ، دانشیار ، عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد ارومیه

### چکیده:

در این پژوهش روشی نوین و قابل تفسیر برای رتبه بندی اعداد فازی معرفی می شود که بر مبنای مفهوم مقدار نماینده در چارچوب قاعده اصلی توسعه یافته بنا شده است. در این رویکرد، با استفاده از مدل فازی TSK و تعریف یک تابع رتبه بندی (Rep)، به هر عدد فازی یک مقدار اسکالر متناظر اختصاص داده می شود. این مقدار اسکالر نقش معیار مقایسه را ایفا کرده و امکان رتبه بندی ساده و دقیق اعداد فازی را فراهم می سازد. ویژگی برجسته روش پیشنهادی، سادگی محاسبات و در عین حال قابلیت تبیین نتایج برای تصمیم گیرندگان است؛ به گونه ای که خروجی ها تنها یک نتیجه عددی نیستند بلکه دارای توجیه منطقی و قابل درک می باشند. علاوه بر این، این روش قادر است اعداد فازی توسعه یافته با ارتفاع های مختلف را نیز رتبه بندی کند؛ قابلیتی که بسیاری از روش های کلاسیک فاقد آن هستند. برای ارزیابی کارایی، روش پیشنهادی با سایر روش های موجود مقایسه گردید. نتایج نشان داد که در عین سادگی، این روش از دقت، انعطاف پذیری و منطق پذیری بالاتری برخوردار است. بدین ترتیب، می توان آن را به عنوان ابزاری کارآمد و مؤثر در مسائل تصمیم گیری چندمعیاره و حوزه های مرتبط با تحلیل عدم قطعیت به کار گرفت. این ویژگی ها سبب می شود روش ارائه شده هم جنبه نظری و هم جنبه کاربردی داشته باشد.

واژگان کلیدی: اعداد فازی، مقدار نماینده، قاعده اصلی توسعه یافته



## ۱- مقدمه

نظریه مجموعه‌های فازی شاخه نسبتاً جدیدی از ریاضیات است که به صورت رسمی اولین بار توسط پروفیسور لطفعلی عسگرزاده دانشمند ایرانی تبار دانشگاه کالیفرنیا در برکلی با انتشار مقاله در مجله «اطلاعات و کنترل» در سال ۱۹۶۵ مطرح گردید [1].

این نظریه از زمان ارائه تاکنون، گسترش و تعمیم زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است. نظریه مجموعه فازی ابزارهایی فراهم می‌آورد که می‌توان بوسیله آنها نحوه استدلال و تصمیم‌گیری انسانی را صورت بندی ریاضی بخشید و از الگوهای ریاضی به دست آمده در زمینه‌های گوناگون علوم و تکنولوژی استفاده نمود. [2, 3] و رتبه‌بندی اعداد فازی نقش بسیار مهمی در تصمیم‌گیری، بهینه‌سازی و سایر کاربردها ایفا می‌کند [4]. در طول چند دهه گذشته رویکردهای رتبه‌بندی متعددی پیشنهاد و بررسی شده‌اند که اولین روش برای رتبه‌بندی اعداد فازی توسط جین ارائه شد در این پژوهش، یک روش جدید مبتنی بر مقدار نماینده در قاعده اصلی توسعه یافته ارائه می‌شود که قادر است ویژگی‌های هندسی و معنایی اعداد فازی را همزمان در فرآیند رتبه‌بندی لحاظ کند. این روش با محاسبه یک شاخص کمی برای هر عدد فازی، امکان مقایسه دقیق‌تر و عادلانه‌تر را فراهم می‌سازد و نسبت به روش‌های متداول، سازگاری بیشتری با ترجیحات تصمیم‌گیرندگان دارد.

## ۲- روش پیشنهادی

در این بخش، اصلی‌ترین روش رتبه بندی جدید برای اعداد فازی را معرفی می‌کنیم، که بر اساس مقدار نماینده قاعده اصلی توسعه یافته است و مرکز و مساحت اعداد فازی را در نظر می‌گیرد. مراحل تفصیلی این روش پیشنهادی در زیر ارائه شده است.

درباره مسئله رتبه بندی اعداد بازه ای، محققان معمولاً بر دو عامل اصلی اعداد بازه ای تمرکز دارند [2]:  
مقدار میانگین و دامنه اعداد بازه‌ای.

برای اعداد فازی، عواملی که بر ترتیب آنها تأثیر می‌گذارند می‌تواند به صورت زیر خلاصه شود:

(۱) مختصات مرکز اعداد فازی؛

(۲) دامنه مقادیری که  $x$  می‌تواند بگیرد؛

(۳) ارتفاع اعداد فازی

مراحل روش پیشنهادی به شرح زیر است:

۱. تعیین قوانین فازی مربوط به ترجیحات تصمیم‌گیر.
۲. مدلسازی این قوانین با استفاده از مدل فازی TSK.
۳. تعریف تابع Rep بر اساس وزندهی به نقاط مرکزی و مساحت عدد فازی.
۴. محاسبه مقدار اسکالر مربوط به هر عدد فازی.

۵. مقایسه مقادیر اسکالر و رتبه بندی نهایی.

مثال عددی

پنج عدد فازی زیر که در شکل پایین نشان داده شده، در جدول زیر رتبه بندی شده اند.

$$A_p = (0.1, 0.3, 0.5), A_r = (0.1, 0.2, 0.3), A_1 = (0.1, 0.1, 0.1)$$

$$A_h = (0.1, 0.5, 0.9), A_f = (0.1, 0.4, 0.7)$$

| اعداد فازی              | C   | S    | Rep(A) | رتبه |
|-------------------------|-----|------|--------|------|
| $A_1 = (0.1, 0.1, 0.1)$ | ۰/۱ | ۰    | ۰/۱    | ۵    |
| $A_r = (0.1, 0.2, 0.3)$ | ۰/۲ | ۰/۱۰ | ۰/۲۳   | ۴    |
| $A_p = (0.1, 0.3, 0.5)$ | ۰/۳ | ۰/۲  | ۰/۳۴   | ۳    |
| $A_f = (0.1, 0.4, 0.7)$ | ۰/۴ | ۰/۳  | ۰/۴۳   | ۲    |
| $A_h = (0.1, 0.5, 0.9)$ | ۰/۵ | ۰/۴  | ۰/۵۰   | ۱    |

۳-۷-۲-۲- حالت ۲: برای مجموعه ای از اعداد فازی که در شکل پایین نمایش داده شده، در جدول زیر رتبه بندی شده اند.

$$A_\lambda = (0.6, 0.8, 1), A_\nu = (0.8, 0.9, 1), A_\xi = (1, 1, 1)$$

$$A_{\rho} = (0.2, 0.6, 1), A_\eta = (0.4, 0.7, 1)$$

| اعداد فازی                  | C   | S   | Rep(A) | رتبه |
|-----------------------------|-----|-----|--------|------|
| $A_\xi = (1, 1, 1)$         | ۱   | ۰   | ۱      | ۱    |
| $A_\nu = (0.8, 0.9, 1)$     | ۰/۹ | ۰/۱ | ۰/۸۶   | ۲    |
| $A_\lambda = (0.6, 0.8, 1)$ | ۰/۸ | ۰/۲ | ۰/۷۴   | ۳    |
| $A_\eta = (0.4, 0.7, 1)$    | ۰/۷ | ۰/۳ | ۰/۶۴   | ۴    |
| $A_{\rho} = (0.2, 0.6, 1)$  | ۰/۶ | ۰/۴ | ۰/۵۶   | ۵    |

#### ۴- یافته ها

نتایج رتبه بندی نشان می دهند که با انتظارات ما سازگار هستند. رابطه بین  $S, C$  و  $Rep(A_i)$  در مثال ۲ می تواند از شکل زیر به دست آورد به طور واضح، اعداد فازی در حالت ۱ انتهای چپ یکسانی دارند. انتهای متفاوت سبب می شود که پنج عدد فازی مساحت ها و مراکز مختلفی داشته باشند. هنگامی که مرکز به سمت راست حرکت کرده و مساحت نیز افزایش یابد، مقدار نماینده بزرگتری به دست می آید.

برای عدد فازی در حالت ۲، هنگامی که مرکز به سمت راست حرکت کرده و مساحت کاهش یابد، مقدار نماینده کوچکتری به دست می آید. این به معنای یک قاعده اصلی است: اگر دارید، طمع کار (حریص) نباشید و اگر ندارید، سعی کنید بهتر عمل کنید.

به طور دقیق تر، اگر موقعیتهای افقی مراکز اعداد فازی همه آنها در سمت چپ باشد، یعنی  $C < 0.5$ ، تصمیم گیرنده ترجیح می دهد عدد فازی با مساحت بزرگتر را انتخاب کند که نشان دهنده وجود فرصت های بیشتر است.



اگر موقعیت افقی مراکز اعداد فازی در سمت راست باشد، به عبارتی  $C_i < 0.5$ ، هر چه مرکز نزدیکتر به سمت راست باشد، تصمیم گیرنده راضی تر خواهد بود. در این حالت، تصمیم گیرنده ترجیح می دهد هیچ فرصتی برای انحراف نباشد، به عبارت دیگر، قطعیت بالاتر توسط تصمیم گیرنده، در این زمان، ارزشمند می شود.

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش نوین رتبه بندی اعداد فازی بر اساس مقدار نماینده قاعده اصلی توسعه یافته ارائه شده است. در این روش، ما ترجیحات و نگرش تصمیم گیران نسبت به اعداد فازی را در نظر می-گیریم، تا چهار قاعده اصلی را ایجاد کنیم. اولین شاخصی که انتخاب می کنیم موقعیت نقطه مرکزی بر روی محور  $X$  است و سپس مساحت عدد فازی است که شامل اطلاعاتی درباره ارتفاع عدد فازی و دامنه مقادیر  $x$  است. از مدل فازی TSK برای مدلسازی قاعده اصلی استفاده کردیم تا تابع Rep مورد نیاز برای رتبه بندی اعداد فازی را به دست آوریم. چهار مثال عددی نشان می دهند که روش پیشنهادی فرآیند محاسباتی و خواص آن را نشان می دهد. توضیحات مربوط به ترتیب اعداد فازی با استفاده از چهار قاعده اصلی ما نشان می دهد که در فرآیند رتبه بندی اعداد فازی، تفسیر پذیری وجود دارد. تابع Rep می تواند تمامی ترجیحات و نگرش تصمیم گیران را به اعداد فازی به طور کامل نشان دهد: ۱. اگر  $C_i > 0.5$  باشد، تصمیم گیرنده بیشتر راضی است. در این صورت، تصمیم گیرنده فرصت هایی بدون انحراف را ترجیح می دهد. ۲. اگر  $C_i < 0.5$  باشد، تصمیم گیرنده یک محدوده بزرگ را ترجیح می دهد که به معنای وجود فرصت های بیشتر است.

اگر  $C_i = 0.5$  تصمیم گیرنده در مورد اعداد فازی مبهم است. نگرش مبهم تصمیم گیران در این موقعیت منجر به استقلال نتیجه محاسبه مقدار نماینده و اطلاعات مبهم ارائه شده توسط مساحت خواهد شد. این همان جایی است که روش پیشنهادی محدودیت دارد و ما در انجام کارهای آینده به بهبود آن نظر داریم. نتایج آزمایش های مقایسه ای نشان می دهد که روش پیشنهادی می تواند نقایص برخی از روش های موجود را پوشش دهد. علاوه بر این، این روش ساده و موثر است و تنها از چهار قاعده برای دستیابی به رتبه بندی تمامی انواع اعداد فازی استفاده می کند. در نهایت، اثربخشی و تأثیر روش پیشنهادی را از طریق مثال کلاسیک تحلیل ریسک فازی نشان می دهیم. این روش یک ابزار مفید برای تحلیل ریسک فازی، سیستم های کاربردی فازی و مسائل تصمیم گیری در محیط های فازی فراهم می کند.

افزون بر این، اهمیت روزافزون رتبه بندی اعداد فازی در حوزه هایی همچون تصمیم گیری چندمعیاره، تحلیل ریسک، مهندسی صنایع، اقتصاد و علوم داده، زمینه را برای توسعه های آتی فراهم می سازد. یکی از مسیرهای آینده می تواند ترکیب این رویکرد با الگوریتم های فراابتکاری و یادگیری ماشین فازی باشد تا فرآیند رتبه بندی علاوه بر شفافیت، قابلیت بهینه سازی و یادگیری خودکار نیز داشته باشد. همچنین تصمیم روش پیشنهادی به محیط های اعداد فازی نوع-۲ و اعداد فازی شهودی از دیگر مسیرهای تحقیقاتی ارزشمند است، چراکه در بسیاری از مسائل واقعی، عدم قطعیت تنها با فازی نوع-۱ قابل بیان نیست. در نهایت، پیاده سازی این روش در قالب یک نرم افزار تصمیم یار می تواند به عنوان ابزاری کارآمد در تحلیل داده های مبهم و ارتقای کیفیت تصمیم گیری در محیط های پیچیده عمل کند.



۶- منابع

1. Cheng, R., Kang, B., & Zhang, J. (2022). A novel method to rank fuzzy numbers using the developed golden rule representative value. *Applied Intelligence*, 52, 9751 - 9767.
2. Jia QHerrera-Viedma E(2024)3-D Golden Rule Representative Value in Decision-Making SystemsIEEE Transactions on Fuzzy Systems10.1109/TFUZZ.2024.338196332:6(3729-3740)Online publication date: 26-Mar-2024
3. Le TChu T(2023)A weighted centroids approach based trapezoidal interval type-2 fuzzy TOPSIS method for evaluating agricultural risk management toolsSoft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications10.1007/s00500-023-08953-927:22(17153-17173)Online publication date: 1-Nov-2023
4. Sotoudeh-Anvari MSotoudeh-Anvari A(2023)Setback in ranking fuzzy numbers: a study in fuzzy risk analysis in diabetes predictionArtificial Intelligence Review10.1007/s10462-022-10282-656:5(4591-4639)Online publication date: 1-May-2023



## کاربرد الگوریتم‌های بهینه‌سازی و تحلیل آماری در تشخیص زودهنگام بیماری‌های عصبی

سید سعید آیت<sup>۱</sup>، دانشیار گروه علمی مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

[dr.ayat@pnu.ac.ir](mailto:dr.ayat@pnu.ac.ir)

الناز احمدی، دانشجوی کارشناسی ارشد گروه مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

[elnazahmadi036@gmail.com](mailto:elnazahmadi036@gmail.com)

**چکیده:** تشخیص زودهنگام بیماری‌های عصبی مانند آلزایمر، نیازمند ابزارهای محاسباتی دقیق و قابل تعمیم است. با این حال، توسعه مدل‌هایی که بتوانند به طور قابل اتکایی در محیط‌های بالینی مختلف عملکرد خوبی داشته باشند، همچنان یک چالش باقی مانده است. این پژوهش با هدف نشان دادن نقش حیاتی ریاضیات در مهندسی پزشکی، به توسعه یک مدل تشخیصی قوی برای بیماری آلزایمر می‌پردازد. رویکرد این پژوهش بر پایه کاربرد سیستماتیک الگوریتم‌های ریاضی در تمامی مراحل توسعه مدل است. در این مطالعه، از روش‌های آماری برای تکمیل داده‌های گمشده، و از الگوریتم‌های بهینه‌سازی مانند حذف بازگشتی ویژگی (RFE)<sup>۲</sup> برای انتخاب بهینه ویژگی‌ها استفاده شده است. هسته اصلی مدل، الگوریتم XGBoost<sup>۳</sup> است که بر مبنای اصول یادگیری مبتنی بر گرادین عمل می‌کند تا یک طبقه‌بند بسیار دقیق ایجاد کند. نتایج نشان داد که این رویکرد به مدلی با دقت ۹۲،۵۴٪ و ROC AUC ۹۷،۷۷٪ دست یافت که عملکردی برتر نسبت به مدل‌های پایه دارد. این یافته‌ها اهمیت کاربرد اصول ریاضی در مهندسی برای ایجاد سیستم‌های تشخیصی قابل اعتماد و کارآمد را تأیید می‌کند و نشان می‌دهد که یک رویکرد جامع می‌تواند به عملکردی قوی و پایدار منجر شود.

**کلمات کلیدی:** تحلیل داده‌ها- بهینه‌سازی مدل- یادگیری ماشین در پزشکی- تحلیل‌های آماری بیماری‌های عصبی

۱ . سید سعید آیت

۲ . Recursive Feature Elimination: الگوریتم حذف بازگشتی ویژگی

۳ . Extreme Gradient Boosting: الگوریتم تقویت‌سازی افراطی

## ۱. مقدمه

تشخیص زودهنگام و دقیق بیماری‌های پیچیده‌ای مانند آلزایمر از مهم‌ترین چالش‌های روز مهندسی پزشکی محسوب می‌شود. در عصر حاضر، یادگیری ماشین ابزاری است که به کمک داده‌های موجود، به کشف الگوها و روابط پنهان پرداخته و امکان پیش‌بینی و تصمیم‌گیری هوشمند را فراهم می‌سازد. این رویکرد بر مبنای داده‌کاوی شکل گرفته است؛ جایی که باور بر آن است که در میان انبوه داده‌ها دانشی نهفته وجود دارد که تنها با شناسایی الگوها می‌توان آن را استخراج کرد (Brownlee, 2020). کشف این الگوها به روش‌های آماری و محاسباتی وابسته است (Lou et al., 2023). داده‌های بالینی و تصویربرداری مورد استفاده در این حوزه - از جمله داده‌های این پژوهش که از پایگاه‌های معتبر OASIS1، OASIS2 و ADNI گردآوری شده‌اند - معمولاً با مشکلاتی مانند نویز، مقادیر گم‌شده و عدم تعادل توزیع کلاس‌ها روبه‌رو هستند. رفع این چالش‌ها مستلزم بهره‌گیری از رویکردهای دقیق ریاضیات کاربردی و یادگیری آماری است، چرا که در غیر این صورت یادگیری ماشین به سطحی از حدس‌زنی تصادفی تنزل پیدا می‌کند (Kaul, 2025). پژوهش‌های متعدد بر اهمیت ریاضیات و آمار در یادگیری ماشین تأکید کرده‌اند. کتاب عناصر یادگیری آماری، به وضوح نشان می‌دهد که یادگیری ماشین اساساً فرآیندی آماری است که به کمک مدل‌های احتمالاتی، روابط میان داده‌ها را آشکار می‌سازد (Hastie et al., 2009). چنین دیدگاهی با تمرکز بر اصول آماری مانع بیش‌برازش<sup>۱</sup> شده و قابلیت تعمیم مدل‌ها به داده‌های جدید را تضمین می‌کند (James et al., 2021). یادگیری آماری به تحلیلگران کمک می‌کند دلایل عملکرد مدل‌ها را درک کرده و روابط واقعی را از نویز جدا کنند. بدیهی است که بدون تسلط بر مبانی ریاضی، فهم و پیاده‌سازی الگوریتم‌های پیچیده‌ای مانند شبکه‌های عصبی امکان‌پذیر نیست. در مجموع، ادبیات علمی تأکید می‌کند که ریاضیات و آمار نه تنها زیربنای فنی یادگیری ماشین، بلکه کلید اصلی استخراج دانش واقعی از داده‌ها هستند و یادگیری ماشین بدون درک ریاضیات منجر به دانشی سطحی و غیر پایدار میشود. در زمینه تشخیص آلزایمر نیز تحقیقات پیشین ثابت کرده‌اند که الگوریتم‌های تقویت‌شده‌ای همچون XGBoost به دلیل توانایی بالا در مدل‌سازی روابط غیرخطی، برای مسائل تشخیصی بسیار کارآمد هستند (Orlunwo & Onuodu, 2024). این الگوریتم‌ها بر پایه اصول گرادینان و بهینه‌سازی بنا شده‌اند و با اصلاح تدریجی خطاها، دقت بالایی به دست می‌آورند. علاوه بر آن، پژوهش‌ها بی‌شک وجود دارد که به اهمیت به‌کارگیری روش‌های آماری و تئوری اطلاعات در انتخاب ویژگی و کاهش ابعاد داده‌ها به‌طور گسترده می‌پردازند. با این حال، اغلب مطالعات تنها بر بخشی از فرایند تحلیل داده تمرکز داشته‌اند و به ندرت رویکردی جامع که نقش ابزارهای ریاضی را از مرحله پیش‌پردازش تا مدل‌سازی پوشش دهد ارائه شده است. پژوهش حاضر با هدف پر کردن این خلاء، چارچوبی یکپارچه و مبتنی بر ریاضیات ارائه می‌دهد که در آن از تکنیک‌هایی نظیر KNNImputer، BorderlineSMOTE و RFE در کنار الگوریتم XGBoost بهره گرفته می‌شود تا دقت، کارایی و تعمیم‌پذیری مدل به‌طور چشمگیری ارتقا یابد.

## ۲. نتایج اصلی

در این بخش، به مفاهیم و الگوریتم‌های ریاضی که اساس روش کار را تشکیل می‌دهند، پرداخته می‌شود. این پژوهش بر پایه یک چارچوب منسجم ریاضیاتی استوار است که در تمامی مراحل توسعه مدل، از پیش‌پردازش داده‌ها تا تفسیر نتایج، از اصول ریاضیات کاربردی بهره می‌برد. این رویکرد نشان می‌دهد که با تعریف هر مرحله از

<sup>۱</sup> overfitting: حالتی که مدل، داده‌های آموزشی را بیش از حد حفظ می‌کند و توانایی تعمیم به داده‌های جدید را از دست می‌دهد.



یک خط لوله یادگیری ماشین به عنوان یک مسئله ریاضی، می‌توان به راه‌حل‌های بهینه و قابل اعتمادی دست یافت. این راه‌حل‌ها شامل تکمیل داده‌ها بر پایه فاصله، بهینه‌سازی انتخاب ویژگی، مدل‌سازی بر پایه گرادیان و تفسیرپذیری مبتنی بر نظریه بازی‌ها است.

۲-۱. پیش‌پردازش و آماده‌سازی داده‌ها: مفاهیم آماری و هندسی در مرحله پیش‌پردازش داده‌ها نقش حیاتی ایفا کردند. برای تکمیل مقادیر گمشده، از KNNImputer (Troyanskaya et al., 2001) استفاده شد که بر پایه فاصله اقلیدسی طبق فرمول (۱) نزدیک‌ترین همسایه‌ها را پیدا می‌کند. این روش، برخلاف جایگزینی با میانگین، ساختار درونی داده‌ها را حفظ می‌کند. همچنین، برای اطمینان از کامل بودن داده‌ها، از SimpleImputer (روش ساده برای جایگزینی مقادیر گمشده) به عنوان یک استراتژی پشتیبان استفاده شد. برای مقابله با داده‌های پرت و مقیاس‌سازی متغیرها، RobustScaler (روش مقیاس‌سازی مقاوم در برابر داده‌های پرت) با استفاده از میانه و دامنه بین‌چارکی (IQR) طبق فرمول (۲) به کار گرفته شد. عدم تعادل در توزیع کلاس‌ها با استفاده از تکنیک پیشرفته BorderlineSMOTE (Han et al., 2005) با رویکرد هندسی و آماری مدیریت شد. این روش با تمرکز بر نمونه‌های نزدیک به مرزهای تصمیم‌گیری، نمونه‌های مصنوعی تولید کرده و به مدل کمک می‌کند تا مرزهای بین کلاس‌های سالم و بیمار را با دقت بیشتری یاد بگیرد. در نهایت، برای ارزیابی بهینه مدل، از اعتبارسنجی متقابل طبقه‌بندی شده استفاده شد. که نسبت کلاس‌ها را در هر بخش حفظ می‌کند و پایداری مدل را بهبود می‌بخشد.

$$(1) \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$(2) \quad x_{scaled} = \frac{x_i - \text{Median}(x)}{IQR(x)}$$

۲-۲. بهینه‌سازی و مدل‌سازی: انتخاب بهینه ویژگی‌ها از میان مجموعه کامل، به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی تعریف شد که هدف آن یافتن زیرمجموعه‌ای با بالاترین قدرت پیش‌بینی است. الگوریتم RFE یک راه‌حل حریصانه برای این مسئله فراهم می‌کند؛ که با حذف تکراری ویژگی‌های کم‌اهمیت، به یک زیرمجموعه بهینه دست می‌یابد. هسته اصلی مدل، الگوریتم XGBoost است (Chen & Guestrin, 2016). این الگوریتم بر مبنای اصول تقویت‌سازی گرادیان عمل می‌کند. تابع هدف این مدل طبق فرمول (۳) به صورت یک مسئله بهینه‌سازی تعریف می‌شود که شامل دو بخش اصلی است: تابع زیان که میزان خطا را می‌سنجد و تابع منظم‌سازی که پیچیدگی مدل را کنترل می‌کند. این رویکرد به مدل اجازه می‌دهد تا با تصحیح پیوسته خطاها، به دقت بسیار بالایی دست یابد.

$$(3) \quad \text{Minimize } \theta \quad \text{Obj}(\theta) = \sum_{i=1}^n L(y_i, \hat{y}_i^{(l)}) + \sum_{k=1}^l \Omega(f_k) \quad - \quad \Omega(f_k) = \gamma T + \frac{1}{2} \lambda \sum_{j=1}^T w_j^2$$

۲-۳. تفسیرپذیری مدل: برای افزایش شفافیت و اعتماد به مدل، از مقادیر شیلی استفاده شد. این مقادیر، که بر اساس نظریه بازی‌ها بنا شده‌اند، سهم هر ویژگی را در پیش‌بینی نهایی مدل به صورت ریاضی محاسبه می‌کنند. (Lundberg & Lee, 2017). این تحلیل، لایه‌ای از اعتماد را به فرآیند تشخیص می‌افزاید و نشان می‌دهد که کدام ویژگی‌ها مانند MMSE<sup>۱</sup>، eTIV<sup>۲</sup>، nWBV<sup>۳</sup>، SES<sup>۴</sup> و Educ<sup>۵</sup> بیشترین نقش را در تصمیم‌گیری مدل ایفا کرده‌اند.

۱. نمره آزمون شناختی استاندارد (با امتیاز حداکثر ۳۰) برای ارزیابی اختلال شناختی، از جمله حافظه، توجه، و جهت‌یابی.

۲. حجم کل درون‌جمجمه‌ای تخمینی

۳. حجم نرمال شده کل مغز

۴. جایگاه اجتماعی-اقتصادی که بر اساس سه عامل اصلی تعیین می‌شود: سطح تحصیلات، درآمد و شغل.

۵. تحصیلات

### ۳. نتایج عددی

در این بخش، نتایج کمی پژوهش به منظور اثبات گزاره‌های مطرح شده در بخش قبل ارائه می‌شود. مجموعه داده بعد از ادغام و پاکسازی به نسبت ۸۰٪ برای آموزش و ۲۰٪ برای آزمون تقسیم شد. تمامی نتایج گزارش شده در این بخش، بر روی مجموعه داده آزمون به دست آمده‌اند. مدل XGBoost که بر مبنای اصول ریاضیاتی آموزش دیده بود، عملکردی برتر نسبت به مدل‌های پایه نشان داد. این مدل به دقت ۹۲٫۵۴٪ و امتیاز ROC AUC ۹۷٫۷۷<sup>۱</sup> دست یافت. این عملکرد به طور قابل توجهی از ROC AUC مدل‌های پایه شامل رگرسیون لجستیک (۹۷٫۶۰٪) و جنگل تصادفی (۹۷٫۲۲٪) بالاتر بود. این نتایج به صورت عملی، کارآمدی رویکرد بهینه‌سازی در الگوریتم‌های پیشرفته برای حل مسئله تشخیص بیماری‌های عصبی را به اثبات می‌رسانند.

### ۴. نتیجه‌گیری

نتایج به روشنی نشان داد که کاربرد سیستماتیک مفاهیم ریاضی، از بهینه‌سازی الگوریتمی تا تحلیل‌های آماری، یک گام اساسی در توسعه مدل‌های هوش مصنوعی قابل اعتماد برای مهندسی پزشکی است. این رویکرد نه تنها به مدلی با دقت و ROC AUC بالا منجر شد، بلکه با استفاده از ابزارهای مبتنی بر نظریه بازی‌ها، به شفافیت و تفسیرپذیری آن نیز کمک کرد. این پژوهش بر اهمیت بنیادین ریاضیات به عنوان ستون فقرات حل مسائل پیچیده در دنیای امروز تأکید دارد.

### منابع

- 1-Brownlee, J. (2020) Data preparation for machine learning: Data cleaning, feature selection, and data transforms in Python, *Machine Learning Mastery*.
- 2-Chen, T., & Guestrin, C. (2016) XGBoost: A scalable tree boosting system, *Proc. 22nd ACM SIGKDD Int. Conf. Knowledge Discovery and Data Mining*, 785–794.
- 3-Han, H., Wang, W.-Y., & Mao, B.-H. (2005) Borderline-SMOTE: A new over-sampling method in imbalanced data sets learning, *Advances in Intelligent Computing: Int. Conf. on Intelligent Computing (ICIC 2005)*, 878–887, Springer.
- 4-Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009) *The elements of statistical learning: Data mining, inference, and prediction* (2nd ed.), Springer.
- 5-James, G., Witten, D., Hastie, T., & Tibshirani, R. (2021) Linear model selection and regularization, *In: An introduction to statistical learning: With applications in R (2nd ed.)*, 225–288, Springer.
- 6-Kaul, C. (2025) *Big data, machine learning, and data mining explained*, Educohack Press.
- 7-Lou, X., Guo, J., Zhang, J., Wang, J., Huang, K., & Du, Y. (2023) Pecan: Leveraging policy ensemble for context-aware zero-shot human-AI coordination, *arXiv preprint arXiv:2301.06387*.
- 8-Lundberg, S. M., & Lee, S. I. (2017) A unified approach to interpreting model predictions, *Adv. Neural Inf. Process. Syst.*, 30.
- 9-Orlunwo, P. O., & Onuodu, F. E. (2024) Comparison of ensemble techniques for early prediction of Alzheimer disease, *Research Square*, rs-3.
- 10-Troyanskaya, O., Cantor, M., Sherlock, G., Brown, P., Hastie, T., Tibshirani, R., Botstein, D., & Altman, R. B. (2001) Missing value estimation methods for DNA microarrays, *Bioinformatics*, 17(6), 520–525.

۱ ROC AUC (Receiver Operating Characteristic - Area Under Curve): معیار ارزیابی مدل‌های دسته‌بندی است که توانایی مدل را در تفکیک صحیح کلاس‌های مثبت و منفی، مستقل از آستانه، اندازه‌گیری می‌کند (محدوده ۰٫۵ تا ۱٫۰).

## بررسی نقش توانایی‌های شناختی و اضطراب ریاضی در پیشرفت ریاضی دانش‌آموزان پایه هفتم شهرستان تنکابن

فرهاد شکری، مشاور مدارس آموزش و پرورش شهرستان تنکابن، فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد روانشناسی بالینی

[F.Shokri004@gmail.com](mailto:F.Shokri004@gmail.com)

**چکیده:** این پژوهش با هدف بررسی نقش توانایی‌های شناختی و اضطراب ریاضی در پیشرفت تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان پایه هفتم شهرستان تنکابن انجام شد. به این منظور، ۱۳۵ دانش‌آموز مورد مطالعه قرار گرفتند. ابزارهای مورد استفاده شامل آزمون توانایی‌های ذهنی اولیه (PMA)، پرسشنامه اضطراب ریاضی (AMAS)، آزمون‌های حافظه کاری (کلامی و دیداری-فضایی)، و آزمون‌های کنترل بازداری (استروپ، فلنکر، سایمون) بودند. یافته‌ها نشان داد توانایی‌های شناختی سطح بالاتر به طور معناداری پیش‌بینی‌کننده موفقیت ریاضی هستند، حافظه کاری واسطه‌ای میان اضطراب ریاضی و عملکرد ریاضی است و اضطراب ریاضی اثر مستقیم منفی بر پیشرفت ریاضی دارد. این نتایج نشان دهنده اهمیت همزمان عوامل شناختی و هیجانی در موفقیت تحصیلی و لزوم مداخلات آموزشی برای کاهش اضطراب ریاضی است.

**کلمات کلیدی:** اضطراب ریاضی، پیشرفت تحصیلی، حافظه کاری.

### مقدمه

ریاضیات یکی از مهم‌ترین دروس پایه‌ای در نظام‌های آموزشی است که نقش تعیین‌کننده‌ای در پیشرفت تحصیلی و مسیر شغلی آینده دانش‌آموزان دارد. با وجود اهمیت این درس، بسیاری از دانش‌آموزان در یادگیری ریاضی با مشکلات جدی مواجه می‌شوند. مطالعات نشان داده‌اند که عملکرد ریاضی تنها تحت تأثیر توانایی‌های شناختی (مانند حافظه کاری، هوش، توانایی استدلال) نیست، بلکه عوامل هیجانی مانند اضطراب ریاضی نیز نقش مهمی ایفا می‌کنند. حافظه کاری به‌عنوان یکی از مهم‌ترین توانایی‌های شناختی در فرآیند حل مسئله‌های ریاضی شناخته شده است. این توانایی به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا در حین انجام محاسبات، همزمان اطلاعات را ذخیره و پردازش کنند. از سوی دیگر، کارکردهای اجرایی مانند کنترل بازداری و انعطاف‌پذیری شناختی نیز در حل مسائل پیچیده ریاضی ضروری هستند.

اضطراب ریاضی پدیده‌ای شایع در میان دانش‌آموزان است که به‌صورت احساس ترس و نگرانی در هنگام مواجهه با تکالیف ریاضی ظاهر می‌شود. این اضطراب می‌تواند منابع شناختی دانش‌آموز، به‌ویژه حافظه کاری را کاهش دهد و موجب افت عملکرد شود. پژوهش‌های متعددی نشان داده‌اند که دانش‌آموزان دارای اضطراب ریاضی بالا نه تنها در

آزمون‌های ریاضی عملکرد ضعیف‌تری دارند، بلکه در بلندمدت از انتخاب رشته‌های مرتبط با ریاضی و علوم پرهیز می‌کنند.

با توجه به اهمیت توأمان عوامل شناختی و هیجانی، پژوهش حاضر با هدف بررسی نقش توانایی‌های شناختی و اضطراب ریاضی در پیشرفت تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان پایه هفتم مدارس شهرستان تنکابن طراحی و اجرا شد.

### پیشینه پژوهش

در سطح بین‌المللی، پژوهش‌های متعددی به بررسی رابطه بین توانایی‌های شناختی و پیشرفت ریاضی پرداخته‌اند. برای مثال، مطالعات آشفراقت [3] و بایلیک و مالونی [4] نشان داده‌اند که اضطراب ریاضی تأثیر منفی مستقیمی بر عملکرد دارد. کایولا و همکاران [5] نیز گزارش کرده‌اند که حافظه کاری نقش واسطه‌ای میان اضطراب ریاضی و موفقیت ریاضی ایفا می‌کند.

در ایران نیز پژوهش‌های متعددی به این موضوع پرداخته‌اند. به عنوان نمونه، پژوهش‌های داخلی نشان داده‌اند که اضطراب ریاضی یکی از پیش‌بین‌های اصلی افت تحصیلی در دوره متوسطه است. همچنین نقش حافظه کاری و توانایی‌های شناختی در پیشرفت ریاضی مورد تأکید قرار گرفته است. منابع [1] و [2] را ببینید.

### روش پژوهش

پژوهش حاضر از نوع توصیفی-همبستگی است. جامعه آماری شامل کلیه دانش‌آموزان پایه هفتم مدارس شهرستان تنکابن در سال تحصیلی جاری بود. از میان آن‌ها ۱۳۵ نفر به روش نمونه‌گیری در دسترس انتخاب شدند. ابزارهای مورد استفاده شامل:

- ۱) آزمون ریاضی استاندارد.
  - ۲) آزمون توانایی‌های ذهنی اولیه (PMA).
  - ۳) آزمون حافظه کاری (کلامی و دیداری-فضایی).
  - ۴) آزمون کنترل بازداری (استروپ، فلنجر و سایمون).
  - ۵) پرسشنامه اضطراب ریاضی (AMAS).
- برای تحلیل داده‌ها از همبستگی پیرسون و مدل‌یابی معادلات ساختاری (تحلیل مسیر) استفاده شد.

### یافته‌ها

برای تحلیل داده‌ها ابتدا آمار توصیفی محاسبه شد. میانگین نمره ریاضی دانش‌آموزان برابر با ۱۵/۲۷ و انحراف معیار ۲/۸۳ بود. میانگین اضطراب ریاضی در نمونه مورد بررسی ۲۱/۳۴ و انحراف معیار ۵/۴۲ آمد. حافظه کاری دیداری-فضایی و کلامی نیز به ترتیب میانگین‌های ۱۲.۸۶ و ۱۱.۴۵ را نشان دادند. نتایج همبستگی پیرسون نشان داد:

- بین توانایی‌های شناختی سطح بالاتر (PMA) و پیشرفت ریاضی رابطه مثبت و معناداری وجود دارد،  $(r = 0.51, p < .001)$ .
- حافظه کاری (ترکیب دیداری-فضایی و کلامی) نیز با پیشرفت ریاضی همبستگی مثبت دارد  $(r = 0.41, p < .01)$ .

- بین اضطراب ریاضی و پیشرفت ریاضی همبستگی منفی مشاهده شد. ( $r = -0.38, p < .01$ )  
 - اضطراب ریاضی با حافظه کاری نیز رابطه منفی معناداری داشت. ( $r = -0.29, p < .05$ )  
 - کنترل بازداری با هیچ‌یک از متغیرها رابطه معناداری نشان نداد.

مدل‌یابی معادلات ساختاری نشان داد توانایی‌های شناختی سطح بالاتر اثر مستقیمی بر پیشرفت ریاضی دارند ( $\beta = 0.44, p < .001$ ). حافظه کاری نقش واسطه‌ای میان اضطراب ریاضی و پیشرفت ریاضی ایفا کرد ( $\beta = -0.04$ ). در حالی که کنترل بازداری تأثیر معناداری نداشت. ( $\beta = -0.03$ ) اضطراب ریاضی هم اثر مستقیم منفی ( $\beta = -0.27, p < .01$ ) و هم اثر غیرمستقیم از طریق حافظه کاری بر پیشرفت ریاضی داشت. این نتایج نشان می‌دهد موفقیت ریاضی دانش‌آموزان پایه هفتم شهرستان تنکابن بیش از هر چیز تحت تأثیر توانایی‌های شناختی سطح بالاتر و حافظه کاری قرار دارد. اضطراب ریاضی به‌طور مستقیم و غیرمستقیم باعث افت عملکرد ریاضی می‌شود، در حالی که نقش کنترل بازداری در این رابطه محدود بود. بنابراین، باید توجه داشت که در کنار آموزش مهارت‌های شناختی،

## بحث و نتیجه‌گیری

یافته‌های پژوهش حاضر نشان می‌دهد که توانایی‌های شناختی سطح بالاتر (هوش، استدلال، توانایی کلامی و فضایی) بیشترین نقش را در پیشرفت ریاضی دارند. این یافته همسو با نتایج پژوهش‌های بین‌المللی است. به ویژه، نقش حافظه کاری به عنوان واسطه میان اضطراب ریاضی و عملکرد تأکید می‌کند که هیجانات منفی می‌توانند منابع شناختی را تضعیف کنند. نتایج نشان داد کنترل بازداری برخلاف انتظار نقش معناداری نداشت. یکی از دلایل این امر می‌تواند ماهیت آزمون ریاضی مورد استفاده باشد که زمان‌بندی سخت‌گیرانه نداشت و دانش‌آموزان فرصت کافی برای پاسخ‌گویی داشتند. از این رو، نقش حافظه کاری پررنگ‌تر از کنترل بازداری بود. همچنین یافته‌ها نشان داد اضطراب ریاضی علاوه بر تأثیر غیرمستقیم از طریق حافظه کاری، به‌طور مستقیم نیز بر عملکرد اثر منفی دارد. این موضوع اهمیت مداخلات آموزشی برای کاهش اضطراب ریاضی را برجسته می‌سازد. این پژوهش نشان داد موفقیت در ریاضیات تنها به توانایی‌های شناختی وابسته نیست، بلکه عوامل هیجانی مانند اضطراب ریاضی نیز نقش مهمی دارند. توانایی‌های شناختی سطح بالاتر و حافظه کاری پیش‌بین‌های مهم موفقیت ریاضی بودند، در حالی که اضطراب ریاضی اثر منفی چشمگیری داشت. بنابراین، برای ارتقای عملکرد دانش‌آموزان پایه هفتم شهرستان تنکابن، لازم است در کنار آموزش‌های شناختی، برنامه‌هایی برای کاهش اضطراب ریاضی (مانند آموزش مهارت‌های مقابله‌ای، تمرینات ذهن‌آگاهی و مشاوره تحصیلی) اجرا شود.

## منابع

- ۱- و. زلفی و ا. رضایی، اثربخشی مداخله رایانه‌ی حافظه کاری بر اضطراب ریاضی، حافظه کاری و عملکرد ریاضی دانش‌آموزان دارای اختلال یادگیری ریاضی، آموزش و ارزشیابی (علوم تربیتی)، شماره ۸ (۳۰)، ۷۵-۸۶، ۱۳۹۴.
- ۲- س. ترابی، م. محمدی‌فر، م. خسروی، ن. شایان‌وه. محمدجانی، بررسی نقش اضطراب ریاضی بر عملکرد در درس ریاضی و نقش جنسیت. فناوری آموزش (فناوری و آموزش)، ۷ (۳)، ۲۰۴-۱۹۹/۱۳۹۲.



3. Ashcraft, M. H. (2002) Math Anxiety: Personal, Educational, and Cognitive Consequences, *Current Directions in Psychological Science*, 11(5), 181-185.
4. Beilock, S. L. and Maloney, E. A. (2015) Math Anxiety: A Factor in Math Achievement Not to Be Ignored. *Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences*, 2(1), 4-12.
5. Caviola, S., Toffalini, E., Giofrè, D. et al. (2022) Math Performance and Academic Anxiety Forms, from Sociodemographic to Cognitive Aspects: a Meta-analysis on 906,311 Participants. *Educ Psychol Rev* 34, 363-399.



## بررسی ارتباط حافظه دیداری، کاری و کلامی با پیشرفت

### ریاضی دانش آموزان ابتدایی شهرستان تنکابن

مریم اسماعیل زاده شهرستانی، مشاور آموزش و پرورش شهرستان تنکابن، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مشاوره

[maryam1355esmaeilzadeh@gmail.com](mailto:maryam1355esmaeilzadeh@gmail.com)

#### چکیده

پژوهش حاضر با هدف بررسی نقش انواع حافظه در پیشرفت ریاضی دانش آموزان ابتدایی شهرستان تنکابن انجام شد. نمونه شامل ۱۳۳ دانش آموز ۶ تا ۹ ساله پایه‌های اول تا سوم ابتدایی بود که به روش نمونه‌گیری در دسترس انتخاب شدند. برای گردآوری داده‌ها از آزمون توانایی‌های ریاضی استاندارد، آزمون کورسی بلاک برای سنجش حافظه دیداری - فضایی کوتاه مدت، نسخه معکوس همان آزمون برای حافظه کاری دیداری - فضایی، و آزمون بازشناسی تصاویر و اشیا برای ارزیابی حافظه کلامی کوتاه مدت و بلندمدت استفاده شد. همچنین، جهت کنترل اثر هوش عمومی، دو خرده‌آزمون «ساخت الگو» و «تعریف واژه» اجرا گردید. داده‌ها با آزمون همبستگی اسپیرمن و رگرسیون چندمتغیره تحلیل شدند. نتایج نشان داد در پایه اول، حافظه دیداری - فضایی کوتاه مدت بیشترین نقش را در یادگیری ریاضیات غیررسمی دارد؛ در پایه دوم، حافظه کاری دیداری - فضایی عامل کلیدی موفقیت در ریاضیات رسمی و غیررسمی است؛ و در پایه سوم، حافظه کوتاه مدت کلامی بیشترین تأثیر را در ریاضیات رسمی دارد. یافته‌ها بیانگر تغییر تدریجی نقش انواع حافظه در رشد ریاضی کودکان است و لزوم طراحی مداخلات آموزشی متناسب با نوع حافظه غالب در هر مقطع تحصیلی را نشان می‌دهد.

**کلمات کلیدی.** حافظه دیداری - فضایی، یادگیری ریاضیات، رشد شناختی کودکان.

#### مقدمه

یادگیری ریاضیات در سال‌های ابتدایی زندگی کودکان یکی از مهم‌ترین پایه‌های موفقیت تحصیلی در آینده به شمار می‌آید. پژوهش‌های مختلف نشان داده‌اند که عملکرد ریاضی نه تنها تحت تأثیر آموزش رسمی در مدرسه قرار دارد، بلکه با مجموعه‌ای از توانایی‌های شناختی نیز پیوند عمیق دارد. در میان این توانایی‌ها، حافظه نقشی برجسته ایفا می‌کند؛ زیرا بسیاری از مهارت‌های ریاضی همچون شمارش، محاسبه، حل مسئله و یادگیری جداول ضرب مستلزم نگهداری و پردازش همزمان اطلاعات هستند. حافظه به شکل‌های گوناگون از جمله حافظه دیداری - فضایی کوتاه مدت، حافظه کاری، و حافظه کلامی در فرآیند رشد ریاضی کودکان مشارکت دارد و شواهد علمی حاکی از آن است که اهمیت هر یک از این انواع حافظه در مقاطع مختلف سنی تغییر می‌کند. از سوی دیگر، درک چگونگی تأثیر انواع حافظه بر پیشرفت ریاضی، می‌تواند به معلمان و والدین کمک کند تا متناسب با سن و توانایی‌های شناختی کودک، فعالیت‌های آموزشی مناسب‌تری را انتخاب کنند. مطالعه حاضر با تمرکز بر دانش آموزان ابتدایی شهرستان تنکابن تلاش دارد تا نقش انواع حافظه در موفقیت ریاضی را در سه مقطع تحصیلی بررسی کرده و شواهدی روشن برای طراحی مداخلات آموزشی ارائه دهد.

## پیشینه

یادگیری ریاضیات در سال‌های ابتدایی تحصیل کودکان تحت تأثیر عوامل شناختی متعددی قرار دارد که حافظه یکی از مهم‌ترین آن‌هاست. پژوهش‌های داخلی نشان داده‌اند که تقویت حافظه می‌تواند نقش مؤثری در پیشرفت تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان داشته باشد. خدای و همکاران دریافته‌اند که آموزش حافظه فعال و فراشناخت باعث بهبود عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان دختر ناتوان در یادگیری ریاضی می‌شود و بنابراین توجه به توانایی‌های حافظه‌ای کودکان در طراحی فعالیت‌های آموزشی ضروری است [1]. عزیزیان و همکاران نیز با بررسی اثر آموزش توان بخشی شناختی بر حافظه فعال و توجه کودکان دارای اختلال یادگیری ریاضی نشان دادند که تقویت حافظه کاری، عملکرد تحصیلی ریاضی را بهبود می‌بخشد [2]. همچنین کاشانی و همکاران رابطه انواع حافظه با پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان ابتدایی را بررسی کرده و تأکید کرد که حافظه کوتاه‌مدت و دیداری - فضایی ارتباط قابل توجهی با یادگیری ریاضی دارد [3]. مطالعات بین‌المللی نیز نقش حافظه را در یادگیری ریاضی مورد تأکید قرار داده‌اند. کولن نشان داد که حافظه کاری به‌ویژه در مراحل پیشرفته یادگیری ریاضی اهمیت دارد و توانایی مدیریت و بازسازی اطلاعات، پیش‌بینی‌کننده عملکرد دانش‌آموزان در حل مسائل چندمرحله‌ای است [4]. منون نیز با بررسی همبستگی‌های عصبی حافظه کاری و یادگیری ریاضی کودکان، نقش حیاتی حافظه کاری در پردازش همزمان اطلاعات و موفقیت در ریاضیات را تأیید کرد [5] به طور کلی، شواهد داخلی و خارجی حاکی از آن است که انواع حافظه شامل حافظه دیداری - فضایی کوتاه‌مدت، حافظه کاری و حافظه کلامی، هر یک در مراحل مختلف یادگیری ریاضی نقش ویژه‌ای دارند. این یافته‌ها اهمیت طراحی مداخلات آموزشی متناسب با نوع حافظه و مرحله رشدی دانش‌آموزان را برای ارتقای عملکرد ریاضی نشان می‌دهند.

## روش شناسی

پژوهش حاضر با هدف بررسی نقش انواع حافظه در پیشرفت ریاضی دانش‌آموزان ابتدایی شهرستان تنکابن طراحی و اجرا شد. جامعه آماری تحقیق شامل کلیه دانش‌آموزان پایه‌های اول تا سوم ابتدایی مدارس این شهرستان در سال تحصیلی جاری بود. از میان آن‌ها ۱۳۳ نفر به روش نمونه‌گیری در دسترس و با همکاری مدارس انتخاب شدند. دانش‌آموزان در سه گروه سنی قرار گرفتند که به ترتیب با پایه‌های اول، دوم و سوم ابتدایی هم‌پوشانی داشتند. این تقسیم‌بندی به پژوهشگران امکان داد تا تغییرات نقش حافظه در طول سه سال نخست تحصیل رسمی را بررسی کنند. آزمون‌ها و ابزارهای مورد استفاده شامل چند بخش بودند:

۱. آزمون توانایی‌های ریاضی: این آزمون استاندارد شامل ۷۲ سؤال بود که هم جنبه‌های ریاضیات غیررسمی (مانند شمارش، درک مفهوم جمع کردن اشیا) و هم جنبه‌های ریاضیات رسمی (مانند نوشتن نمادهای عددی و انجام محاسبات ساده) را در بر می‌گرفت. این ابزار امکان تفکیک عملکرد دانش‌آموزان در ریاضیات رسمی و غیررسمی را فراهم ساخت.

۲. آزمون حافظه دیداری - فضایی: نسخه دیجیتال آزمون کورسی بلاک بر روی تبلت اجرا شد. در این آزمون، دکمه‌هایی روی صفحه ظاهر می‌شد و کودک باید ترتیب روشن شدن آن‌ها را به خاطر می‌سپرد و بازتولید می‌کرد.

این کار توانایی نگهداری اطلاعات دیداری - فضایی در کوتاه مدت را می‌سنجید. نسخه معکوس این آزمون نیز برای اندازه‌گیری حافظه کاری دیداری - فضایی استفاده شد، به این صورت که دانش‌آموز باید توالی نمایش داده شده را برعکس بازسازی می‌کرد.

۳. آزمون حافظه کلامی کوتاه مدت و بلندمدت: برای سنجش این نوع حافظه از آزمون بازشناسی تصاویر و اشیا استفاده شد. کودکان باید در زمان‌های کوتاه و پس از تأخیر زمانی مشخص، مجموعه‌ای از تصاویر را به یاد می‌آوردند. مجموع تعداد پاسخ‌های صحیح در مرحله فوری، معیار حافظه کوتاه مدت و در مرحله تأخیری، معیار حافظه بلندمدت کلامی بود.

۴. خرده‌آزمون‌های هوش: به منظور کنترل اثر هوش عمومی، دو خرده‌آزمون «ساخت الگو» برای سنجش توانایی فضایی و «تعریف واژه» برای سنجش توانایی کلامی اجرا شد. این کار باعث شد تا اثر حافظه به طور خالص‌تر سنجیده شود.

## فرآیند اجرا

آزمون‌ها در فضای آرام مدارس و به صورت انفرادی اجرا شدند. هر دانش‌آموز در سه جلسه کوتاه حدود ۲۰ تا ۳۰ دقیقه‌ای مورد سنجش قرار گرفت تا از خستگی و افت دقت جلوگیری شود. به منظور افزایش انگیزه، پس از هر جلسه پاداشی کوچک (مانند برچسب آموزشی) به کودکان داده شد. تمامی دستورالعمل‌ها توسط آزمونگر به زبان ساده برای کودکان توضیح داده شد.

## روش تحلیل داده‌ها

داده‌های گردآوری شده ابتدا با استفاده از شاخص‌های آماری توصیفی (میانگین، انحراف معیار و دامنه تغییرات) بررسی شدند. سپس برای تحلیل روابط بین متغیرها، از آزمون همبستگی اسپیرمن و رگرسیون چندمتغیره استفاده شد تا سهم نسبی هر نوع حافظه در پیش‌بینی موفقیت ریاضی دانش‌آموزان در هر گروه سنی مشخص شود. برای اطمینان از اعتبار نتایج، کنترل متغیر هوش نیز در مدل‌های رگرسیونی لحاظ شد.

## یافته‌ها

تحلیل‌های آماری نشان داد که نقش انواع حافظه در عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ابتدایی شهرستان تنکابن در سه مقطع تحصیلی متفاوت و پویا است. در پایه اول، حافظه دیداری - فضایی کوتاه مدت مهم‌ترین پیش‌بین عملکرد ریاضی غیررسمی بود و دانش‌آموزانی که توانایی بالاتری در بازسازی توالی‌های فضایی داشتند، در شمارش و مقایسه کمیت‌ها موفق‌تر بودند. در پایه دوم، حافظه کاری دیداری - فضایی نقش کلیدی در ریاضیات رسمی و غیررسمی ایفا کرد و دانش‌آموزان برای حل مسائل چندمرحله‌ای نیازمند پردازش همزمان اطلاعات بودند. در پایه سوم، حافظه کوتاه مدت کلامی اهمیت بیشتری پیدا کرد و دانش‌آموزانی که توانایی بالاتری در یادآوری فوری کلمات و تصاویر داشتند، در یادگیری جداول ضرب و انجام محاسبات سریع موفق‌تر بودند. حافظه بلندمدت کلامی پیش‌بین معناداری نبود که احتمالاً به ماهیت آزمون مربوط می‌شود. به طور کلی، همه انواع حافظه با عملکرد ریاضی

همبستگی مثبت داشتند، اما شدت آن در هر مقطع متفاوت بود. مسیر رشد ریاضی کودکان ابتدا با راهبردهای دیداری - فضایی، سپس با حافظه کاری و در نهایت با حافظه کلامی شکل می‌گیرد.

## بحث و نتیجه‌گیری

نتایج پژوهش بر دانش‌آموزان ابتدایی شهرستان تنکابن نشان داد که نقش انواع حافظه در پیشرفت ریاضی کودکان در طول سه سال ابتدایی تغییر می‌کند. حافظه دیداری - فضایی کوتاه‌مدت در پایه اول بیشترین تأثیر را بر یادگیری مفاهیم ابتدایی و ریاضیات غیررسمی دارد و استفاده از وسایل کمک‌آموزشی دیداری می‌تواند این مهارت را تقویت کند. در پایه دوم، حافظه کاری دیداری - فضایی نقش کلیدی در حل مسائل چندمرحله‌ای و ریاضیات رسمی ایفا می‌کند؛ تمرین‌های گروهی و بازی‌های فکری می‌توانند این توانایی را افزایش دهند. در پایه سوم، حافظه کوتاه‌مدت کلامی اهمیت بیشتری پیدا می‌کند و برای یادگیری جداول ضرب و انجام محاسبات سریع مؤثر است. حافظه بلندمدت کلامی در این پژوهش پیش‌بین معناداری برای موفقیت ریاضی نبود. به طور کلی، رشد ریاضی کودکان مرحله‌ای است و هر نوع حافظه در دوره‌ای خاص نقش اصلی را دارد؛ بنابراین طراحی فعالیت‌های آموزشی متناسب با نوع حافظه و پایه تحصیلی می‌تواند کارایی نظام آموزشی را افزایش دهد.

## جمع‌بندی

پژوهش حاضر با بررسی دانش‌آموزان شهرستان تنکابن نشان داد که نقش انواع حافظه در رشد ریاضیات دائماً در حال تغییر است و این تغییرات با محتوای آموزشی مدارس هماهنگ می‌شود. بر این اساس، مداخلات آموزشی برای تقویت حافظه باید متناسب با سن و پایه تحصیلی طراحی شوند. نتایج این مطالعه می‌تواند راهنمایی برای معلمان و برنامه‌ریزان آموزشی در جهت بهبود عملکرد ریاضی دانش‌آموزان باشد.

## منابع

- ۱- ن. خدای، تأثیر آموزش حافظه فعال و فراشناخت بر عملکرد تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان دارای ناتوانی یادگیری ریاضی، دانش و پژوهش در روان‌شناسی کاربردی، ۲ (۱) ۵۳-۴۵، ۱۳۹۰.
  - ۲- م. عزیزیان، ز. مردانی، س. طاهرزاده قهفرخی، اثربخشی مداخلات کارکردهای اجرایی بر انعطاف‌پذیری شناختی، حافظه‌کاری و پیشرفت تحصیلی ریاضی در دانش‌آموزان با عملکرد هوشی مرزی، مطالعات بین‌رشته‌ای در آموزش، ۹۱-۱۲۶، ۱۴۰۲.
  - ۳- ل. کاشانی وحید، س. وکیلی، ح. بخشی تکانلو، تأثیر برنامه خانواده‌محور مبتنی بر بازی‌های شناختی بر حافظه کاری و عملکرد ریاضی دانش‌آموزان با اختلال ریاضی، روان‌شناسی افراد استثنایی، ۱۰ (۳۸)، ۱۴۳-۱۶۸، ۱۳۹۹.
4. I. E. J. I. Coolen (2023) How Memory Counts in Mathematical Development, Journal of . Cognition, 6(1), 1-20.
5. A. Menon (2016) Working memory in children's math learning and its disruption in dyscalculia, Current Opinion in Behavioral Sciences, 10, 65-70.

## درک دانش آموزان از راهبردهای مؤثر یادگیری ریاضی در شهرستان تنکابن

آرمین حاتم جعفری، فارغ التحصیل کارشناسی روانشناسی

[hjarmin@gmail.com](mailto:hjarmin@gmail.com)

**چکیده:** این پژوهش با هدف بررسی درک و نگرش دانش آموزان پایه هفتم شهرستان تنکابن نسبت به دو راهبرد یادگیری مؤثر در ریاضیات، یعنی تمرین فاصله دار و تمرین درهم آمیخته، انجام شد. جامعه آماری شامل ۱۸۰ دانش آموز از چهار مدرسه دولتی و غیردولتی بود که با روش نمونه گیری تصادفی خوشه ای انتخاب شدند. داده ها با استفاده از دو ابزار گردآوری شد: برگه های تمرینی ریاضی (شامل تمرین فاصله دار و تمرین درهم آمیخته) و پرسش نامه ای ادراک و نگرش نسبت به راهبردهای یادگیری ریاضی با ۲۵ سؤال در مقیاس پنج درجه ای لیکرت. نتایج نشان داد که حدود ۶۸٪ از دانش آموزان تمرین فاصله دار را لذتبخش تر از تمرین فشرده می دانستند، اما تنها ۵۲٪ آن را مؤثر در یادگیری ریاضی ارزیابی کردند. در مقابل، ۷۰٪ تمرین درهم آمیخته را دشوار و ۶۲٪ آن را وقت گیر تلقی کردند، و تنها ۲۷٪ اثر واقعی آن را تأیید نمودند. بررسی همبستگی نشان داد که هرچه ادراک دشواری تمرین بیشتر بود، علاقه مندی و احساس اثربخشی کاهش می یافت. یافته ها حاکی از آن است که اصلاح برداشتهای نادرست و ارتقای نگرش مثبت نسبت به راهبردهای فاصله دار و درهم آمیخته می تواند موجب بهبود یادگیری پایدار ریاضیات در دانش آموزان شود.

**کلمات کلیدی:** تمرین فاصله دار، تمرین درهم آمیخته، نگرش دانش آموزان، یادگیری ریاضیات.

### مقدمه

یادگیری ریاضی یکی از چالش برانگیزترین فرایندهای آموزشی برای دانش آموزان در مقاطع متوسطه است. بسیاری از دانش آموزان با وجود صرف زمان زیاد برای مطالعه و تمرین، در درک عمیق مفاهیم یا به کارگیری آموخته ها در مسائل جدید دچار مشکل می شوند. این مسئله تنها به توانایی ذهنی یا استعداد فردی مربوط نیست، بلکه تا حد زیادی به شیوه و راهبرد یادگیری وابسته است. به عبارت دیگر، نحوه تمرین کردن می تواند به اندازه ی محتوای تمرین در موفقیت تحصیلی مؤثر باشد. در سال های اخیر، توجه پژوهشگران آموزشی به راهبردهایی جلب شده است که نه تنها موجب افزایش سرعت یادگیری می شوند، بلکه پایداری آن را نیز تضمین می کنند. دو مورد از مهم ترین این راهبردها، تمرین فاصله دار و تمرین درهم آمیخته هستند. در تمرین فاصله دار، یادگیرنده مسائل مشابه را در فواصل زمانی مختلف تمرین می کند و از تکرارهای متوالی اجتناب می ورزد. در تمرین درهم آمیخته نیز انواع مختلف مسائل به طور ترکیبی ارائه می شوند تا دانش آموز بتواند میان مفاهیم مشابه تمایز قائل شود و راه حل مناسب را انتخاب کند. این دو روش به تقویت حافظه بلندمدت، افزایش دقت، و بهبود توانایی حل مسئله کمک می کنند. با وجود اثربخشی علمی این دو راهبرد، شواهد نشان می دهد که بسیاری از دانش آموزان تمایلی به استفاده از آن ها ندارند. آنان معمولاً تمرین های متوالی و فشرده را آسان تر و مؤثرتر می پندارند، زیرا در کوتاه مدت احساس تسلط بیشتری دارند. این در حالی است که دشواری ظاهری تمرین های فاصله دار و درهم آمیخته در واقع نشانه ی «یادگیری عمیق تر» است، نه ناکارآمدی روش. چنین برداشتهای نادرست سبب می شود که راهبردهای مؤثر کمتر مورد استفاده قرار گیرند و یادگیری پایدار

با مشکل مواجه شود. پژوهش حاضر با هدف بررسی درک و نگرش دانش‌آموزان پایه هفتم شهرستان تنکابن نسبت به راهبردهای تمرین فاصله‌دار و تمرین درهم‌آمیخته انجام شده است. هدف اصلی این مطالعه آن است که روشن سازد دانش‌آموزان تا چه حد از مزایای واقعی این روش‌ها آگاه‌اند، میزان علاقه‌مندی یا مقاومت آنان در برابر آن‌ها چگونه است، و چه عواملی بر قضاوت آنان درباره‌ی اثربخشی هر روش تأثیر می‌گذارد. یافته‌های این پژوهش می‌تواند در طراحی برنامه‌های آموزشی مؤثر و ارتقای شیوه‌های یادگیری ریاضی در مدارس منطقه مفید واقع شود.

## پیشینه

در سال‌های اخیر شواهد تجربی قوی نشان داده‌اند که دو راهبرد «تمرین فاصله‌دار و تمرین درهم‌آمیخته می‌توانند یادگیری ریاضیات را به‌طور قابل‌توجهی بهبود بخشند. مطالعات کلاسیک و کارگاهی نشان می‌دهند که وقتی تمرین‌ها به‌صورت پراکنده در زمان توزیع شوند یا انواع مختلف مسئله در یک مجموعه تمرین با هم ترکیب شوند، یادگیری بلندمدت و توان تشخیص روش مناسب حل مسئله افزایش می‌یابد. پیشینه پژوهش در زمینه تأثیر روش‌های تمرینی بر یادگیری ریاضی در ایران نشان می‌دهد که استفاده از راهبردهای متنوع آموزشی می‌تواند نقش مؤثری در ارتقای یادگیری دانش‌آموزان داشته باشد. پژوهش «تأثیر آموزش به روش یادگیری فاصله‌دار بر یادگیری، یادداری و علاقه به درس ریاضی دانش‌آموزان دختر کم‌توان ذهنی آموزش‌پذیر» نشان داد که به‌کارگیری روش فاصله‌دار موجب افزایش یادگیری، یادداری و علاقه دانش‌آموزان به درس ریاضی می‌شود [۳]. همچنین مطالعه‌ای دیگر که «تأثیر بازی‌های آموزشی-ورزشی و حرکات ریتمیک بر مهارت‌های ریاضی دانش‌آموزان دختر دارای اختلال یادگیری ریاضی» را بررسی کرده بود، نشان داد استفاده از فعالیت‌های حرکتی و بازی‌های آموزشی می‌تواند مهارت‌های ریاضی دانش‌آموزان را بهبود بخشد [۲]. افزون بر این، پژوهش «تأثیر آموزش تلفیقی ریاضی با بازی‌های حرکتی بر یادگیری درس ریاضی و عملکرد شناختی دانش‌آموزان» بیانگر این است که ادغام آموزش ریاضی با بازی‌های حرکتی، علاوه بر افزایش نمرات ریاضی، موجب بهبود عملکردهای شناختی دانش‌آموزان نیز می‌شود [۱]. در مجموع، این مطالعات داخلی نشان می‌دهد که روش‌های متنوع تمرین، اعم از فاصله‌دار، بازی‌های حرکتی و تلفیق آن‌ها با آموزش ریاضی، می‌توانند نقش مؤثری در ارتقای یادگیری و عملکرد شناختی دانش‌آموزان داشته باشند و مبنای مناسبی برای پژوهش‌های محلی و طراحی برنامه‌های آموزشی فراهم می‌آورند در حوزه بین‌المللی، روه‌ر و تی‌لور در بررسی اثر نحوه‌ی تنظیم تمرین‌های ریاضی نشان دادند که تمرین درهم‌آمیخته، در مقایسه با تمرین‌های بلوکی، موجب افزایش درک مفهومی و توانایی حل مسائل جدید در دانش‌آموزان می‌شود [4]. همچنین هارتویگ و روه‌ر در مطالعه‌ای بر روی دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم دریافتند که با وجود اثربخشی بالای تمرین فاصله‌دار و تمرین درهم‌آمیخته، بیشتر دانش‌آموزان درک دقیقی از کاربرد این روش‌ها ندارند و تمرین‌های دشوارتر را به اشتباه کم‌اثرتر می‌پندارند [5]. در مجموع، نتایج پژوهش‌های داخلی و خارجی نشان می‌دهد که راهبردهای فاصله‌دار و درهم‌آمیخته هر دو در بهبود عملکرد یادگیری مؤثرند، اما آگاهی و نگرش دانش‌آموزان نسبت به آن‌ها همواره با واقعیت علمی منطبق نیست. با توجه به محدود بودن پژوهش‌های انجام‌شده در ایران در زمینه‌ی ادراک دانش‌آموزان از این روش‌ها، انجام مطالعه‌ای در سطح محلی مانند شهرستان تنکابن می‌تواند به شناخت بهتر عوامل شناختی و عاطفی مؤثر بر پذیرش این راهبردهای یادگیری کمک کند.

## روش شناسی

پژوهش حاضر با استفاده از روش پیمایشی و با مشارکت ۱۸۰ دانش‌آموز پایه هفتم مدارس شهرستان تنکابن در سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ انجام شد. جامعه‌ی آماری شامل دانش‌آموزان مدارس دولتی و غیردولتی این شهرستان بود. برای انتخاب نمونه، از روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای استفاده شد؛ بدین صورت که چهار مدرسه به طور تصادفی از میان مدارس شهرستان انتخاب شدند (دو مدرسه دخترانه و دو مدرسه پسرانه). در هر مدرسه حدود ۴۵ دانش‌آموز شرکت داشتند.

## ابزار گردآوری داده‌ها

برای گردآوری داده‌ها، دو ابزار اصلی مورد استفاده قرار گرفت:

### ۱- برگه‌های تمرینی ریاضی:

این برگه‌ها توسط پژوهشگر طراحی و شامل مجموعه‌ای از مسائل متناسب با محتوای کتاب ریاضی پایه هفتم بودند.

در بخش نخست، دانش‌آموزان با روش تمرین فاصله‌دار کار کردند؛ یعنی مجموعه‌ای از مسائل مشابه را در سه نوبت جداگانه (با فاصله‌ی دو تا سه روزه) حل نمودند. در بخش دوم، تمرین‌ها به صورت درهم‌آمیخته طراحی شدند؛ به‌گونه‌ای که مسائل مربوط به چند فصل مختلف (اعداد صحیح، نسبت و تناسب، هندسه و جبر) در یک مجموعه تمرینی گنجانده شد. هدف از این طراحی آن بود که دانش‌آموزان هر دو نوع تجربه را در شرایط مشابه آموزشی کسب کنند.

### ۲- پرسش‌نامه‌ی ادراک و نگرش نسبت به راهبردهای یادگیری ریاضی:

این پرسش‌نامه شامل ۲۵ سؤال در مقیاس پنج‌درجه‌ای لیکرت (از «کاملاً مخالفم» تا «کاملاً موافقم») بود و برای سنجش برداشت دانش‌آموزان از چهار جنبه طراحی شد:

الف) ادراک اثربخشی روش‌ها (۵ سؤال)، ب) علاقه‌مندی و رضایت از تمرین‌ها (۶ سؤال)، ج) درک دشواری و میزان خستگی ذهنی (۷ سؤال)، د) تمایل به استفاده از روش در آینده (۷ سؤال). پایایی درونی پرسش‌نامه با استفاده از آلفای کرونباخ برابر با  $0/82$  به دست آمد که نشان‌دهنده‌ی پایایی مطلوب ابزار بود. همچنین روایی آن توسط سه نفر از اساتید گروه روان‌شناسی و آموزش ریاضی تأیید شد.

## شیوه اجرا

اجرای پژوهش در طول سه هفته انجام شد. در مرحله‌ی نخست، هماهنگی‌های لازم با مدیران مدارس و معلمان ریاضی صورت گرفت. سپس دانش‌آموزان به‌صورت گروهی در کلاس درس در فعالیت‌های تمرینی شرکت کردند. در جلسات تمرین فاصله‌دار، هر نوبت تمرین حدود ۲۰ دقیقه به طول انجامید و بین هر نوبت دو تا سه روز فاصله وجود داشت. در مقابل، تمرین درهم‌آمیخته در یک جلسه‌ی ۴۰ دقیقه‌ای انجام شد. پس از پایان تمرین‌ها، پرسش‌نامه در اختیار دانش‌آموزان قرار گرفت تا برداشت خود را از اثربخشی، میزان دشواری، و علاقه‌مندی به هر روش بیان کنند.

## روش تجزیه و تحلیل داده‌ها

برای تحلیل داده‌ها از آمار توصیفی شامل میانگین، انحراف معیار، فراوانی و درصد استفاده شد. همچنین برای بررسی ارتباط بین متغیرها و مقایسه برداشت دانش‌آموزان نسبت به دو روش تمرین، از آزمون مجذور خی- $\chi^2$  (Square) استفاده گردید. تمامی داده‌ها با استفاده از نرم‌افزار SPSS تحلیل شدند.

## یافته‌ها

نتایج نشان داد که حدود ۶۸٪ از دانش‌آموزان تمرین فاصله‌دار را لذت‌بخش‌تر از تمرین فشرده می‌دانستند، اما تنها ۵۲٪ از آنان این روش را واقعاً مؤثر در یادگیری ریاضی تلقی کردند. در مقابل، ۷۰٪ از دانش‌آموزان تمرین درهم آمیخته را دشوار، ۶۲٪ آن را وقت‌گیر و تنها ۲۷٪ آن را مؤثر دانستند. اغلب دانش‌آموزان (حدود ۶۶٪) (تمرین بلوکی را به دلیل سادگی و پیش‌بینی‌پذیری بیشتر ترجیح دادند. بررسی همبستگی میان ادراک دشواری و علاقه‌مندی نشان داد که هرچه تمرین سخت‌تر درک می‌شد، میزان علاقه‌مندی و احساس اثربخشی کاهش می‌یافت.

## بحث و نتیجه‌گیری

یافته‌های پژوهش حاضر نشان می‌دهد که بخش عمده‌ای از دانش‌آموزان شهرستان تنکابن درک درستی از اثربخشی راهبردهای علمی یادگیری ندارند. در حالی که تمرین فاصله‌دار به صورت نسبی مورد توجه و پذیرش است، تمرین درهم‌آمیخته همچنان به دلیل برداشت‌های نادرست، سختی ادراک‌شده و زمان‌بر بودن کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. این موضوع نشان می‌دهد که لازم است معلمان و نظام آموزشی از طریق آموزش مستقیم، نمایش اثربخشی عملی این روش‌ها و طراحی فعالیت‌های جذاب‌تر) مانند بازی‌سازی و کار گروهی (به اصلاح نگرش‌های شناختی و عاطفی دانش‌آموزان بپردازند. به‌طور کلی، می‌توان گفت که ارتقای آگاهی متاکاگنیتیو دانش‌آموزان نسبت به راهبردهای یادگیری و تبیین منافع بلندمدت آن‌ها می‌تواند نقش مؤثری در بهبود عملکرد تحصیلی در ریاضی و سایر دروس ایفا کند.

## منابع

- ۱- ل. ذوقی، ا. گودرزی و م. رجبی نژاد، تاثیر بازی‌های آموزشی-ورزشی و حرکات ریتمیک بر مهارت‌های ریاضی دانش‌آموزان دارای اختلال یادگیری ریاضی. فصلنامه روان‌شناسی تربیتی (59) 17, 375-404, 1400.
- ۲- ط. ندایی و م. حسین زاده، تاثیر آموزش تلفیقی ریاضی با بازی‌های حرکتی بر پیشرفت یادگیری ریاضی و عملکرد شناختی دانش‌آموزان، پژوهش در ورزش تربیتی 9(25) 136-111, 1400.
- ۳- ب. یاسبلاخی شراهی، ح. چلداوی، آ. خزائی، تاثیر آموزش به روش یادگیری فاصله‌دار بر یادگیری یادداری و علاقه به درس ریاضی دانش‌آموزان دختر کم‌توان ذهنی آموزش پذیرش شهر اراک، فصلنامه کودکان استثنایی، 3(24), 21-36, 1403.
4. Hartwig, M. K. and Rohrer, D. (2025). "Students' perceptions of effective math learning strategies." In Proceedings of the International Conference on Educational Psychology and Learning Sciences, NoorMags Academic Press,. 1-12.
5. Rohrer, D. and Taylor, K. (2007) The shuffling of mathematics problems improves learning, In Proceedings of the Annual Meeting of the International Society for Instructional Science, Springer, 481-498

## اثربخشی برنامه توانبخشی شناختی بر بهبود عملکرد ریاضی دانش آموزان ADHD

محمد محمودوند<sup>۱</sup>، کارشناسی ارشد روانشناسی بالینی کودک و نوجوان، دانشگاه پیام نور بوشهر، بوشهر، ایران  
mohamadmahmodvand@yahoo.com

### چکیده:

پژوهش حاضر با هدف بررسی اثربخشی برنامه توانبخشی شناختی بر بهبود عملکرد ریاضی دانش آموزان ADHD انجام شده است. روش تحقیق در این پژوهش نیمه آزمایشی با بهره گیری از روش پیش آزمون - پس آزمون با گروه کنترل بوده که جامعه آماری آن شامل کلیه دانش آموزان دختر و پسر دارای نشانه های نارسایی توجه / بیش فعالی (ADHD) در بازه سنی ۷ تا ۱۱ ساله مقطع ابتدایی شهر کرمان به تعداد (۲۱۰ نفر برای کودکان ADHD) نفر می باشند، که با روش نمونه گیری خوشه ای تعداد ۳۰ نفر به عنوان نمونه مورد بررسی قرار گرفت. ابزار پژوهش شامل پرسشنامه ی ۲۶ سوالی بیش فعالی کانرز (۱۹۹۹)، پرسشنامه ۹۷ سوالی CSI-4 فرم والدین (۱۹۹۴) و معدل (ارزشیابی توصیفی) دانش آموزان می باشد. روایی پرسشنامه ها از نوع محتوایی و پایایی آنها با استفاده از ضریب آلفای کرونباخ برآورد شده است. برای تحلیل آماری داده ها از آمار توصیفی و آمار استنباطی شامل آزمون آماری تحلیل کواریانس (ANCOVA) استفاده شده است. نتایج تحلیل کواریانس نشان داد که برنامه توانبخشی شناختی بر بهبود عملکرد ریاضی دانش آموزان ADHD اثر معناداری دارد.

**کلمات کلیدی:** توانبخشی شناختی، اختلال یادگیری ریاضی، دانش آموزان ADHD



## ۱. مقدمه

چالش های روانشناختی متعدد حوزه کودکان و خانواده های آنان، و در پی آن، کاوش مداخله های موثر، ایمن و کم هزینه در جهت غلبه بر این چالش ها، آشفته گی ها و پریشانی های حاصله در این مقطع سنی، بخش اعظمی از پژوهش های متخصصان روانپزشکی و روانشناسان تربیتی و بالینی را به خود اختصاص داده است (هدلیچ، کایرف و لمپین، ۲۰۱۰؛ سیدمن و همکاران<sup>۱</sup>، ۲۰۰۶؛ چن و لاو<sup>۲</sup>، ۲۰۰۶؛ سانا و همکاران<sup>۳</sup>، ۲۰۱۶؛ بروهن و همکاران<sup>۴</sup>، ۲۰۱۰). یکی از این چالش ها اختلال نارسایی توجه/ بیش فعالی<sup>۱</sup> (ADHD) است. ADHD یا اصطلاح مرسوم تر آن؛ بیش فعالی، برای بیشتر مردم به خصوص والدین و معلمان، واژه ای آشناست. کودکی که در حرکت دائم است، با انگشتانش ضربه می زند، پاهایش وول می خورد، دیگران را هل می دهد، بدون دلیل کنترل خود را از دست می دهد و بی قراری می کند، اغلب بیش فعال نامیده می شود. این کودکان معمولاً دشواری هایی در تمرکز بر تکالیف دارند، زمانی که این مشکلات شدید و مداوم باشد، این کودکان واجد دریافت ملاک های تشخیص اختلال ADHD می شوند (کرینگ و همکاران، ۲۰۰۷، به نقل از آزاده فر، آزاده فر و عمرانی پور، ۱۳۹۳: ۱۴۲). پژوهش های همه گیر شناسی آمارهای متعددی از این اختلال را ارائه کرده اند. بسته به تعریفی که از این اختلال توسط محققان مختلف صورت پذیرفته، درصد شیوع آن حتی تا ۱۵ درصد نیز گزارش شده است (برکلی، ۲۰۰۶، به نقل از آزاده فر، آزاده فر و عمرانی پور، ۱۳۹۳: ۱۴۲). آنچه روشن است این است که این اختلال می تواند ابعاد گوناگون زندگی دانش آموزان را تحت تاثیر خود قرار دهد. از این رو محققان همواره در پی پاسخی به چنین پرسش هایی بوده اند که تظاهرات بالینی این اختلال در کودکان سنین مختلف چگونه است؟ و اینکه، در کدام حیطة ها از عملکرد کودک (تحصیلی و غیر تحصیلی)، بیشترین نقص را ایجاد می کند؟ مروری بر مطالعات انجام شده در این حوزه ما را به مفهوم اختلالات یادگیری رهنمون می سازد. اختلالات یادگیری زمانی تشخیص داده می شوند که پیشرفت در آزمون های استاندارد شده برای خواندن، ریاضیات و بیان نوشتاری به طور قابل ملاحظه ای زیر حد مورد انتظار بر حسب سن، سطح هوشی و تحصیلات می باشد (نوری زاده و همکاران، ۱۳۹۱: ۱۲۴). این اصطلاح که انواع ویژه ای از مشکلات یادگیری را توصیف می کند، نخستین بار در سال ۱۹۶۳ توسط پروفیسور ساموئل کرک ابداع شد (اهنگر قربانی و همکاران، ۱۳۹۴: ۱۶۴). اختلال یادگیری دارای ماهیتی ناهمگن است که این ناهمگنی در الگوهای تحصیلی، قوت و ضعف پردازش اطلاعات و همچنین در سیستم های طبقه بندی اصلی به عنوان اختلالات تحصیلی حوزه ی خاص مانند اختلال خواندن و یا اختلال ریاضی منعکس می شود (کسی، ۲۰۱۲، به نقل از نوری زاده و همکاران، ۱۳۹۱: ۱۲۴). اختلال در یادگیری ریاضیات به اشکال مختلف، برای مثال دشواری در تعیین اندازه های، نام گذاری اعداد ریاضی، شمارش، مقایسه کردن، بازی با اشیاء و محاسبات ذهنی و عملی خود را نشان می دهد (لیون، ۲۰۰۳، به نقل از موحدی، ۱۳۹۸). این اختلال نقایصی در چهار گروه مهارت های زبانی، ادراکی، ریاضی و توجهی شناسایی شده اند. اصطلاحات دیگری که برای این اختلال به کار رفته اند عبارتند از؛ سندروم گروتمن، محاسبه پریشی، ناتوانی در حساب و اختلال حساب مربوط به رشد (سادوک، سادوک و روئیز، ۱۳۹۴).

بدیهی است این عامل نیز همسو با ADHD می تواند ظرفیت شناختی دانش آموزان را در فرایند تحصیل، دچار نوسانات جدی نماید. گفته شده است که توانایی های شناختی اهمیت محوری در فرایند یادگیری داشته، وابستگی تنگاتنگی با پیشرفت تحصیلی دانش آموزان دارند. توانایی شناختی به عملکرد ذهن برای تغییر دادن تفکر یا توجه در پاسخ به تغییر اهداف و یا محرک محیطی گفته می شود (بگلی، ملکی و قائینی، ۱۳۹۶: ۹۱). در واقع، توانایی شناختی، توانایی تغییر دیدگاه یا سازگاری انطباقی فرد با قوانین، تقاضاها یا شرایط محیطی جدید تعریف شده است (اسکندری، پژوهی نیا و ابویسمانی، ۱۳۹۵: ۲۰). مروری بر پژوهش ها و مداخله های انجام شده در زمینه اختلالات یادگیری و بیماری های دوران کودکی، به صورت برجسته ای توجه ما را در به کارگیری این شیوه درمانی (توانبخشی شناختی) رهنمون می سازد. بدین روی، ارجمند نیا، شریفی و رستمی (۱۳۹۳) در پژوهشی تحت عنوان اثربخشی برنامه ی تمرین رایانه ای شناختی بر عملکرد حافظه ی فعال دیداری فضایی دانش آموزان با مشکلات ریاضی، به بررسی ۲۴ دانش آموز پایه سوم و چهارم ابتدایی به صورت غیر تصادفی در دو گروه آزمایش و کنترل پرداختند. نتایج تحقیق ایشان حاکی از آن بود که مداخله رایانه ای شناختی تاثیر معناداری بر روی ارتقای عملکرد حافظه فعال دانش آموزان با مشکلات ریاضی داشته است. شهیم و هارون رشیدی (۱۳۸۶) در پژوهشی به مقایسه عملکرد کودکان دارای اختلالات یادگیری کلامی و غیر کلامی پرداخته است. در بررسی ایشان میانگین نمرات گروه دارای اختلالات یادگیری غیر کلامی در خرده آزمونهای اطلاعات، شباهت، حساب و واژه ها از میانگین نمرات گروه دارای اختلالات یادگیری کلامی به طور معنادار بالاتر است و در خرده آزمون

- 1- Hadlich & Kirov & Lampinen
- 2- Seidman et al
- 3- Chan & Chan & Law
- 4- Sanaa et al
- 5- Brohan et al

حساب بر خلاف سایر زیرآزمون های میانگین نمرات گروه دارای اختلالات یادگیری غیر کلامی از میانگین نمرات گروه اختلالات یادگیری کلامی پایین تر است. قمری گیوی، نریمانی و ربیعی (۱۳۸۸) در پژوهشی تحت عنوان مقایسه کارکردهای اجرایی در کودکان مبتلا به اختلال نقص توجه بیش فعالی، ناتوانی در یادگیری و کودکان بهنجار، ۶۰ نفر از دانش آموزان سوم ابتدایی تا اول راهنمایی شهر اردبیل را در سه گروه متفاوت با استفاده از روش خوشه ای چند مرحله ای مورد بررسی قرار دادند. نتایج پژوهش ایشان نشان داد که تفاوت معناداری بین کارکردهای اجرایی در بین سه گروه وجود دارد. دیلیبرتو، بتی، فلورز و الگوزین (2008) در بررسی تاثیر آموزش مهارت های هجایی بر پیشرفت خواندن در دانش آموزان مدارس راهنمایی که دارای اختلال خواندن و بیش فعالی بودند، به این نتیجه رسیدند که آموزش مهارت های هجایی موجب پیشرفت مطلوب در هر سه جنبه خواندن شده است. غباری بناب، افروز، حسن زاده، بخشی و پیرزادی (۱۳۹۱) در تحقیقی با عنوان تاثیر آموزش راهبردهای فراشناختی فعال تفکرمدارانه و خودنظارتی بر درک مطلب دانش آموزان با مشکلات خواندن در ۳۰ نفر از دانش آموزان پایه پنجم ابتدایی با استفاده از روش نمونه گیری خوشه ای چند مرحله ای و با روش تصادفی ساده در دو گروه ۱۵ نفره آزمایش و گواه مورد بررسی قرار دادند. نتایج پژوهش ایشان حاکی از تاثیر مثبت آموزش راهبردهای فراشناختی فعال تفکرمدارانه و خودنظارتی بر درک مطلب آزمودنی های گروه آزمایش در مقایسه با گروه گواه بود. قربان پور، پاکدامن، رحمانی و حسینی (۱۳۹۲). در بررسی خود با عنوان تاثیر آموزش حرکات و بازی های رتمیک بر کارکرد حافظه کوتاه مدت و حافظه شنیداری دانش آموزان مبتلا به اختلالات یادگیری، به این نتیجه دست یافت که آموزش حرکات و بازی های رتمیک بر بهبود حافظه کوتاه مدت و حافظه شنیداری دانش آموزان مبتلا به اختلالات یادگیری تاثیر مثبت دارد.

با توجه به آنچه بیان شد و نیز با نگرش به اهمیت موضوع، ما در این پژوهش برآنیم تا اثربخشی برنامه توانبخشی شناختی بر بهبود عملکرد ریاضی دانش آموزان ADHD شهر کرمان را به بوته ی آزمایش گذاریم، لذا در صدد پاسخ گویی به این پرسش بر می آیم که:

آیا برنامه توانبخشی شناختی بر بهبود عملکرد ریاضی دانش آموزان ADHD شهر کرمان تاثیر اثربخشی دارد؟

## فرضیه پژوهش

برنامه توانبخشی شناختی بر بهبود عملکرد ریاضی دانش آموزان ADHD شهر کرمان تاثیر دارد.

## روش شناسی پژوهش

با توجه به ماهیت پژوهش حاضر که بررسی اثر برنامه توانبخشی شناختی بر بهبود عملکرد ریاضی دانش آموزان ADHD می باشد، روش تحقیقی مورد استفاده از نوع نیمه آزمایشی و با بهره گیری از روش پیش آزمون - پس آزمون با گروه کنترل است. جامعه آماری شامل کلیه دانش آموزان دختر و پسر دارای نشانه های نارسایی توجه / بیش فعالی (ADHD) در بازه سنی ۷ تا ۱۱ ساله مقطع ابتدایی شهر کرمان به تعداد (۲۱۰ نفر برای کودکان ADHD) نفر می باشند، که با روش نمونه گیری خوشه ای تعداد ۳۰ نفر به عنوان نمونه در دو گروه ۱۵ نفری آزمایش و کنترل کاربندی شدند. لازم به ذکر است که تجزیه و تحلیل داده ها با نرم افزار SPSS نسخه ۲۳ انجام گرفت.

## یافته های پژوهش

جدول شماره (۱). نتایج تحلیل کوواریانس برای بررسی تفاوت پس آزمون عملکرد ریاضی در دو گروه آزمایش و کنترل

| منبع              | مجموع مجزورات کل (ss) | درجه آزادی | میانگین مجزورات (Ms) | F       | sig   |
|-------------------|-----------------------|------------|----------------------|---------|-------|
| گروه عملکرد ریاضی | ۱۹۰۳/۹۶۳              | ۱          | ۱۹۰۳/۹۶۳             | ۳۶۷/۲۵۶ | ۰/۰۰۰ |
| خطا               | ۱۲۹/۶۰۷               | ۲۵         | ۱۰/۲۴۱               |         |       |
| کل                | ۲۶۳۲۰/۰۰۰             | ۳۰         |                      |         |       |

نتایج جدول (۱) نشان می دهد که با کنترل پیش آزمون بین دانش آموزان گروه آزمایش و گروه کنترل از لحاظ عملکرد ریاضی تفاوت معناداری وجود دارد (partial Eta = ۰/۹۳۸ و sig = ۰/۰۰۰ و  $F(1, 25) = ۳۶۷/۲۵۶$ ). به این معنی که برنامه توانبخشی شناختی بر بهبود عملکرد ریاضی دانش آموزان ADHD اثر معناداری دارد.

## بحث و نتیجه گیری

همانطور که اشاره شد توانبخشی شناختی زمینه ساز رشد، شکوفایی و بهبود عملکرد فرد در تمامی جنبه های زندگی می شود. بر این اساس، پژوهش حاضر با هدف بررسی اثربخشی برنامه توانبخشی شناختی بر بهبود عملکرد ریاضی دانش آموزان ADHD بوده است. بدین روی، نتایج آزمون کوواریانس نشان داد که برنامه توانبخشی شناختی بر بهبود عملکرد ریاضی دانش آموزان ADHD شهر کرمان تاثیر معناداری دارد. این نتیجه با نتایج پژوهش ارجمند نیا، شریفی و رستمی (۱۳۹۳)، شهیم و هارون رشیدی (۱۳۸۶) و دیلیبرتو، بتی، فلورز و الگوزین (۲۰۰۸) همخوانی دارد. در تبیین این نتیجه می توان بیان کرد که از آنجایی که توانبخشی شناختی پایه و اساس اقدام در جهت رفع کاستی ها در حوزه تعلیم و تربیت در نظر گرفته شده است، لذا شدت و ضعف این سازه می تواند اثرات قابل توجهی در زندگی تحصیلی دانش آموزان، به ویژه کودکان ADHD ایجاد نماید. چرا که به گفته دلفینو (۲۰۱۹)، توانبخشی دانش آموزان به یک تعامل معنادار در کل محیط یادگیری اشاره دارد که می تواند به صورت رابطه ی بین دانش آموز و مدرسه، معلمان، همسالان، آموزش و برنامه درسی درک شود. از این رو، بهبود مهارت های شناختی در این بستر، شاید شرط لازم برای ایجاد هرگونه تغییر مثبتی در کاهش اختلالات ریاضی در این قشر از دانش آموزان (ADHD) باشد.

## منابع

- ۱- آزاده فر، شیرین، آزاده فر، لیلا، عمرانی پور، علی. (۱۳۹۳). رابطه بین محیط کالبدی معماری با نشانه های اختلال بیش فعالی/ نارسایی توجه در کودکان ۶-۱۰ سال تهران، دو فصلنامه معماری ایران، شماره ۶، صص ۱۵۸-۱۴۱.
- ۲- آهانگر قربانی، زهره، حسین خانزاده، حسین، خسروجاوید، مهناز، صادقی، عباس. (۱۳۹۴). اثربخشی آموزش کارکردهای اجرایی بر مهارت های اجتماعی دانش آموزان با نارساخوانی، فصلنامه افراد استثنایی، سال پنجم، شماره ۱۹، صص ۱۸۶-۱۶۴.
- ۳- اسکندری، حسین، پژوهی نیا، شیما، ابویسمانی، یلدا. (۱۳۹۵). تبیین مشکلات روانی مبتنی بر انعطاف پذیری شناختی و تمایز یافتگی خود، فصلنامه شفای خاتم، دوره ۴، شماره ۳، صص ۲۷-۱۹.
- ۴- ارجمندنیا، علی اکبر، شریفی، علی، رستمی، رضا. (۱۳۹۳). اثربخشی برنامه ی تمرین رایانه ای شناختی بر عملکرد حافظه ی فعال دیداری فضایی دانش آموزان با مشکلات ریاضی، مجله ناتوانی های یادگیری، دوره ۳، شماره ۴، صص ۲۴-۶.
- ۵- بگلری، مرتضی، ملکی، محمد، قائینی، سعید. (۱۳۹۶). ارتباط بین آمادگی قلبی - تنفسی با انعطاف پذیری شناختی، مطالعات روانشناسی ورزشی، شماره ۲۱، صص ۱۰۲-۸۹.
- ۶- سادوک، بنجامین، سادوک، ویرجینیا، روئیز، پدرو. (۱۳۹۴). خلاصه روان روانپزشکی کاپلان و سادوک بر اساس DSM-5، ترجمه مهدی و حمزه گنجی، تهران: نشر ساوالان.
- ۷- شهیم، سیما، هارون رشیدی، همایون. (۱۳۸۶). مقایسه عملکرد کودکان دارای اختلالات یادگیری کلامی و غیر کلامی در مقیاس تجدید نظر شده هوشی وکسلر، آزمون دیداری حرکتی بندر گشتالت و مقیاس ریاضیات ایران کی مت، دانش و پژوهش در روانشناسی، شماره ۳۲، صص ۹۰-۶۱.
- ۸- غباری بناب، باقر، افروز، غلامعلی، حسن زاده، سعید، بخشی، جعفر، پیرزادی، حجت. (۱۳۹۱). تاثیر آموزش راهبردهای فراشناختی فعال تفکرمدارانه و خودنظارتی بر درک مطلب دانش آموزان با مشکلات خواندن، مجله ناتوانی های یادگیری، دوره ۱، شماره ۲، صص ۹۷-۷۷.
- ۹- قربان پور، کبری، پاکدامن، مجید، رحمانی، محمد باقر، حسینی، غلامحسین. (۱۳۹۲). تاثیر آموزش حرکات و بازی های رتمیک بر کارکرد حافظه کوتاه مدت و حافظه شنیداری دانش آموزان مبتلا به اختلالات یادگیری، فصلنامه سلامت خانواده، دوره ۱، شماره ۴، صص ۴۴-۳۵.
- ۱۰- قمری گیوی، حسین، نریمانی، محمد، ربیعی، ژاله. (۱۳۸۸). مقایسه کارکردهای اجرایی در کودکان مبتلا به اختلال نقص توجه بیش فعالی، ناتوانی در یادگیری و کودکان بهنجار، مجله اصول بهداشت روانی، سال ۱۱ (۴)، صص ۳۳۳-۳۲۲.
- ۱۱- موحدی، یزدان. (۱۳۹۸). تاثیر توانبخشی شناختی بر بهبود بازداری پاسخ در دانش آموزان مبتلا به ناتوانی یادگیری ریاضی و خواندن دوره ۹، شماره ۲، ۱۵۲-۱۳۲.
- ۱۲- نوری زاده، نرگس، میکائیلی منبع، فرزانه، رستمی، رضا، صادقی، وحید. (۱۳۹۱). اثربخشی نوروفیدبک بر اختلال یادگیری همراه با اختلال نقص توجه / بیش فعالی، مجله ناتوانی های یادگیری، دوره ۲، شماره ۲، صص ۱۵۸-۱۲۳.

13-Brohan, E., Elgie, R., Sartorius, N., Thornicroft, G. (2010). Self - stigma, empowerment and perceived discrimination among people with schizophrenia in 14 European countries: The GAMIAN-Europe study, Schizophrenia Research.



- 13-Brohan, E., Elgie ,R., Sartorius, N., Thornicroft, G. (2010). Self - stigma, empowerme andperceived discrimination among people with schizophrenia in14 European countries: The GAMIAN-Europe study, *Schizophrenia Research*.
- 14-Chan, R., Chen, E., Law, I.W. (2006). Specific executive dysfunction in patient with first episode medication naïve schizophrenia. *Schizophrenia Research*, 82, 51-64.
- 15-Hadlich, S. J., Kirov, A., Lampinen, T.( 2010). What Causes Schizophrenia?, *Big Questions in Science Cor Zonneveld*, 15: 1 – 16
- 16-Seidman, L. J., Thermenos, H. W., Poldrack, R. A., Peace, N. K., Koch, J. K., Faraone, SV., & Tsuang, MT. (2006). Altered brain activation in dorsolateral prefrontal cortex in adolescents and young adults at genetic risk for schizophrenia: An fMRI study of working memory. *Schizophrenia Research*, 85, 58- 72.
- 17- Sanaa ,K., Akmal, K., Bayoumy, H., Shereen, A., Reda, R., Osama, G. (2016). Executive dysfunction in patients with schizophrenia and bipolar disorder, *Middle East Current Psychiatry*: 23(2), 79-84.
- 18-Diliberto, A. Jennifer & Beattie, R. John & Flowers, P. Claudia & Algozzine, F. Robert.(2008). Effects of Teaching Syllable Skills Instruction on Reading Achievement in Struggling Middle School Readers,*Literacy Research and Instruction*, Vol. 48, No. 1, PP.14-27.



# توسعه مهارت‌های حل مسئله ریاضی در مدارس ابتدایی شهرستان تنکابن با استفاده از نمایش تصویری بر مبنای راهبردهای اکتشافی

علی راهی، آموزگار آموزش و پرورش شهرستان تنکابن

[148102190@gmail.com](mailto:148102190@gmail.com)

**چکیده:** یادگیری ریاضیات در دوره ابتدایی پایه‌ای اساسی برای توسعه توانایی‌های شناختی و مهارت‌های حل مسئله دانش‌آموزان است. پژوهش حاضر با هدف بررسی تأثیر استفاده از نمایش‌های تصویری و راهبردهای اکتشافی بر توانایی حل مسئله و استدلال ریاضی دانش‌آموزان پایه پنجم مدارس ابتدایی شهرستان تنکابن انجام شد. روش پژوهش شبه‌تجربی با طرح پیش‌آزمون و پس‌آزمون و گروه کنترل بود و ۲۵ دانش‌آموز به صورت تصادفی در گروه آزمایش قرار گرفتند. آموزش هشت هفته‌ای با استفاده از ابزارهای بصری و کارت‌های راهبردی انجام شد. یافته‌ها نشان داد که میانگین نمرات گروه آزمایش از ۴/۲۵ به ۳۹/۷ افزایش یافت و تفاوت بین گروه‌ها معنادار بود. دانش‌آموزان از راهبردهای متنوعی مانند تجزیه مسئله، ترسیم نمودار ذهنی و بررسی سیستماتیک استفاده کردند و توانایی توضیح فرآیند تفکر آنان به حدود ۷۰ درصد رسید. همچنین مشارکت کلاسی و اعتماد به نفس دانش‌آموزان افزایش یافت. این نتایج نشان می‌دهد که آموزش مبتنی بر نمایش‌های تصویری و راهبردهای اکتشافی، نه تنها مهارت حل مسئله را تقویت می‌کند، بلکه توانایی‌های شناختی بالاتر از جمله تحلیل، برنامه‌ریزی و تفکر نقاد را نیز ارتقا می‌دهد. یافته‌ها با پژوهش‌های داخلی و بین‌المللی همسو است و اهمیت استفاده از ابزارهای فعال و تجربه‌محور در آموزش ریاضی ابتدایی را تأکید می‌کند.

**کلمات کلیدی:** راهبردهای اکتشافی، حل مسئله ریاضی، نمایش‌های تصویری.

مقدمه

یادگیری ریاضیات در سال‌های ابتدایی یکی از پایه‌های اصلی موفقیت تحصیلی در دوره‌های بالاتر و توسعه توانایی‌های شناختی دانش‌آموزان است. مهارت‌های حل مسئله و استدلال ریاضی، نه تنها به دانش‌آموزان کمک می‌کند مسائل محاسباتی را حل کنند، بلکه توانایی تفکر انتقادی، تحلیل داده‌ها، برنامه‌ریزی ذهنی و تصمیم‌گیری منطقی را نیز در آنان تقویت می‌کند. پژوهش‌ها نشان داده‌اند که دانش‌آموزان در صورتی می‌توانند مفاهیم ریاضی را به درستی درک کنند و به مسائل واقعی و غیرمعمول پاسخ دهند که آموزش فراتر از حفظ فرمول‌ها و تمرین‌های تکراری باشد و بر تفکر، تحلیل و تجربه عملی تمرکز داشته باشد. در نظام آموزشی ایران، آموزش ریاضی اغلب به تمرین‌های الگوریتمی و محدودیت کتاب‌های درسی وابسته است و دانش‌آموزان فرصت کافی برای تجربه مسائل واقعی، آزمایش راهبردهای مختلف و تفکر مستقل ندارند. این موضوع به ویژه در مدارس ابتدایی محسوس است، جایی که پایه‌های مهارت‌های تحلیلی و تفکر ریاضی شکل می‌گیرد. پژوهش‌های داخلی نشان می‌دهند که آموزش

مبتنی بر حل مسئله و بازی‌های آموزشی، می‌تواند انگیزه، خودکارآمدی و توانایی استدلال دانش‌آموزان را بهبود بخشد و شکاف‌های یادگیری را کاهش دهد. در سطح بین‌المللی، مطالعاتی مانند پژوهش سوزانا کایترا و ساری هارموبین (۲۰۲۲/۱۴۰۱) در فنلاند نشان داده‌اند که استفاده از ابزارهای بصری، موسوم به «کلیدهای حل مسئله»، می‌تواند فرآیند تفکر و استدلال ریاضی دانش‌آموزان را تقویت کند و آنان را قادر سازد تا راهبردهای متنوعی را برای حل مسائل به کار گیرند. این مطالعات تأکید دارند که آموزش باید تجربه‌محور، فعال و مبتنی بر راهبردهای اکتشافی باشد تا دانش‌آموزان توانایی تصمیم‌گیری، برنامه‌ریزی و تحلیل را کسب کنند. پژوهش حاضر با الهام از این تجربه‌های موفق بین‌المللی، تلاش می‌کند اثر استفاده از نمایش‌های تصویری و راهبردهای اکتشافی را بر توانایی حل مسئله و مهارت استدلال ریاضی دانش‌آموزان پایه پنجم مدارس ابتدایی شهرستان تنکابن بررسی کند. هدف این مطالعه آن است که نشان دهد چگونه ابزارهای بصری می‌توانند محیط یادگیری فعال ایجاد کنند، مهارت‌های حل مسئله را تقویت نمایند و اعتماد به نفس دانش‌آموزان در مواجهه با مسائل ناآشنا را افزایش دهند.

### پیشینه پژوهش

در پژوهش‌های داخلی، شهرکی و نرماشیری نشان دادند که استفاده از یادگیری مبتنی بر حل مسئله در تقویت عملکرد تحصیلی و انگیزش دانش‌آموزان مؤثر است [2]. همچنین عزیزپور و همکاران دریافتند که آموزش مهارت حل مسئله از طریق بازی‌های آموزشی سبب بهبود خودکارآمدی و تمرکز دانش‌آموزان دارای اختلال یادگیری می‌شود [3]. ستوده ثیان نیز تأکید کرده است که حل مسئله در ریاضی باید از سال‌های ابتدایی آغاز شود تا بنیانی محکم برای سطوح بالاتر یادگیری ایجاد گردد. [3]. در مطالعات خارجی نیز کایترا و هارموبین در پژوهشی در فنلاند گزارش کردند که استفاده از ابزارهای تصویری موسوم به کلیدهای حل مسئله، موجب افزایش توانایی استدلال و توضیح تفکر ریاضی در دانش‌آموزان ابتدایی می‌شود [4]. همچنین لاینه و همکاران در مطالعه‌ای مشابه نشان دادند که رشد مهارت حل مسئله در دانش‌آموزان ابتدایی فرآیندی تدریجی و وابسته به نقش فعال معلم در هدایت گفت‌وگوهای کلاسی است [5].

### روش پژوهش

پژوهش حاضر از نوع شبه‌تجربی با طرح پیش‌آزمون و پس‌آزمون با گروه کنترل است. جامعه آماری شامل تمامی دانش‌آموزان پایه پنجم مدارس ابتدایی شهرستان تنکابن در سال تحصیلی جاری بود در این پژوهش، ۲۵ دانش‌آموز پایه پنجم به صورت تصادفی انتخاب شدند و در گروه آزمایش تحت آموزش با ابزارهای بصری مبتنی بر راهبردهای اکتشافی قرار گرفتند. پیش‌آزمون نشان داد که میانگین نمرات حل مسئله دانش‌آموزان ۲۵/۴ بود (انحراف معیار ۳/۵)، که سطح متوسطی از توانایی حل مسئله را نشان می‌داد. گروه کنترل همان آموزش را با روش سنتی مبتنی بر کتاب درسی دریافت کرد. پس از هشت هفته آموزش، میانگین نمرات گروه آزمایش در پس‌آزمون به ۳۹/۷ افزایش یافت (انحراف معیار ۲/۴)، در حالی که میانگین گروه کنترل تنها به ۲۷/۳ رسید. تحلیل آماری با آزمون  $t$  مستقل نشان داد که تفاوت بین گروه‌ها در سطح ۰/۰۵ معنادار بود و آزمون  $t$  وابسته نیز رشد درون‌گروهی گروه آزمایش را به‌طور قابل‌توجهی تأیید کرد. در پایان دوره آموزشی، پس‌آزمون مشابه پیش‌آزمون برگزار شد. داده‌ها با استفاده از روش‌های آماری توصیفی و آزمون  $t$  وابسته برای مقایسه درون‌گروهی و  $t$  مستقل برای مقایسه بین گروه‌ها تحلیل شدند. همچنین، تغییرات در تنوع راهبردهای به‌کارگرفته‌شده و کیفیت توضیحات دانش‌آموزان مورد بررسی کیفی قرار گرفت.

## یافته‌ها

تحلیل پیش‌آزمون نشان داد که بیشتر دانش‌آموزان در حل مسائل ریاضی از راهبردهای شهودی و ساده مانند حدس و آزمایش یا کپی‌برداری از مثال‌ها استفاده می‌کردند و تنها حدود ۳۰ درصد قادر بودند فرآیند تفکر خود را توضیح دهند. تنوع راهبردها در این مرحله بسیار محدود بود و دانش‌آموزان کمتر قادر به تجزیه مسئله به زیرمسائل یا بررسی روابط بین داده‌ها بودند.

پس از هشت هفته آموزش با استفاده از نمایش‌های تصویری و کارت‌های راهبردی، تغییرات قابل توجهی در گروه آزمایش مشاهده شد. میانگین نمرات پس‌آزمون به  $7/39$  رسید که رشد  $15/14$  واحدی نسبت به پیش‌آزمون را نشان می‌داد، در حالی که گروه کنترل تنها افزایش اندکی نشان داد. دانش‌آموزان از راهبردهای متنوعی مانند بازنگری مسئله، تجزیه مسئله به زیرمسئله، ترسیم نمودار ذهنی، بررسی تناسب‌ها، حدس و بررسی سیستماتیک و حل بخشی از مسئله استفاده کردند. توانایی توضیح فرآیند تفکر نیز بهبود یافت؛ حدود ۷۰ درصد پاسخ‌ها شامل توضیح دقیق مراحل حل مسئله و دلیل انتخاب هر راهبرد بود، در حالی که در پیش‌آزمون این میزان کمتر از ۳۰ درصد بود. بیشترین پیشرفت در دانش‌آموزان ضعیف‌تر مشاهده شد که توانستند روابط تناسبی را بهتر درک کرده و فرآیند حل مسئله را به صورت مرحله‌ای و منظم بیان کنند. مشارکت دانش‌آموزان در بحث‌های گروهی افزایش یافت، آنان فعال‌تر سؤال می‌پرسیدند و نظرات خود را با جسارت بیشتری بیان می‌کردند. علاوه بر این، مشاهده شد که دانش‌آموزان می‌توانستند قبل از شروع حل مسئله، مراحل و راهبرد خود را برنامه‌ریزی کرده و در صورت برخورد با مانع، راهکار جایگزین انتخاب نمایند. اعتماد به نفس در مواجهه با مسائل ناآشنا نیز افزایش یافت و دانش‌آموزان با آرامش و جسارت بیشتری روش‌های مختلف را امتحان کردند. این تغییرات نشان می‌دهد که استفاده از ابزارهای بصری همراه با راهبردهای اکتشافی، نه تنها مهارت حل مسئله را تقویت می‌کند، بلکه موجب رشد توانایی‌های شناختی بالاتر مانند تحلیل، برنامه‌ریزی، استدلال منطقی و تفکر نقاد نیز می‌شود.

## بحث و نتیجه‌گیری

یافته‌های پژوهش نشان می‌دهد که استفاده از ابزارهای بصری همراه با راهبردهای اکتشافی، تأثیر قابل توجهی بر ارتقای مهارت‌های حل مسئله و توانایی استدلال ریاضی دانش‌آموزان دارد. افزایش میانگین نمرات حل مسئله و رشد  $14/15$  واحدی در گروه آزمایش، بیانگر آن است که دانش‌آموزان توانستند فرآیند حل مسئله را بهتر درک کنند و راهبردهای متنوعی به کار گیرند. بهبود توانایی توضیح فرآیند تفکر، نشان‌دهنده رشد مهارت‌های متاکاگنتی و خودتنظیمی در دانش‌آموزان بود که در حل مسائل پیچیده و برخورد با موقعیت‌های جدید ضروری است. مشاهده‌ها نشان داد که دانش‌آموزان ضعیف‌تر بیشترین پیشرفت را در درک روابط تناسبی، تحلیل داده‌ها و انتخاب راهبرد مناسب داشتند. این نکته تأکید می‌کند که ابزارهای بصری می‌توانند شکاف‌های یادگیری را کاهش داده و فرصت‌های برابر برای یادگیری فعال فراهم کنند. همچنین، مشارکت بیشتر دانش‌آموزان در بحث‌های گروهی و تمایل به توضیح و دفاع از راهبردهای خود، نشان‌دهنده رشد مهارت‌های اجتماعی و گفت‌وگو محور در فرآیند یادگیری است. نتایج این پژوهش با یافته‌های سوزانا کایترا و ساری هارمویین همسو است، که نشان داده‌اند استفاده از کلیدهای حل مسئله به عنوان ابزارهای دیداری، باعث فعال شدن فرآیند تفکر و افزایش توانایی استدلال در

دانش‌آموزان ابتدایی می‌شود. افزون بر این، یافته‌ها با مطالعات داخلی مانند پژوهش شهرکی و نرماشیری (۱۴۰۳) و عزیزپور و همکاران (۱۴۰۳) نیز همخوانی دارد، که تأکید دارند آموزش مبتنی بر حل مسئله و راهبردهای فعال، موجب افزایش انگیزش و خودکارآمدی دانش‌آموزان می‌شود. از منظر عملی، نتایج نشان می‌دهد که معلمان می‌توانند با استفاده از نمایش‌های تصویری و گفت‌وگوهای کلاسی، محیط یادگیری فعالی ایجاد کنند که دانش‌آموزان را به تفکر تحلیلی، برنامه‌ریزی ذهنی و خودتنظیمی در حل مسائل تشویق می‌کند. گنجاندن این روش‌ها در کتاب‌های درسی، برنامه‌های آموزشی و دوره‌های ضمن خدمت معلمان می‌تواند به رشد مهارت‌های حل مسئله و استدلال ریاضی در سطح مدارس ابتدایی کمک شایانی کند.

## منابع

۱. ف. ستوده ثیان، اهمیت یادگیری حل مسئله در ریاضی دوره ابتدایی، پنجمین کنفرانس بین‌المللی مطالعات میان رشته‌ای علوم بهداشتی، روانشناسی، مدیریت و علوم تربیتی، ۱۴۰۱.
۲. ف. ز. شهرکی و م. نرماشیری، تأثیر یادگیری مبتنی بر حل مسئله در تقویت مهارت‌های ریاضی دانش‌آموزان، سومین کنفرانس بین‌المللی پژوهش‌های مدیریت، تعلیم و تربیت در آموزش و پرورش، تهران، ۱۴۰۳.
۳. ف. عزیزپور، م. قزل سفلی، س. حسینی نژاد و م. سجادی مهر، اثر بخشی آموزش مهارت حل مسئله ریاضی با شیوه بازی و آموزش توجه به دانش‌آموزان دارای اختلال یادگیری ریاضی، ششمین کنفرانس بین‌المللی سلامت، علوم تربیتی و روانشناسی، ۱۴۰۳.
4. Kaitera, S. and Harmoinen, S. (2022) Developing Mathematical Problem-Solving Skills in Primary School by Using Visual Representations on Heuristics. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 10(2), 111-146.
5. Laine, A., Näveri, L., Ahtee, M., and Pehkonen, E. (2014) Development of Finnish elementary pupils' problem-solving skills in mathematics. *CEPS journal*, 4(3), 111-129.

# آموزش ریاضی واقع‌گرایانه و اثربخشی آن بر بهبود مهارت حل مسئله دانش‌آموزان پایه چهارم مدارس ابتدایی شهرستان تنکابن

امیر استبصاری، آموزگار آموزش و پرورش شهرستان تنکابن

[estebsariamir.1381@gmail.com](mailto:estebsariamir.1381@gmail.com)

## چکیده

این پژوهش با هدف طراحی، اجرای آزمایشی و ارزیابی مواد آموزشی مبتنی بر رویکرد ریاضی واقع‌گرایانه برای دانش‌آموزان پایه چهارم مدارس ابتدایی شهرستان تنکابن انجام شد. جامعه پژوهش شامل ۶۰ دانش‌آموز بود که در دو گروه آزمایش (آموزش واقع‌گرایانه) و یک گروه کنترل (روش سنتی) تقسیم شدند. مواد آموزشی بر اساس اصول ریاضی واقع‌گرایانه طراحی و پس از ارزیابی کارشناسان و اصلاحات لازم، در کلاس‌ها اجرا شد. داده‌ها با آزمون پیش‌آزمون و پس‌آزمون حل مسئله جمع‌آوری شد و تحلیل کمی با آزمون تی مستقل و شاخص پیشرفت نی-گین، و تحلیل کیفی از طریق مصاحبه با معلمان انجام گرفت. نتایج نشان داد که میانگین نمرات پس‌آزمون گروه‌های آزمایش به طور معناداری بالاتر از گروه کنترل بود ( $p < 0.01$ ) و شاخص پیشرفت نی-گین برای گروه‌های آزمایش  $0.62-0.64$  و برای گروه کنترل  $0.35$  برآورد شد. تحلیل کیفی نیز حاکی از افزایش مشارکت، انگیزه و درک عمیق‌تر مفاهیم توسط دانش‌آموزان بود. یافته‌ها تأکید می‌کند که آموزش ریاضی واقع‌گرایانه با استفاده از موقعیت‌های واقعی زندگی و بازنمایی مدل‌ها، مهارت حل مسئله را به طور مؤثر ارتقا می‌دهد.

**کلمات کلیدی:** آموزش ریاضی واقع‌گرایانه، مدارس ابتدایی، مهارت حل مسئله

## مقدمه

ریاضیات یکی از پایه‌های اساسی نظام آموزشی است که نقش مهمی در پرورش تفکر منطقی، توان حل مسئله، و آماده‌سازی دانش‌آموزان برای مواجهه با چالش‌های زندگی روزمره دارد. با این وجود، تجربه‌های آموزشی در کلاس‌های مدارس تنکابن نیز نشان می‌دهد که بسیاری از دانش‌آموزان، بویژه در مقطع ابتدایی، در مواجهه با مسائل ریاضی دچار مشکلات جدی هستند؛ آن‌ها اغلب به دنبال حفظ الگوریتم‌ها و فرمول‌ها هستند و در تحلیل مسئله، مدل‌سازی، انتخاب راه‌حل و بررسی نتایج ضعف دارند. یکی از راهکارهای نوین برای غلبه بر این ضعف، آموزش ریاضی واقع‌گرایانه است؛ روشی که بر پایه قرار دادن دانش‌آموز در موقعیت‌های واقعی زندگی تأکید دارد تا مفاهیم انتزاعی را از دل موقعیت ملموس استخراج کند. این رویکرد بر پل زدن بین دانش غیررسمی (شناختی، تجربی) و دانش رسمی (ریاضی‌وار) تأکید دارد. در بستر شهرستان تنکابن، محیط زندگی روستایی، فعالیت‌های کشاورزی، مبادلات روزمره بازار، و مسائل اندازه‌گیری زمین و محصول فرصت‌های خوبی برای استفاده از

موقعیت‌های واقعی در آموزش ریاضی فراهم می‌کند. استفاده از این ظرفیت‌ها می‌تواند به درک بهتر مفاهیم، تقویت انگیزه، و ارتقای توانایی حل مسئله دانش‌آموزان کمک کند. محققان دریافتند که آموزش مبتنی بر رویکرد واقع‌گرایانه در مقایسه با روش متداول، موجب بهبود معنی‌دار نمرات حل مسئله شد.

## پیشینه

در سال‌های اخیر، پژوهش‌های متعددی در ایران و سایر کشورها در زمینه‌ی تقویت مهارت حل مسئله در آموزش ریاضی انجام شده است. در یک پژوهش، اکبری احمدسرایبی و همکاران با استفاده از روش شبه‌آزمایشی در شهرستان قرچک، تأثیر به‌کارگیری رسانه‌های چندرسانه‌ای آموزشی را بر درک مفاهیم و توانایی حل مسئله‌ی ریاضی دانش‌آموزان پایه پنجم ابتدایی بررسی کردند. نتایج آن پژوهش نشان داد که دانش‌آموزانی که در فرآیند یادگیری از رسانه‌های چندرسانه‌ای بهره‌مند بودند، در مقایسه با گروه کنترل، پیشرفت معناداری در درک مفاهیم و مهارت حل مسئله داشتند [1]. در پژوهشی دیگر، موسی پور و همکاران بر اهمیت آموزش مستقیم راهبردهای حل مسئله تأکید کردند. یافته‌های آنان نشان داد که آموزش راهبردهایی نظیر الگوسازی، سؤال‌سازی و تفکر معکوس می‌تواند به طور چشمگیری موجب بهبود مهارت حل مسئله در دانش‌آموزان ابتدایی شود [3]. همچنین در مقاله‌ی فارسی «تدریس مفاهیم ریاضی با رویکرد حل مسئله» حسن زاده و همکاران با مرور تجارب تدریس ریاضی در مدارس ابتدایی به این نتیجه رسیده‌اند که استفاده از رویکرد حل مسئله نه تنها باعث افزایش مشارکت دانش‌آموزان در کلاس می‌شود، بلکه به پرورش تفکر انتقادی و درک ارتباط میان مفاهیم ریاضی و کاربرد آن‌ها در زندگی روزمره کمک می‌کند [2]. در حوزه‌ی پژوهش‌های خارجی، مطالعه‌ای درباره‌ی اثربخشی آموزش ریاضی واقع‌گرایانه نشان داده است که دانش‌آموزانی که از این رویکرد بهره‌گرفته‌اند، در مقایسه با سایر گروه‌ها، از باور ریاضی قوی‌تر و توانایی بازنمایی بهتری برخوردار بوده‌اند که در نهایت به بهبود چشمگیر مهارت حل مسئله انجامیده است [4]. افزون بر این، در پژوهشی دیگر با عنوان «کاربرد آموزشی مدل‌ها در آموزش ریاضی واقع‌گرایانه» که توسط پژوهشگران هلندی انجام شد، تأکید شده است که استفاده از مدل‌های میانی میان مسائل واقعی و مفاهیم ریاضی، نقش کلیدی در انتقال دانش از سطح عینی به سطح انتزاعی دارد و درک مفاهیم پیچیده‌ی ریاضی را برای دانش‌آموزان آسان‌تر می‌سازد. در مجموع، بررسی پیشینه‌ی پژوهش‌ها نشان می‌دهد که چه در مطالعات داخلی و چه در پژوهش‌های بین‌المللی، آموزش ریاضی واقع‌گرایانه و راهبردهای مبتنی بر حل مسئله، از مؤثرترین رویکردها برای ارتقای توانایی درک، تحلیل و حل مسائل ریاضی در دانش‌آموزان ابتدایی محسوب می‌شوند [5]. این پیشینه‌ها نشان می‌دهند که استفاده از موقعیت‌های واقعی، بازنمایی مدل‌ها و آموزش راهبردهای حل مسئله در متون پژوهشی مختلف، هم در متون فارسی و هم خارجی، ابزارهایی اثربخش برای ارتقای توان حل مسئله هستند.

## روش پژوهش

این پژوهش از نوع تحقیق و توسعه است و با هدف طراحی، اجرای آزمایشی و ارزیابی مواد آموزشی مبتنی بر رویکرد ریاضی واقع‌گرایانه انجام شد. مدل انتخابی برای توسعه، مدل بورگ و گال می‌باشد که شامل مراحل پیش‌نویس اولیه محصول (طرح نظری و طراحی ابتدایی مواد آموزشی)، آزمایش اولیه در مقیاس محدود با بازخورد اصلاحی، و اجرای پیمایشی نهایی در شرایط واقعی کلاس درس و جمع‌آوری داده‌ها است. جامعه مورد مطالعه شامل دانش‌آموزان پایه چهارم مدارس ابتدایی شهرستان تنکابن بود که تعداد نمونه بر اساس سه کلاس و مجموعاً



شصت نفر تعیین شد؛ دو کلاس به عنوان گروه آزمایش (آموزش با رویکرد واقع‌گرایانه) و یک کلاس به عنوان گروه کنترل (روش سنتی) انتخاب گردید. انتخاب نمونه‌ها بر اساس دسترسی و همسان‌سازی ویژگی‌های پیشینه علمی انجام شد. ابزارهای جمع‌آوری داده شامل آزمون پیش‌آزمون و پس‌آزمون حل مسئله با سوالات مسئله‌محور و دشواری متوسط تا چالش‌برانگیز، مصاحبه با معلمان شرکت‌کننده در اجرای روش واقع‌گرایانه و ارزیابی مواد آموزشی (کتاب معلم، طرح درس‌ها و برگه‌های فعالیت) توسط کارشناسان محتوا و رسانه بر اساس معیارهایی مانند «محتوا»، «رسانه»، «هماهنگی با زندگی روزمره» و «قابلیت اجرایی» بود. مراحل اجرای پژوهش شامل طراحی اولیه مواد آموزشی بر اساس اصول ریاضی واقع‌گرایانه، ارزیابی و اصلاح اولیه توسط کارشناسان، اجرای آزمایشی در کلاس‌های کوچک برای شناسایی مشکلات، اصلاح نهایی مواد آموزشی، اجرای نهایی آموزش در کلاس‌های آزمایش و کنترل به مدت یک فصل تحصیلی (۶ تا ۸ هفته)، و اجرای پیش‌آزمون و پس‌آزمون در هر سه کلاس بود. داده‌های به‌دست‌آمده با استفاده از آزمون تی مستقل برای مقایسه میانگین گروه‌ها و محاسبه شاخص پیشرفت نی-گین جهت سنجش میزان افزایش مهارت حل مسئله تحلیل شد. تحلیل داده‌های پژوهش در دو حوزه کمی و کیفی انجام شد. در بخش کمی، آزمون تی مستقل برای مقایسه میانگین نمرات پس‌آزمون بین گروه کنترل و گروه آزمایش به‌کار گرفته شد و شاخص پیشرفت نی-گین برای سنجش میزان بهبود مهارت حل مسئله در هر گروه محاسبه گردید. در بخش کیفی، مصاحبه‌ها با معلمان شرکت‌کننده تحلیل شد تا دیدگاه‌های آنان در خصوص نقاط قوت، چالش‌ها و پیشنهادات مربوط به اجرای روش آموزش واقع‌گرایانه استخراج شود و به تبیین دقیق‌تر تجربه آموزشی و فهم عمیق‌تر اثرات این روش کمک نماید.

## یافته‌ها

پس از طراحی اولیه، مواد آموزشی توسط کارشناسان رسانه و محتوا مورد ارزیابی قرار گرفت. در ارزیابی رسانه، جنبه‌هایی مانند گرافیک، جذابیت بصری، وضوح تصاویر، هماهنگی متن و تصویر و سهولت استفاده بررسی شد و در ارزیابی محتوا، میزان انطباق با اهداف، پختگی مفهومی، سطح دشواری منطقی و ارتباط با زندگی روزمره مورد سنجش قرار گرفت. نتایج نشان داد که اکثر مؤلفه‌ها در محدوده «قابل قبول تا بسیار مناسب» ارزیابی شدند و در برخی موارد بازخوردهایی برای اصلاح قالب فعالیت‌ها و تقویت ارتباط مفهومی ارائه شد، از جمله افزودن مثال‌های بومی تنکابن و مسائل کشاورزی محلی. بررسی نمرات پیش‌آزمون و پس‌آزمون حل مسئله نشان داد که در کلاس کنترل میانگین پیش‌آزمون ۴۶/۲ و میانگین پس‌آزمون ۶۳/۵ بود که افزایش ۱۷/۳ نمره را نشان می‌دهد، در حالی که در گروه‌های آزمایش میانگین پیش‌آزمون و پس‌آزمون به ترتیب برای گروه اول ۴۸/۰ و ۸۰/۲ (افزایش ۳۲/۲ نمره) و برای گروه دوم ۴۹/۵ و ۸۰/۰ (افزایش ۳۰/۵ نمره) گزارش شد. شاخص پیشرفت نی-گین برای گروه کنترل تقریباً ۰/۳۵ و برای گروه‌های آزمایش اول و دوم به ترتیب ۰/۶۴ و ۰/۶۲ برآورد گردید. آزمون تی مستقل نشان داد که تفاوت نمرات پس‌آزمون بین گروه کنترل و گروه‌های آزمایش از لحاظ آماری معنادار است (سطح معنی‌داری  $p < 0.01$ )، که بیانگر عملکرد بهتر گروه‌های آموزش دیده با روش واقع‌گرایانه نسبت به گروه کنترل است. تحلیل کیفی مصاحبه‌ها با معلمان نیز نشان داد که استفاده از مثال‌های واقعی زندگی مانند محاسبه قیمت محصول، اندازه‌گیری زمین مزرعه و تقسیم محصول بین دوستان باعث جذابیت کلاس و مشارکت بیشتر دانش‌آموزان شد. با این حال، برخی معلمان کمبود زمان کلاس و فشار برنامه درسی معمول را از چالش‌های اجرای روش برشمردند و پیشنهاد کردند که همه معلمان دوره‌های آموزشی دیده و بانک فعالیت‌های بومی محلی در دسترس باشد تا انتخاب مثال‌های مناسب سریع‌تر انجام شود. همچنین، برخی معلمان گزارش دادند که در ابتدا

برخی دانش‌آموزان به دلیل عادت به روش سنتی مقاومت نشان دادند، اما با گذشت زمان و آشنایی، مشارکت آنان افزایش یافت.

## بحث

یافته‌های این پژوهش نشان داد که آموزش ریاضی واقع‌گرایانه تأثیر معناداری بر بهبود مهارت حل مسئله دانش‌آموزان ابتدایی دارد. نتایج ما با پژوهش‌های پیشین، مانند مطالعه مقامی و همکاران در زمینه استفاده از رسانه چندرسانه‌ای، که بهبود قابل توجهی در گروه آزمایش نشان داده بودند، همسو است؛ با این تفاوت که تمرکز بر موقعیت‌های واقعی زندگی دانش‌آموزان، ممکن است اثرگذاری روش ما را بیشتر کرده باشد. بهره‌گیری از مدل‌های میانی و ایجاد پل بین موقعیت‌های واقعی و استدلال ریاضی، همان‌گونه که در نظریه ریاضی واقع‌گرایانه توصیه شده است، موجب شد دانش‌آموزان راحت‌تر از حالت ملموس به حالت انتزاعی و ریاضی منتقل شوند. هرچند چالش‌هایی مانند محدودیت زمان کلاس، مقاومت اولیه دانش‌آموزان نسبت به تغییر روش، نیاز به آموزش معلمان و فراهم کردن منابع بومی نیز مشاهده شد که مشابه مشکلات گزارش شده در مطالعات پیاده‌سازی این رویکرد برای دانش‌آموزان ضعیف‌تر است، اما اثر شاخص پیشرفت نی-گین در گروه آزمایش نشان داد که حتی با منابع محدود و تعداد کمتر دانش‌آموز، می‌توان به نتایج چشمگیر دست یافت. بر اساس این یافته‌ها می‌توان نتیجه گرفت که آموزش ریاضی واقع‌گرایانه منجر به افزایش معنادار مهارت حل مسئله دانش‌آموزان پایه چهارم مدارس تنکابن شد، مواد آموزشی طراحی شده از نظر کارشناسان قابل قبول بودند و تنها نیازمند بومی‌سازی و اصلاحات جزئی هستند، و معلمان نیز معتقدند که این روش باعث افزایش مشارکت، انگیزه و درک عمیق‌تر مفاهیم می‌شود، هرچند اجرای آن با چالش‌هایی همراه است. بر اساس یافته‌های پژوهش، پیشنهاد می‌شود دوره‌های آموزشی ویژه معلمان ریاضی برگزار شود تا با مبانی روش ریاضی واقع‌گرایانه و طراحی فعالیت‌های بومی آشنا شوند. همچنین ایجاد بانک فعالیت‌های بومی محلی شامل مسائل کشاورزی، بازار و اندازه‌گیری‌های محلی در شهرستان تنکابن و در دسترس قرار دادن آن برای معلمان می‌تواند اجرای روش را تسهیل کند.

## منابع

- ۱-ح. اکبری احمدسرایی، ح. مقامی و ی. مهدوی نسب، تأثیر چندرسانه‌ای آموزشی بر درک مفهوم وحل مسئله ریاضی دانش‌آموزان، فناوری آموزش و یادگیری، سال چهارم، شماره ۱۴، ۲۳-۵۱، ۱۳۹۷.
- ۲-م. حسن زاده، ح. تقی لو، حسین، س. میرزاعلیلو و س. ر. هاشمی نسب، تدریس مفاهیم ریاضی با رویکرد حل مسئله، هشتمین همایش ملی تحقیقات میان رشته‌ای در مدیریت و علوم انسانی، تهران، ۱۴۰۲.
- ۳-م. موسی پور، ب. پور تقی کوهبینه و آ. تقی پور، راهبردهایی برای ارتقای توانایی حل مسئله در ریاضی. پژوهش در آموزش علوم تجربی، (۱۷)، ۵-۴۶، ۳۵، ۱۳۹۸.

4. Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003) The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage.

*Educational studies in Mathematics*, 54(1), 9-35.

5. Yuanita, P., Zulnadi, H., and Zakaria, E. (2018) The effectiveness of Realistic Mathematics Education approach: The role of mathematical representation as mediator between mathematical belief and problem solving. *PloS one*, 13(9).

# تحلیل فرکتالی و کاربرد مدل سازی ریاضی در رشد و تبلور کانی های پیروکسن در سنگ های آذرین شمال مشکین شهر، استان اردبیل

محمد فدائیان<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه زمین شناسی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران [m\\_fadaeyan@pnu.ac.ir](mailto:m_fadaeyan@pnu.ac.ir)

**چکیده:** در این پژوهش، الگوهای رشد بلورهای کلینوپیروکسن در سنگ های آذرین ائوسن شمال مشکین شهر با رویکرد ریاضی و هندسه ی فرکتالی بررسی شده است. هدف اصلی، توصیف پیچیدگی هندسی رشد بلور و ارتباط آن با شرایط فیزیکوشیمیایی ماگما از طریق محاسبه ی بعد فرکتالی (D) است. تصاویر میکروسکوپی نوری پس از پردازش و باینری سازی در نرم افزار ImageJ و افزونه FracLac تحلیل شدند. نتایج نشان می دهد که D در محدوده ی ۱/۴۰ تا ۱/۸۲ متغیر است و افزایش مقدار D بیانگر رشد نامتعادل و سریع بلور در شرایط فوق اشباع ماگمایی است.

**کلمات کلیدی:** مدل سازی ریاضی، تحلیل فرکتالی، سنگهای آذرین، مشکین شهر، استان اردبیل

## ۱. مقدمه

رشد بلور در سیستم های ماگمایی یکی از فرآیندهای پیچیده ی غیرخطی است که به عوامل متعددی نظیر دما، ترکیب شیمیایی، نرخ سرد شدن و نفوذ عناصر وابسته است. در این میان، هندسه ی فرکتالی (Fractal Geometry)، که نخستین بار توسط Mandelbrot (1982) معرفی شد، ابزار مؤثری برای توصیف پدیده های طبیعی پیچیده و بی نظم است. الگوهای فرکتالی در ساختارهای بلورین بیانگر خودهمانندی (Self-similarity) در سطوح مختلف بزرگنمایی اند؛ به این معنا که ساختار کلی بلور در مقیاس های مختلف، ویژگی های مشابهی دارد. از دیدگاه ریاضی، رشد بلور را می توان به عنوان یک فرآیند تکراری تعریف کرد که با الگوریتم تجمع محدود به نفوذ (Diffusion-Limited Aggregation) شبیه سازی می شود. (Meakin, 1983) در این مدل، ذرات به صورت تصادفی حرکت کرده و هنگامی که به سطح بلور می رسند، به آن متصل می شوند و الگوهای شاخه ای خودمتشابه را تشکیل می دهند. هدف این پژوهش، تحلیل

<sup>۱</sup> . محمد فدائیان

ساختارهای میکروسکوپی کلینوپیروکسن در سنگ‌های آذرین شمال مشکین شهر با استفاده از روش‌های ریاضی و محاسبه‌ی بعد فرکتالی است تا رفتار تبلور از دیدگاه هندسی و عددی تفسیر شود.

## ۱-۱. مبانی ریاضی هندسه‌ی فرکتالی

در هندسه‌ی اقلیدسی، بعد هندسی یک نقطه، خط، صفحه و حجم به ترتیب ۰، ۱، ۲ و ۳ است. اما در ساختارهای طبیعی پیچیده، این تعریف ناکافی است، زیرا مرزهای نامنظم و شاخه‌ای دارند. بعد فرکتالی (Fractal Dimension, D) معیاری از میزان پیچیدگی و پرشدگی فضا توسط یک ساختار است. برای مجموعه‌ای فرکتالی F اگر تعداد جعبه‌های مورد نیاز برای پوشش آن با اندازه‌ی  $\epsilon$  برابر  $N(\epsilon)$  باشد، بعد فرکتالی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

در عمل، مقدار D از شیب خط در نمودار  $\log N(\epsilon)$  در برابر  $\log(1/\epsilon)$  محاسبه می‌شود. برای محاسبه‌ی بعد فرکتالی تصاویر میکروسکوپی، روش شمارش جعبه‌ای به کار گرفته شد. روند کار به صورت زیر است: تصویر میکروسکوپی به یک تصویر باینری (سیاه-سفید) تبدیل شد، شبکه‌هایی با اندازه‌های مختلف  $\epsilon$  روی تصویر قرار داده شد، در هر مقیاس، تعداد خانه‌هایی که حاوی بخش‌هایی از بلور بودند، شمارش گردید، رابطه‌ی لگاریتمی بالا رسم و شیب خط برازش شده به عنوان D محاسبه شد. این الگوریتم یک تقریب عددی از تعریف نظری بعد فرکتالی است و دقت آن به کیفیت تصویر و تعداد مقیاس‌ها وابسته است. مدل DLA یک مدل ریاضی تصادفی است که با استفاده از فرآیندهای مارکوفی رشد شاخه‌ای بلور را شبیه‌سازی می‌کند. در این مدل، ذرات از نقاط تصادفی در فضا شروع به حرکت براونی کرده و زمانی که به خوشه‌ی مرکزی برخورد کنند، به آن می‌چسبند. نتیجه، ساختاری شاخه‌ای با بعد فرکتالی حدود  $D \approx 1.7$  است، که شباهت زیادی با شکل بلورهای کلینوپیروکسن مشاهده شده در این پژوهش دارد.

## ۲. نتایج اصلی

نتایج به دست آمده از تحلیل فرکتالی بلورهای کلینوپیروکسن در سنگ‌های آذرین ائوسن شمال مشکین شهر نشان می‌دهد که شکل و رشد این بلورها دارای ویژگی‌های هندسی پیچیده و خودمتشابه است. مقدار بعد فرکتالی (D) به عنوان شاخصی از میزان بی‌نظمی هندسی، بین  $1/40$  تا  $1/82$  متغیر است. این تغییرات D ارتباط مستقیمی با دینامیک رشد بلور، نرخ سرد شدن ماگما، و شرایط فیزیکی شیمیایی محیط تبلور دارد. در فرآیند تبلور ماگمایی، رشد بلور تابعی از دو عامل اصلی است: نرخ نفوذ یونها در مذاب و سرعت رشد سطحی بلور. وقتی سرعت رشد از نفوذ عناصر سریع‌تر باشد، سطح بلور به صورت نامتعادل رشد می‌کند و الگوهای شاخه‌ای یا دندریتی ایجاد می‌شود. این الگوها از دید ریاضی فرکتالی هستند و با مدل رشد تصادفی تجمعی (DLA) قابل توصیف‌اند. در چنین شرایطی، بلور نه تنها در راستای رشد اولیه بلکه در جهت‌های فرعی نیز شاخه می‌زند و سطح تماس آن با مذاب افزایش می‌یابد. این افزایش سطح، سبب افزایش بعد هندسی مؤثر و در نتیجه بالا رفتن بعد فرکتالی D می‌شود. به عبارت دیگر، افزایش D نشان‌دهنده‌ی افزایش نرخ رشد نسبی نسبت به نفوذ است. رابطه‌ی بین بعد فرکتالی و نسبت نرخ‌ها را می‌توان به صورت تقریبی چنین بیان کرد:

$$({}_0D - D)_e \alpha \frac{{}_gR}{{}_dR}$$

که در آن  ${}_gR$  سرعت رشد بلور،  ${}_dR$  نرخ نفوذ عناصر و  ${}_0D$  بعد فرکتالی در شرایط تعادلی (حدود ۱/۴ برای بلورهای خودشکل) است.

### مدل سازی ریاضی رشد بلورهای کلینوپیروکسن

در مدل های عددی رشد بلور (مانند Diffusion-Limited Aggregation و Eden Growth Models، شکل بلور تابعی از احتمال اتصال ذرات به مرزهای فعال است.

در مدل DLA، احتمال اتصال ذره  $P(x, y)$  در نقطه  $(x, y)$  از رابطه زیر پیروی می کند:

$$|\phi(x, y) \nabla|^\alpha \sim P(x, y)$$

که در آن  $\phi$  تابع پتانسیل میدان غلظت و  $\alpha$  ضریب حساسیت به گرادیان است. افزایش گرادیان غلظت (در ماگمای فوق اشباع) سبب افزایش احتمال اتصال در نقاط حاشیه ای بلور می شود و ساختارهایی با شاخه های متعدد پدید می آید. در نتیجه، شکل بلور در فضای دوبعدی به منحنی های تصادفی خودمتشابه با بعد هندسی بین ۱ و ۲ تبدیل می شود. یعنی همان محدوده ای که در این پژوهش به دست آمد. (1.4-1.8)

مطالعه ای مقاطع نازک نشان داد که بلورهای کلینوپیروکسن در برخی نمونه ها دارای شکل دندریتی و در برخی دیگر خودشکل و منظم هستند. نمونه های دندریتی:  $(D \approx 1.8)$  بیانگر شرایط فوق اشباع، نرخ سرد شدن زیاد، و رشد سریع تر از نفوذ عناصر در ماگما هستند. این نوع رشد معمولاً در حاشیه ای دایک ها یا سنگ های ولکانیکی با نرخ سرد شدن بالا مشاهده می شود. نمونه های نیمه خودشکل:  $(D \approx 1.6)$  نشانگر رشد در شرایط نیمه متعادل اند، جایی که نفوذ و رشد سطحی در تعادل نسبی قرار دارند. نمونه های خودشکل:  $(D \approx 1.4)$  رشد بلور در شرایط پایدار و با نرخ سرد شدن پایین صورت گرفته است. چنین بافت هایی معمولاً در سنگ های درونی تر و توده ای تر مشاهده می شود. از منظر زمین ساختی، سنگ های آذرین ائوسن شمال مشکین شهر بخشی از کمربند ماگمایی ارومیه-دختر هستند که در محیط فورانشی تشکیل شده است. تغییرات بعد فرکتالی در کلینوپیروکسن های این منطقه می تواند بازتابی از تغییر در عمق تبلور، دمای ماگما و نرخ تخلیه گازهای فرار باشد.

### ارتباط آماری بین D و بافت سنگی

تحلیل آماری داده ها نشان می دهد که همبستگی منفی بین بعد فرکتالی D و ضریب گردی (Roundness) بلورها وجود دارد  $(r = -0.82)$ . به عبارت دیگر، بلورهای با لبه های تیز و رشد نامتعادل (D بالا) دارای گردی پایین تری هستند. این موضوع تأیید می کند که پیچیدگی هندسی بلور با افزایش بی نظمی و رشد ناپوسته ای شاخه ها افزایش می یابد. همچنین، پراکندگی مقادیر D از انحراف معیار  $\pm 0.04$  فراتر نرفته که نشان دهنده دقت بالای مدل محاسباتی و همسانی داده های تصویری است.

یکی از اهداف این پژوهش نشان دادن این نکته است که رفتار رشد بلورهای کلینوپیروکسن را می توان به صورت ریاضی مدل سازی کرد.

در واقع، هر بلور را می‌توان مجموعه‌ای از تکرارهای هندسی در مقیاس‌های مختلف دانست که از تابع بازگشتی زیر تبعیت می‌کند:

$$x_{n+1} = G(x, y) \cdot \lambda + f_{n+1}(x, Y)$$

در این رابطه،  $f_{n+1}(x, Y)$  مرز بلور در مرحله  $n$ ،  $G(x, y)$  تابع گرادیان غلظت عناصر،  $\lambda$  ضریب رشد، و  $\xi$  مؤلفه‌ی تصادفی نویز محیطی است. این معادله بازگشتی، ماهیت تکرارشونده و تصادفی رشد بلور را بیان می‌کند و به صورت طبیعی به ساختارهای فرکتالی منجر می‌شود. در نتیجه، بلورهای کلینوپیروکسن در شرایط فوق‌اشباع ماگمایی را می‌توان نمونه‌ای از سیستم‌های دینامیکی آشوبناک (Chaotic dynamic systems) دانست که رفتار آن‌ها تنها از طریق ابزارهای ریاضی و آماری قابل توصیف دقیق است. نتایج این پژوهش با داده‌های (Sahagian & Proussevitch, 2002) برای رشد بلورهای پلاژیوکلاز در سنگ‌های آذرین تطابق دارد، که در آن بعد فرکتالی  $1.8 \approx D$  در این مطالعه بسیار نزدیک به مقدار نظری مدل DLA (حدود  $1.71$ ) است که صحت رویکرد فرکتالی را تأیید می‌کند. مطالعات مشابه در سیستم‌های مصنوعی (Morse, 2009) نیز نشان می‌دهد که افزایش نرخ سرد شدن باعث افزایش پیچیدگی فرکتالی بلورها می‌شود روندی که در نمونه‌های این منطقه نیز مشاهده شده است.

### ۳. نتایج و تحلیل عددی

نتایج محاسبات در جدول زیر آمده است:

| نمونه | نوع بافت           | D    | $\sigma(D)$ | تفسیر                |
|-------|--------------------|------|-------------|----------------------|
| Cpx-1 | شاخه‌ای، حاشیه‌دار | 1.82 | $\pm 0.04$  | رشد سریع و فوق‌اشباع |
| Cpx-2 | نیمه‌خودشکل        | 1.63 | $\pm 0.03$  | رشد نیمه‌متعادل      |
| Cpx-3 | خودشکل، زون‌دار    | 1.41 | $\pm 0.02$  | رشد تعادلی و کند     |

رابطه‌ی بین بعد فرکتالی و شاخص تعادل بلور را می‌توان با تابعی تجربی تقریب زد:

$$aD - e.k = E$$

که در آن  $E$  شاخص تعادل و  $a, k$  ضرایب تجربی هستند (برای داده‌های این پژوهش کاهش نمایی  $EEE$  با افزایش  $D$  بیانگر آن است که بلورهای پیچیده‌تر) با  $D$  بالاتر (در شرایط ناپایدارتر رشد یافته‌اند. تحلیل ریاضی نشان داد که رفتار رشد بلورهای کلینوپیروکسن را می‌توان با معادلات رشد فرکتالی و فرآیندهای تصادفی مدل‌سازی کرد. بلورهایی که  $D \approx 1.8$  دارند، به مدل DLA نزدیک‌اند، در حالی که بلورهای منظم‌تر با  $D \approx 1.4$  بیشتر به ساختارهای شبه‌افکلیدسی شبیه‌اند. این نتایج نشان می‌دهد که سیستم ماگمایی در زمان تبلور دچار تغییر در نرخ سرد شدن یا اشباع از عناصر بوده است. به‌طور کلی، افزایش  $D$  با افزایش سرعت رشد، افزایش ویسکوزیته‌ی ماگما و کاهش نفوذپذیری اکسیژن همراه است.

### ۴. نتیجه‌گیری

رشد بلورهای کلینوپیروکسن در سنگ‌های آذرین ائوسن شمال مشکین‌شهر از نوع فرکتالی است و با مدل DLA تطابق دارد. بعد فرکتالی  $D$  بین  $1/4$  تا  $1/8$  متغیر است و شاخصی از میزان تعادل در فرآیند تبلور محسوب می‌شود. کاربرد



ابزارهای ریاضی مانند شمارش جعبه‌ای و مدل‌سازی آماری می‌تواند روشی کمی برای تحلیل بافت‌های میکروسکوپی و دینامیک رشد بلور در سیستم‌های ماگمایی فراهم کند.

## منابع

1. Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman.
2. Meakin, P. (1983). Formation of fractal clusters and networks by diffusion-limited aggregation. *Physical Review A*, 27(3), 1495–1507.
3. Sahagian, D. L., & Proussevitch, A. A. (2002). Fractal analysis of crystal growth and textural complexity in igneous rocks. *Journal of Geophysical Research*, 107(B1).
5. Higgins, M. D. (2006). *Quantitative Textural Measurements in Igneous and Metamorphic Petrology*. Cambridge University Press.
6. Morse, S. A. (2009). Crystal growth in magmatic systems. *American Mineralogist*, 94(11–12), 1629–1645.
7. Avnir, D., Farin, D., & Pfeifer, P. (1984). Molecular fractal surfaces. *Nature*, 308, 261–263.
8. Turcotte, D. L. (1997). *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. Cambridge University Press.
9. Vannier, J., & Boucot, A. J. (2000). Fractal analysis of growth patterns in minerals. *Geobios*, 33(5), 567–576.
10. Benn, K., & Fitton, J. (1991). Crystal size distributions and growth dynamics in igneous rocks. *Contributions to Mineralogy and Petrology*, 107, 493–507.



## انبرک نوری تولید شده توسط توابع بسل

حسام‌الدین سعادت؛ عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

fazelsaadati@pnu.ac.ir

( عضو هیأت علمی )

**چکیده:** باریکه‌های نور لیزر توسط توابع متعامد و خاص ریاضی تولید می‌شوند. این باریکه‌ها، به عنوان جواب‌هایی از معادله هلمهولتز در دستگاه‌های مختصات دکارتی، استوانه‌ای دایره‌ای، استوانه‌ای بیضوی و استوانه‌ای سهموی می‌باشند. هر از این پرتوهای نور ساختار یافته دارای خواص جالب و منحصربردی هستند. یکی از مهمترین کاربرد باریکه‌های نور ساختار یافته انبرک نوری می‌باشد. در این مقاله، نحوه تولید، نامتقارن کردن و استفاده از آن در تولید انبرک نوری را مورد بررسی قرار می‌گیرد. کلمات کلیدی: انبرک نوری؛ توابع متعامد؛ معادله هلمهولتز؛ نور ساختاریافته.

### ۱ مقدمه

در قرن‌های شانزدهم و هفدهم، دانشمندانی مانند نیوتن نور را متشکل از ذرات می‌دانستند، در حالی که دیگران، مانند هویگنس، استدلال می‌کردند که نور مانند یک موج رفتار می‌کند. در قرن بیستم، کشف شد که نور هم خواص موج مانند و هم خواص ذره مانند را از خود نشان می‌دهد، اما نمی‌توان آن را به طور کامل به عنوان هیچ یک از این دو توصیف کرد. این پدیده به عنوان دوگانگی موج-ذره شناخته می‌شود. معادلات ماکسول مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی هستند که نحوه تعامل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را در طول زمان در امواج الکترومغناطیسی شرح می‌دهند. این چهار معادله به طور جامع تمام پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی را توصیف می‌کنند. [۱]

### ۲ معادلات ماکسول و باریکه‌ها نور ساختاریافته

معادلات ماکسول مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند که چگونگی وابستگی زمانی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در امواج الکترومغناطیسی را بیان می‌کنند. این معادلات قادرند تمام پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی را شرح دهند و به معادله موج دالمبر منجر می‌شوند. معادلات زیر:

Author Corresponding\*



$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

بیانگر معادله موج هستند. با فرض  $E(r, t) = e^{-i\omega t} E(r)$  به عنوان یک پاسخ برای معادله موج ۱، که در آن  $\omega$  یک عدد حقیقی مثبت و نماینده فرکانس موج و  $r$  بردار مکان است، معادله زیر به دست می‌آید:

$$\nabla^2 E(r) + k^2 E(r) = 0, \quad (2)$$

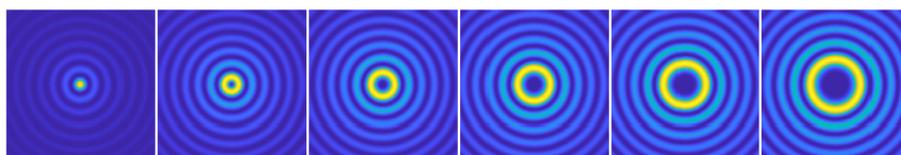
که در آن  $k = \frac{\omega}{c}$  عدد موج نامیده می‌شود. این معادله به نام معادله هلمهولتز (Helmholtz equation) شناخته می‌شود. بنابراین، انتشار میدان نوری توسط معادله هلمهولتز سه‌بعدی توصیف می‌گردد. حل این معادله در دستگاه‌های مختصات مختلف به معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم منجر می‌شود که جواب‌های آن به صورت ترکیب خطی از توابع متعامد ریاضی خاص است. به عنوان مثال، حل معادله هلمهولتز در دستگاه مختصات استوانه‌ای، بیضوی و سهموی به ترتیب به باریکه‌های بسل، متو و سهموی می‌انجامد.

### ۳ باریکه‌های بسل

باریکه‌های بسل یکی از مهم‌ترین انواع باریکه‌های نور ساختارمند هستند که از حل معادله هلمهولتز در دستگاه مختصات استوانه‌ای دایره‌ای به دست می‌آیند و دامنه آن‌ها با تابع بسل نوع اول مرتبه  $n$  توصیف می‌شود. باریکه‌های بسل-گاوسی با انرژی محدود توسط گوری و گواتاری در سال ۱۹۸۷ معرفی شدند [۲]. دامنه این باریکه‌ها از حاصل ضرب تابع گاوسی و توابع بسل نوع اول مرتبه  $n$  به دست می‌آید. این باریکه‌ها دارای تکانه زاویه‌ای مداری هستند و توزیع شدت آن‌ها دارای تقارن دایره‌ای است. با توجه به توانایی باریکه‌های چرخان با تکانه زاویه‌ای مداری در بهبود کارایی، باریکه‌های بسل از اهمیت بالایی برخوردارند. دامنه مختلط یک باریکه بسل در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود [۳]:

$$E_n(r, \phi, z) = \exp[in\phi + iz\sqrt{k^2 - \alpha^2}] J_n(\alpha r). \quad (3)$$

که در آن  $k$  عدد موج،  $\alpha = k \sin(\theta_0)$  و  $\theta_0$  زاویه مخروط موج است، و  $J_n$  تابع بسل نوع اول مرتبه  $n$  است. شکل ۱ باریکه‌های بسل مرتبه صفر تا پنج را با  $\lambda = 532 \mu\text{m}$ ،  $\alpha = \frac{1}{10 \times \lambda}$  و  $-100 \mu\text{m} \leq x, y \leq 100 \mu\text{m}$  نشان می‌دهد.



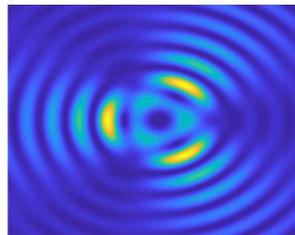
شکل ۱: پروفایل شدت باریکه‌های بسل نوع اول از مرتبه  $n$ ام با  $\lambda = 532 \mu\text{m}$ ،  $\alpha = \frac{1}{10 \times \lambda}$  و  $-100 \mu\text{m} \leq x, y \leq 100 \mu\text{m}$  به ترتیب از چپ به راست.

## ۴ باریکه‌های بسل نامتقارن و تولید انبرک نوری

برای تولید یک باریکه بسل نامتقارن، با اعمال  $x_0 = R_0 + \frac{c}{\alpha} \exp(-i\gamma)$  و  $y_0 = \frac{c}{\alpha} \exp(-i\gamma)$ ، بر روی باریکه بسل در دستگاه مختصات دکارتی، شدت در حلقه مرکزی پروفایل شدت، متمرکز می‌شود، که در آن  $R_0 = 5\lambda$ ، و برای مهندسی در میزان تمرکز از مقادیر  $c$  و  $\gamma$  استفاده می‌کنیم. [۳]

$$E_n(x, y) = \exp \left[ \frac{(x - x_0) + i(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right]^n J_n \left( \alpha \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right). \quad (4)$$

به عنوان یک نمونه، با فرض  $c = 5$ ، انبرک نوری حاصل از برهمه‌هی سه باریکه بسل نامتقارن به ازای  $\gamma = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ ، در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲: پروفایل شدت انبرک نوری تولید شده از برهمه‌هی سه باریکه بسل نامتقارن با  $\lambda = 532\mu\text{m}$  و  $\alpha = \frac{1}{10 \times \lambda}$ ،  $\gamma = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  و  $c = 5$ ،  $-100\mu\text{m} \leq x, y \leq 100\mu\text{m}$ .

## ۵ کاربرد انبرک نوری

انبرک‌های نوری مجموعه‌ای از تکنیک‌ها هستند که به طور گسترده در حوزه زیست‌پزشکی کاربرد دارند. اساس این روش بر این اصل استوار است که باریکه لیزر متمرکز شده، بخشی از تکانه خود را به ذرات کوچک منتقل کرده و به آن‌ها نیرو وارد می‌کند. این ویژگی امکان دستکاری اجسام در مقیاس میکرو و نانو، از کره‌های ساده پلاستیکی تا سلول‌های پیچیده بیولوژیکی، را بدون تماس فیزیکی فراهم می‌کند؛ کاری که با دیگر روش‌ها به‌سادگی امکان‌پذیر نیست [۴].

در دهه ۱۹۷۰، اشکین نشان داد که باریکه لیزر می‌تواند میکروذرات را شتاب داده و به دام بیندازد. در سال ۱۹۸۶، او مشاهده کرد که میکروکره‌های لاتکس در امتداد باریکه حرکت می‌کنند (هدایت اپتیکی). با افزودن باریکه دوم، ذرات را بین دو باریکه ثابت نگه داشت. این توانایی لیزر برای نگهداری سه‌بعدی ذرات بدون نیروی اضافی، به انبرک نوری معروف شد [۵]. این روش با میکروسکوپ آزمایشگاهی قابل اجرا بوده و به همین دلیل در زیست‌شناسی برای اندازه‌گیری نیروهای کوچک محبوب است.

انبرک‌های نوری (Optical Tweezers) ابزارهایی قدرتمند در دستکاری و مطالعه اشیاء در مقیاس میکرو و نانو هستند که از نور لیزر متمرکز برای اعمال نیرو و به دام انداختن ذرات بدون تماس فیزیکی استفاده می‌کنند. برخی از کاربردهای کلیدی این فناوری عبارتند از: دستکاری و بررسی سلول‌های بیولوژیکی، مانند سلول‌های خونی یا

باکتری‌ها، و مولکول‌های زیستی مثل DNA و پروتئین‌ها، بررسی عملکرد موتورهای مولکولی مانند کینزین یا داینین که در حرکت درون سلولی نقش دارند، در حوزه زیست‌پزشکی و زیست‌فناوری، به دام انداختن و مطالعه اتم‌های منفرد یا نانوذرات، بررسی خواص مکانیکی مواد در مقیاس نانو، مانند سختی یا الاستیسیته نانوذرات، در حوزه فیزیک و شیمی، مونتاژ نانوساختارها و جابجایی و تنظیم نانومواد مانند نانولوله‌های کربنی یا گرافن، در حوزه نانو تکنولوژی، بررسی برهم‌کنش نور با ذرات در مقیاس‌های کوچک برای توسعه فناوری‌های اپتیکی و کنترل ذرات در محیط‌های مایع برای کاربردهای میکروفلوئیدیک در حوزه اپتیکی و فوتونیک، هدایت ذرات حامل دارو به نقاط خاص در بدن با دقت بالا و تحلیل خواص بیومکانیکی سلول‌های بیمار (مثلاً سلول‌های سرطانی) برای تشخیص زودهنگام در حوزه پزشکی و داروسازی. [۶]

مزیت اصلی انبرک‌های نوری، دقت بالا، غیرتهاجمی بودن و قابلیت اجرا با تجهیزات آزمایشگاهی مانند میکروسکوپ است که آن را به ابزاری محبوب در علوم زیستی، فیزیک و نانو تکنولوژی تبدیل کرده است.

۶ مراجع

مراجع

- [1] Pedrotti, F. L. Pedrotti, L. S. (1993) *Introduction To Optics (Second Edition)*, Prentice Hall.
- [2] Gori, F. and Guattari, G. (1987) *Bessel-Gauss beams*, Optics Communications, **64**, 491–495.
- [3] Kovalev, A.A. Kotlyar, V.V. and Porfirev, A.P. (2015) *Shifted nondiffractive Bessel beams*, Physical Review A, **91**, 053840.
- [4] Woerdemann, M. *Structured Light Fields: Applications in Optical Trapping, Manipulation, and Organization*, Ph.D. dissertation, University of Münster, Germany, 2012.
- [5] Ashkin, A. Dziedzic, J. Bjorkholm, J. and Chu, S. (1986) *Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles*, Optics Letter, **11**, 288–290.
- [6] Polimenoa, P. Magazzub, A. Antonia, M. Pattia, F. Saijaa, R. Boschid, C.D.E. Donatoa, M.G. Gucciardia, P.G. Jonese, P.H. Volpeb, G. and Maragoa, O.M. (2018) *Optical tweezers and their applications*, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, **218**, 131–150.

## نقش ماتریس‌ها و تجزیه‌های خاص (PCA و SVD) در کاهش ابعاد و استخراج ویژگی‌ها

مهدی نصرتی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی

۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران [nosrati@pnu.ac.ir](mailto:nosrati@pnu.ac.ir)

**چکیده:** افزایش حجم و پیچیدگی داده‌ها در حوزه‌های مختلف علمی و صنعتی باعث شده است که کاهش ابعاد و استخراج ویژگی‌های اصلی داده‌ها به یکی از چالش‌های مهم یادگیری ماشین تبدیل شود. از میان روش‌های متعدد کاهش ابعاد، روش‌های مبتنی بر جبر خطی به دلیل بنیان نظری قوی و قابلیت تفسیر بالا اهمیت ویژه‌ای دارند. تجزیه مقادیر منفرد (SVD) و تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA) دو ابزار کلیدی برای استخراج اطلاعات پنهان در داده‌ها و کاهش افزونگی هستند. در این مقاله، ابتدا نقش ماتریس‌ها به عنوان ساختار پایه‌ای نمایش داده بررسی شده و سپس کاربرد روش‌های SVD و PCA در یادگیری ویژگی‌ها و کاهش ابعاد داده‌های پرحجم در حوزه‌هایی چون پردازش تصویر، متن، و بیوانفورماتیک بیان و ارتباط آن‌ها مورد تحلیل قرار گرفته است. همچنین مزایا و محدودیت‌های هر روش آورده شده و در پایان، چشم‌اندازهای آینده در ترکیب این تکنیک‌ها با روش‌های غیرخطی و یادگیری عمیق مورد بحث قرار می‌گیرد.

**کلمات کلیدی:** تجزیه مقادیر منفرد، آنالیز مولفه‌های اصلی، استخراج ویژگی

### ۱. مقدمه

پیشرفت فناوری اطلاعات و افزایش توان ذخیره‌سازی داده‌ها موجب شکل‌گیری مجموعه‌داده‌هایی با ابعاد بسیار بالا شده است. در حوزه‌هایی مانند پردازش تصویر، پردازش زبان طبیعی و بیوانفورماتیک، داده‌ها اغلب به صورت ماتریس‌های بزرگ با هزاران یا میلیون‌ها ویژگی ذخیره می‌شوند [۱]. این امر گرچه فرصت‌های بی‌نظیری برای تحلیل داده فراهم آورده، اما چالش‌های محاسباتی و نظری قابل توجهی نیز به دنبال داشته است. یکی از مهم‌ترین چالش‌ها پدیده‌ای است که به نفرین ابعاد<sup>۲</sup> معروف است. با افزایش تعداد ویژگی‌ها، فضای جستجو به طور نمایی بزرگ‌تر می‌شود و الگوریتم‌های یادگیری ماشین در یافتن الگوهای معنادار دچار مشکل می‌گردند [۲]. علاوه بر این، بسیاری از ویژگی‌ها دارای همبستگی یا افزونگی می‌باشند که نه تنها اطلاعات جدیدی اضافه نمی‌کنند، بلکه باعث کاهش دقت مدل‌های یادگیری نیز می‌شوند. برای مقابله با این چالش‌ها، روش‌های مختلفی برای کاهش ابعاد داده پیشنهاد شده

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

<sup>۲</sup> Curse of Dimensionality



است. این روش‌ها به‌طور کلی به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می‌شوند. در میان روش‌های خطی، تجزیه مقادیر منفرد<sup>۳</sup> و تحلیل مؤلفه‌های اصلی<sup>۴</sup> جایگاه ویژه‌ای دارند. هر دو روش بر مبنای جبر خطی عمل کرده و به‌طور مؤثری می‌توانند ویژگی‌های کلیدی داده را استخراج کرده و ابعاد آن را کاهش دهند [3]. از منظر تاریخی، روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی نخستین بار توسط کارل پیرسون در سال ۱۹۰۱ معرفی شد و بعدها توسط هتلینگ توسعه یافت [۴]. این روش به دلیل سادگی و قدرت بالا در استخراج مؤلفه‌های اصلی، یکی از پرکاربردترین ابزارهای آماری در تحلیل داده‌ها می‌باشد. از طرف دیگر، روش تجزیه مقادیر ویژه، ریشه در ریاضیات محض داشته و از اوایل قرن بیستم به‌عنوان یکی از ابزارهای بنیادی جبر خطی شناخته می‌شود. تجزیه مقادیر ویژه علاوه بر کاهش ابعاد در حوزه‌هایی مانند فشرده‌سازی داده، حل دستگاه‌های معادلات کم‌شرط و مدل‌سازی معنایی در پردازش متن کاربرد گسترده‌ای دارد [5]. با توجه به اهمیت این دو روش، هدف این مقاله تحلیل نقش این دو الگوریتم در کاهش ابعاد داده و یادگیری ویژگی‌هاست. بدین منظور، در بخش ۲ این مقاله مبانی نظری ماتریس‌ها و تجزیه‌های خاص معرفی شده، سپس ارتباط میان SVD و PCA به همراه کاربردها، مزایا و محدودیت‌ها در بخش ۳ بیان شده و در بخش ۴ نیز نتیجه‌گیری و مسیرهای پژوهشی آینده آورده شده است.

## ۲. مبانی نظری

### ۲-۱. نمایش داده‌ها با ماتریس

داده‌های چندبعدی معمولاً به صورت ماتریس نمایش داده می‌شوند. برای مثال، اگر مجموعه‌ای از  $n$  نمونه با  $m$  ویژگی داشته باشیم، این داده‌ها را می‌توان به صورت ماتریسی  $X \in R^{m \times n}$  نمایش داد. این نمایش ماتریسی امکان استفاده از ابزارهای جبر خطی مانند تجزیه‌ها و تبدیل‌ها را برای تحلیل داده‌ها فراهم می‌سازد. [6]

### ۲-۲. تجزیه مقادیر منفرد (SVD)

هر ماتریس  $A \in R^{m \times n}$  را می‌توان به صورت  $A = V \Sigma U^T$  تجزیه کرد که  $U, V, \Sigma$  تجزیه کرده و در آن  $U_{n \times n}$  و  $V_{m \times m}$  ماتریس‌های متعامد و  $\Sigma_{m \times n}$  یک ماتریس قطری شامل مقادیر منفرد است. مقادیر منفرد اهمیت هر بُعد را نشان می‌دهند و با انتخاب بزرگ‌ترین مقادیر، می‌توان تقریب بهینه‌ای از داده‌ها ارائه داد. [7]

### ۲-۳. تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA)

تحلیل مؤلفه‌های اصلی را می‌توان به منزله‌ی برازش یک بیضی با ابعاد  $p$  به داده‌ها در نظر گرفت، به‌گونه‌ای که هر محور این بیضی نمایانگر یک مؤلفه‌ی اصلی است. کوچک بودن برخی از محورهای بیضی نشان می‌دهد که واریانس داده‌ها در جهت آن محور کم است. برای یافتن این محورها، ابتدا باید میانگین هر متغیر را از مقادیر آن کم کنیم تا داده‌ها حول صفر متمرکز شوند. سپس داده‌های تعدیل‌شده جایگزین داده‌های اصلی می‌شوند. در گام بعد، ماتریس کوواریانس داده‌ها محاسبه شده و مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی آن به دست می‌آیند. پس از آن، هر بردار ویژه‌ی متعامد نرمال می‌شود تا به برداری با طول واحد تبدیل گردد. این بردارهای ویژه‌ی واحد را می‌توان به‌عنوان محورهای بیضی برازش یافته تعبیر کرد. با انتخاب این پایه، ماتریس کوواریانس به یک ماتریس قطری تبدیل می‌شود که عناصر روی قطر آن بیانگر واریانس هر محور هستند. در نهایت، سهم هر بردار ویژه از کل واریانس داده‌ها از طریق تقسیم

<sup>3</sup> SVD: Singular Value Decomposition

<sup>4</sup> PCA: Principal Component Analysis



مقدار ویژه‌ی مربوط به آن بر مجموع تمام مقادیر ویژه محاسبه می‌شود. بنابراین PCA داده‌ها را به فضایی جدید منتقل می‌کند که در آن بیشترین واریانس داده‌ها حفظ می‌شود. در عمل، این کار از طریق محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس کوواریانس داده‌ها صورت می‌گیرد. اگر داده‌ها مرکزدهی شوند، مؤلفه‌های اصلی با بردارهای ویژه این ماتریس مطابق خواهند شد. [8]

### ۳. ارتباط میان PCA و SVD

PCA را می‌توان حالت خاصی از SVD دانست. در واقع، تجزیه مقادیر منفرد بر روی داده‌های مرکزدهی شده همان مؤلفه‌های اصلی PCA را ارائه می‌دهد. بنابراین، از دیدگاه محاسباتی این دو روش ارتباط تنگاتنگی با یکدیگر دارند. [9]

#### ۳-۱. کاربردها

پردازش تصویر: در فشرده‌سازی تصاویر، SVD امکان بازسازی تصویر با کیفیت مناسب و حجم کمتر را فراهم می‌کند. همچنین PCA در شناسایی چهره‌ها و استخراج ویژگی‌های کلیدی تصویر کاربرد دارد. [10]

پردازش زبان طبیعی: روش تحلیل معنایی نهفته (Latent Semantic Analysis) مبتنی بر SVD است و روابط معنایی میان کلمات و اسناد را کشف می‌کند. [11]

بیوانفورماتیک: داده‌های ژنومی با ابعاد بسیار بالا توسط PCA تحلیل می‌شوند تا الگوهای پنهان ژنتیکی شناسایی شوند. [12]

یادگیری ماشین: کاهش ابعاد ورودی‌ها پیش از اعمال الگوریتم‌های طبقه‌بندی و خوشه‌بندی باعث افزایش دقت و کاهش هزینه محاسباتی می‌شود. [13-15]

#### ۳-۲. مزایا

کاهش پیچیدگی محاسباتی و زمان آموزش مدل‌ها.  
حذف نویز و ویژگی‌های کم‌اهمیت.  
بهبود عملکرد مدل‌های یادگیری ماشین در داده‌های پر حجم.

#### ۳-۳. محدودیت‌ها

مؤلفه‌های اصلی همیشه تفسیرپذیر نیستند.  
اطلاعات غیرخطی ممکن است از دست برود.  
نیاز به پیش‌پردازش دقیق (مانند مرکزدهی و نرمال‌سازی).

### ۴. نتیجه‌گیری

SVD و PCA ابزارهای قدرتمند جبر خطی برای کاهش ابعاد داده و یادگیری ویژگی‌ها هستند. ارتباط نزدیک این دو روش، آن‌ها را به مکمل‌های یکدیگر در تحلیل داده تبدیل کرده است. در بسیاری از حوزه‌ها، از پردازش تصویر گرفته تا بیوانفورماتیک، این دو روش نقش کلیدی ایفا می‌کنند. با این حال، محدودیت‌هایی مانند از دست دادن روابط غیرخطی ایجاب می‌کند که در کارهای آینده، این روش‌ها با تکنیک‌های یادگیری عمیق و غیرخطی ترکیب شوند تا قابلیت تحلیل داده‌های پیچیده‌تر فراهم گردد.

## منابع

1. Bishop CM. Pattern recognition and machine learning. Springer; 2006.
2. Bellman R. Adaptive control processes: a guided tour. Princeton university press; 2015.
3. Jolliffe IT, Cadima J. Principal component analysis: a review and recent developments. *Phil Trans R Soc A*. 2016;374(2065):20150202.
4. Pearson K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philosophical Magazine*. 1901;2(11):559–72.
5. Golub GH, Van Loan CF. Matrix computations. 4th ed. Johns Hopkins University Press; 2013.
6. Strang G. Linear algebra and its applications. 4th ed. Brooks Cole; 2006.
7. Stewart GW. Matrix algorithms: volume 1, basic decompositions. SIAM; 1998.
8. Hotelling H. Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *J Educ Psychol*. 1933;24(6):417–41.
9. Abdi H, Williams LJ. Principal component analysis. *Wiley Interdiscip Rev Comput Stat*. 2010;2(4):433–59.
10. Turk M, Pentland A. Eigenfaces for recognition. *J Cogn Neurosci*. 1991;3(1):71–86.
11. Deerwester S, Dumais ST, Furnas GW, Landauer TK, Harshman R. Indexing by latent semantic analysis. *J Am Soc Inf Sci*. 1990;41(6):391–407.
12. Ringnér M. What is principal component analysis?. *Nat Biotechnol*. 2008;26(3):303–4.
13. Cunningham P, Delany SJ. k-Nearest neighbour classifiers. *Multiple Classifier Systems*. 2007;34(8):1–17.

۱۴ - سمیه محبی محمداسماعیل فدایی نژاد محمد اصولیان، پیش بینی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از رگرسیون بردار پشتیبان بر مبنای تکنیک کاهش ابعاد، ۱۴۰۱، فصلنامه راهبرد مدیریت مالی دانشگاه الزهراء، سال دهم، شماره ۳۸، صفحه ۱-۲۶، 10.22051/jfm.2022.35543.2528

۱۵ - سمیه محبی محمداسماعیل فدایی نژاد محمد اصولیان محمدرضا حمیدی زاده، انتخاب ویژگی های مناسب برای مدل پیش بینی شاخص بورس اوراق بهادار تهران بر مبنای تکنیک کاهش ابعاد، تحقیقات مالی، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، ۱۴۰۱، دوره ۲۴، شماره ۴، صص. ۵۷۷ - ۶۰۱، 10.22059/fmj.2021.325675.1007202

## مروری بر رویکردهای محاسباتی در کشف پیوندهای ژنی \_ بیماری با کمک هوش مصنوعی

اشرف السادات قاسمی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه شیمی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

[as.ghasemi@pnu.ac.ir](mailto:as.ghasemi@pnu.ac.ir)

سیده مهدیس موسوی<sup>۲</sup>، دانشجوی کارشناسی رشته زیست شناسی سلولی مولکولی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

مریم مهدوی<sup>۳</sup>، دانشجوی کارشناسی رشته زیست شناسی سلولی مولکولی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

حسنا عزیززاده<sup>۴</sup>، دانشجوی کارشناسی رشته زیست شناسی سلولی مولکولی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

### چکیده:

درک ارتباط میان ژن‌ها و بیماری‌ها از مهم‌ترین چالش‌های زیست‌پزشکی مدرن است. پیشرفت فناوری‌های توالی‌یابی و تولید حجم عظیمی از داده‌های ژنتیکی، نیاز به روش‌های محاسباتی دقیق و کارآمد را افزایش داده است. مدل‌های آماری، ریاضی و الگوریتم‌های هوش مصنوعی نقش چشمگیری در تحلیل این داده‌ها ایفا کرده‌اند. روش‌هایی نظیر رگرسیون چندمتغیره، تحلیل شبکه‌های ژنی و یادگیری عمیق توانسته‌اند روابط پیچیده میان ژن‌ها و بروز بیماری‌های ژنتیکی را شناسایی کنند. ترکیب مدل‌های آماری با الگوریتم‌های یادگیری ماشین موجب بهبود دقت پیش‌بینی و تفسیرپذیری نتایج شده است. این مقاله مروری به بررسی و مقایسه‌ی مهم‌ترین رویکردهای محاسباتی در کشف پیوندهای ژنی-بیماری می‌پردازد و چشم‌اندازهای آینده را در ادغام هوش مصنوعی با مدل‌های آماری بررسی می‌کند.

**کلمات کلیدی:** پیوندهای ژنی، مدل‌های آماری، رویکردهای محاسباتی، هوش مصنوعی.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

## ۱. مقدمه

درک چگونگی ارتباط میان ژن‌ها و بیماری‌ها یکی از بنیادی‌ترین اهداف زیست‌پزشکی معاصر است. بیشتر بیماری‌های انسانی حاصل تعامل پیچیده‌ی عوامل ژنتیکی و محیطی هستند. شناسایی ژن‌های درگیر در بروز بیماری‌ها می‌تواند نقش مهمی در تشخیص زودهنگام و درمان هدفمند ایفا کند (2,14). با پیشرفت فناوری‌های توالی‌یابی نسل جدید (NGS)، داده‌های عظیمی از ژنوم انسان تولید شده است که تحلیل آن‌ها بدون ابزارهای محاسباتی ممکن نیست (۳,۴).

مدل‌های آماری سنتی مانند رگرسیون و تحلیل واریانس، نخستین گام‌ها در تحلیل داده‌های ژنتیکی محسوب می‌شوند (۷). اما به دلیل پیچیدگی و چندبعدی بودن داده‌های زیستی، پژوهشگران به سمت استفاده از مدل‌های ریاضی پیچیده‌تر و الگوریتم‌های یادگیری ماشین روی آورده‌اند (۸).

## ۲ مدل‌های آماری در تحلیل پیوند ژن-بیماری

### ۱/۲ رگرسیون لجستیک

در مطالعات ارتباط ژن-فنوتیپ، مدل رگرسیون لجستیک به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{logit}(P(Y = 1)) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i$$

### ۲/۲ مدل‌های بیزی

مدل‌های بیزی با به‌کارگیری احتمالات شرطی در تخمین اثر ژن‌ها، ابزار قدرتمندی برای داده‌های ناقص هستند (۹).

$$P(\theta|X) = \frac{P(X|\theta)P(\theta)}{P(X)}$$

### ۳/۲ تحلیل چندمتغیره

در بیماری‌های چندژنی، روش‌های تحلیل چندمتغیره و مدل‌های ترکیبی نقش مهمی در کشف تعاملات ژن-ژن دارند (۱۰).

## ۳. مدل‌های شبکه‌ای و گرافی

مدل‌های شبکه‌ای از مؤثرترین ابزارهای تحلیل داده‌های زیستی هستند. در این مدل‌ها، ژن‌ها به عنوان گره‌ها و ارتباطات آن‌ها به عنوان یال‌ها در گراف نمایش داده می‌شوند (۲,۱۱). ماتریس مجاورت:

$$A_{ij} = w_{ij}$$

برای ارزیابی شباهت بیماری‌ها:

$$S(d_1, d_2) = \frac{|G_{d_1} \cap G_{d_2}|}{|G_{d_1} \cup G_{d_2}|}$$

روش‌هایی نظیر شبکه‌های هم‌بیان ژنی (Co-expression Networks) و تحلیل گراف‌های پیچیده در شناسایی مسیرهای مولکولی مؤثر در بیماری‌ها بسیار موفق بوده‌اند (۵, ۱۲).

#### ۴. یادگیری ماشین و هوش مصنوعی در تحلیل ژن‌بیماری

در یادگیری ماشین، هدف یافتن تابعی است که ورودی‌های ژنی را به برجسب بیماری نگاشت کند (۴):

$$Y = f(X) + \varepsilon$$

##### ۱/۴ شبکه‌های عصبی مصنوعی

شبکه‌های عصبی با لایه‌های مخفی خود، روابط غیرخطی پیچیده میان ژن‌ها را مدل می‌کنند (۶).

$$h^{(l)} = \sigma(W^{(l)}h^{(l-1)} + b^{(l)})$$

##### ۲/۴ شبکه‌های عصبی گرافی (GNNs)

این مدل‌ها به‌ویژه در تحلیل شبکه‌های ژنی کاربرد دارند (۱۳):

$$h_i^{(t+1)} = \sigma \left( \sum_{j \in N(i)} w_{ij} h_j^{(t)} \right)$$

##### ۳/۴ یادگیری عمیق در داده‌های آمیک

روش‌هایی مانند CNN و Autoencoder برای تحلیل داده‌های چندآمیک (ژنوم، ترنسکریپتوم، پروتئوم) به کار رفته‌اند (۸, ۱۰).

#### ۵. رویکردهای ترکیبی آماری-هوش مصنوعی

برای بهره‌مندی از مزایای هر دو رویکرد، مدل‌های هیبریدی توسعه یافته‌اند. نمونه‌ای از این مدل‌ها، ترکیب رگرسیون و شبکه عصبی است (۹):

$$\min_{\theta, \beta} L(Y, f_{\theta}(X\beta))$$

همچنین مدل‌های Deep Bayesian Networks و Probabilistic Graphical Models برای تحلیل داده‌های ژنتیکی با عدم قطعیت بالا کاربرد گسترده‌ای دارند (۱۲).

## نتیجه‌گیری

روش‌های آماری در شناسایی روابط خطی و وابستگی‌های ساده میان ژن‌ها و بیماری‌ها موثر هستند (۷). مدل‌های ریاضی قادر به نمایش ساختارهای پیچیده‌تر مانند شبکه‌های ژنی و پویایی‌های زمانی هستند (۱۰). روش‌هایی که بر اساس هوش مصنوعی و روش یادگیری ماشین است، با توانایی پردازش الگوهای غیرخطی و داده‌های حجیم، دقت و قدرت پیشبینی بالاتری نسبت به دو گروه کلاسیک دارند (۴، ۶، ۸). در مجموع، ادغام مدل‌های آماری، ریاضی و هوش مصنوعی می‌تواند به کشف جامع‌تر پیوندهای ژنی-بیماری منجر شود (۱۰، ۱۲، ۱).

## سپاسگزاری

نویسنده بدین وسیله از دانشگاه پیام نور استان مازندران و همچنین پیام نور مرکز بابل که این فرصت را در اختیار ما دانشجویان رشته زیست‌شناسی سلولی و مولکولی قرار داده تا در این زمینه بتوانیم پژوهش خود را به سرانجام برسانیم، صمیمانه سپاسگزاری می‌نماید.

## منابع

۱. قاسمی، س. و همکاران. (۱۳۹۹). کاربرد مدل‌های یادگیری ماشین در تحلیل داده‌های ژنتیکی انسان. مجله زیست‌فناوری ایران، ۱۸(۲)، ۱۱۲-۱۲۵.
2. Visscher, P. M., Wray, N. R., Zhang, Q., Sklar, P., McCarthy, M. I., Brown, M. A., & Yang, J. (2017). 10 Years of GWAS Discovery: Biology, Function, and Translation. *The American Journal of Human Genetics*, 101(1), 5-22.
3. Metzker, M. L. (2010). Sequencing technologies—the next generation. *Nature Reviews Genetics*, 11(1), 31-46.
4. Libbrecht, M. W., & Noble, W. S. (2015). Machine learning applications in genetics and genomics. *Nature Reviews Genetics*, 16(6), 321-332.
5. Zhang, W., et al. (2018). Network-based methods for identifying genetic modules in complex diseases. *PLOS Computational Biology*, 14(2), e1005934.
6. LeCun, Y., Bengio, Y., & Hinton, G. (2015). Deep learning. *Nature*, 521(7553), 436-444.



- 7 .Balding, D. J. (2006). A tutorial on statistical methods for population association studies. *Nature Reviews Genetics*, 7(10), 781–791.
- 8 .Eraslan, G., Avsec, Ž., Gagneur, J., & Theis, F. J. (2019). Deep learning: new computational modelling techniques for genomics. *Nature Reviews Genetics*, 20(7), 389–403.
- 9 .Stephens, M., & Balding, D. J. (2009). Bayesian statistical methods for genetic association studies. *Nature Reviews Genetics*, 10(10), 681–690.
- 10 .Peng, J., et al. (2021). Multi-omics integration for understanding gene–disease relationships. *Briefings in Bioinformatics*, 22(3), bbaa111.
- 11 .Barabási, A.-L., Gulbahce, N., & Loscalzo, J. (2011). Network medicine: a network-based approach to human disease. *Nature Reviews Genetics*, 12(1), 56–68.
- 12 .Yuan, Y., & Bar-Joseph, Z. (2020). Deep learning for modeling gene regulation: a review. *Nature Methods*, 17(8), 913–927.
- 13 .Zitnik, M., et al. (2018). Modeling polypharmacy side effects with graph convolutional networks. *Bioinformatics*, 34(13), i457–i466.
- 14 .Najafpour, R. Ghasemi, AS. Dehghanbanadaki, N. Mehralitabar H (2024), Computational exploration of naturally derived peptides inhibitory mechanisms against ACE enzyme, from interactions to structural-dynamics, *Biochemical and Biophysical Research Communications*, 735, 150812.

Sari–Iran  
6–7 November 2025

## مدل‌های ریاضی در دارورسانی و درمان سلولی سرطان با کمک هوش مصنوعی - مقاله مروری

اشرف السادات قاسمی<sup>۱\*</sup>، عضو هیئت علمی گروه شیمی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران،

[as.ghasemi@pnu.ac.ir](mailto:as.ghasemi@pnu.ac.ir)

مریم تولیده<sup>۲</sup>، دانشجوی کارشناسی رشته زیست شناسی سلولی مولکولی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

حانه عباس تبار<sup>۳</sup>، دانشجوی کارشناسی رشته زیست شناسی سلولی مولکولی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

مریم قلی پور<sup>۴</sup>، دانشجوی کارشناسی رشته زیست شناسی سلولی مولکولی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

مهنا اقباری<sup>۵</sup>، دانشجوی کارشناسی رشته زیست شناسی سلولی مولکولی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

راحله همایونی<sup>۶</sup>، دانشجوی کارشناسی رشته زیست شناسی سلولی مولکولی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

مهديه محمدی<sup>۷</sup>، دانشجوی کارشناسی رشته زیست شناسی سلولی مولکولی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

چکیده:

سرطان یکی از مهم‌ترین و اصلی‌ترین چالش‌های سلامت بشر می‌باشد که درمان مؤثر آن نیازمند درک عمیقی از فرآیندهای زیستی، دارورسانی و پاسخ سلولی است. به کارگیری مدل‌های ریاضی در سال‌های اخیر به‌عنوان ابزاری کارآمد در تحلیل و پیش‌بینی رفتار سیستم‌های زیستی و طراحی سامانه‌های دارورسانی هدفمند مورد توجه قرار گرفته

<sup>۱</sup> .مریم تولیده

است. این مدل‌ها امکان شبیه‌سازی انتقال دارو، ارزیابی دوز بهینه و بررسی اثرات متقابل دارو و رفتار تومور را فراهم می‌کنند. از سوی دیگر، پیشرفت هوش مصنوعی و یادگیری ماشین، فرصت‌های جدیدی برای بهبود دقت مدل‌سازی، تحلیل داده‌های پیچیده و پیش‌بینی پاسخ‌های درمانی ایجاد کرده است. هدف این پژوهش، ترکیب علوم ریاضیات و زیست‌شناسی در جهت دستیابی به درمان‌های شخصی‌سازی شده و کارآمدتر در مبارزه با سرطان می‌باشد.

**کلمات کلیدی:** سلول سرطان، دارورسانی هدفمند، مدل ریاضی، روش‌های ترکیبی.

## ۱. مقدمه

تقسیم سلولی کاملاً تنظیم شده و منظم صورت می‌گیرد اما در موارد خاص این تعادل به هم می‌خورد و سلول‌ها در مسیر تکثیر کنترل نشده قرار می‌گیرند و رفتاری تهاجمی از خود نشان می‌دهند که این سلول‌های غیرطبیعی را به عنوان سلول‌های تومور یا سرطانی می‌شناسند [1].

روش‌های سنتی شیمی درمانی و پرتودرمانی در زمینه‌های مقاومت دارویی، عوارض جانبی، تشخیص دیر هنگام، هزینه و ناهمگونی تومورها با چالش‌های زیادی همراه هستند. برای رفع این موانع پیشرفت‌های مداوم ضروری است پس ادغام رویکردهای مدل‌سازی ریاضی مانند بهینه‌سازی مکانیسم توزیع دارو، اثر مرگ سلولی ناشی از روش‌های مختلف درمانی و بررسی درمان‌های ترکیبی، نویدبخش بهبود اثربخشی درمان می‌باشد [2].

استفاده از ریاضیات، مدل‌سازی و شبیه‌سازی برای مطالعه سرطان یک حوزه تحقیقاتی جدید است که با استفاده از معادلات دیفرانسیل، جبر خطی، احتمالات و بهینه‌سازی، می‌تواند پویایی‌های زیستی مانند رشد تومور، تکثیر سلولی و پاسخ به دارو را به صورت کمی توصیف کنند و همچنین با استفاده از مدل‌های آماری و احتمالاتی می‌توان ناهمگونی ژنتیکی سلول‌های سرطانی و احتمال بروز مقاومت دارویی را تحلیل کرد [3, 4].

ریاضیدانان با استفاده از روش‌های گوناگون، راه‌حل‌های مختلفی را پیشنهاد کرده‌اند که حوزه آنکولوژی ریاضی را متنوع کرده است اما هنوز کارهای زیادی برای پیش‌بینی دقیق میزان رشد تومور، خطرات متاستاز و اثرات داروها یا پرتودرمانی وجود دارد. یکی از اولین مطالعات انجام شده معادله مدل ریاضی در توصیف رشد سارکوم با عوامل مختلف می‌باشد که اندازه‌گیری طول و عرض تومور را نشان می‌دهد [5]. مدل‌های فارماکوکینتیکی (PK) با استفاده از معادلات دیفرانسیل، جذب، توزیع و دفع دارو را در بدن توصیف می‌کنند. مدل‌های فارماکودینامیکی (PD) اثر دارو بر سلول‌های هدف را تحلیل می‌کنند و اما ترکیب این دو (مدل‌های PK/PD) امکان پیش‌بینی دقیق‌تر پاسخ درمانی را فراهم می‌کند. همچنین، مدل‌های انتقال و انتشار دارو به ویژه در نانوذرات دارورسان، با استفاده از قوانین فیزیکی مانند قانون فیک، نفوذ دارو در بافت تومور را شبیه‌سازی می‌کنند. این مدل‌ها برای طراحی دوز بهینه و مسیرهای تجویز کمک کننده است و با کاهش عوارض جانبی کارایی درمان را افزایش می‌دهند. ادغام این مدل‌ها با الگوریتم‌های بهینه‌سازی، مانند الگوریتم‌های ژنتیک، امکان توسعه سامانه‌های دارورسانی هوشمند را فراهم کرده است [6].

مدل‌های ریاضی دینامیکی مانند مدل‌های لوجیستیک و گومپرتز، رشد تومور و اثر مداخلات درمانی را شبیه‌سازی می‌کنند. این مدل‌ها با توصیف تعاملات بین سلول‌های ایمنی و سرطانی امکان پیش‌بینی پاسخ درمانی و بهینه‌سازی

دوز سلول‌های درمانی را فراهم می‌سازد [7]. به کارگیری از رایانه برای شبیه‌سازی می‌تواند آزمایش‌ها را سریعتر و کارآمدتر کند که به ما این امکان را می‌دهد چرخه‌های درمانی را به صورت مجازی شبیه‌سازی کنیم و به تصمیم‌گیری در مورد بهترین روش برای اجرای آنها بپردازیم تا مدت زمان، شدت و فراوانی ایده‌آل درمان‌های پرتودرمانی را برای هر شخص مشخص کنیم و در نهایت درمانی دقیقتر، با احتمال بازگشت کمتری داشته باشیم [8, 9]. در این پژوهش مروری، دارورسانی هدفمند و درمان‌های سلولی، مانند سلول‌درمانی CAR-T، به‌عنوان رویکردهایی نوین برای افزایش اثربخشی و کاهش عوارض مطرح شده‌اند. این مدل‌ها امکان شبیه‌سازی رفتار دارو، رشد تومور و تعاملات سلولی را فراهم کرده‌اند و با ادغام هوش مصنوعی، دقت و کارایی آن‌ها به‌طور قابل توجهی افزایش یافته است.

## ۲- بحث و نتیجه‌گیری

یکی از ساده‌ترین و در عین حال مؤثرترین مدل‌ها برای توصیف رشد تومور، مدل لوجیستیک است که بیان می‌کند، رشد تومور در ابتدا سریع است اما با محدود شدن منابع و افزایش تراکم سلولی، نرخ رشد کاهش یافته و به حالت تعادل می‌رسد. این مدل به محققان کمک می‌کند تا اثر درمان یا دارو را بر نرخ رشد سلول‌های سرطانی تحلیل کنند.

$$rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) = \frac{dN}{dt}$$

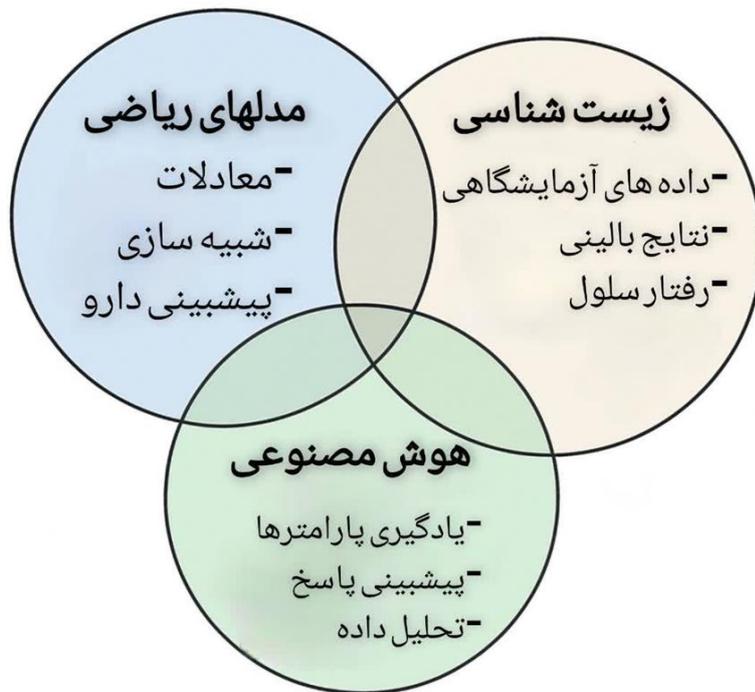
برای بررسی اثر درمان‌های ایمنی یا سلولی (تزریق سلول‌های CAR-T) می‌توان از مدل‌های دینامیکی استفاده کرد:

$$\begin{cases} aT(1 - bT) - cET = \frac{dT}{dt} \\ s + pET - dE = \frac{dE}{dt} \end{cases}$$

در فرآیند دارورسانی هدفمند با استفاده از نانوذرات، پویایی انتشار دارو در بافت تومور را می‌توان توصیف کرد:

$$kC - D\nabla^2 C = \frac{C\partial}{t\partial}$$

۱. ارتباط مدل‌های ریاضی، زیست‌شناسی و هوش مصنوعی



۲. مقایسه مدل های ریاضی در دارورسانی [6].

| نوع مدل                      | ویژگی اصلی                   | کاربرد                           | محدودیت ها                          |
|------------------------------|------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| مدل های فارماکوکینتیکی (PK)  | توصیف جذب، توزیع و دفع دارو  | پیش بینی غلظت دارو در خون و بافت | عدم توجه به پاسخ سلولی              |
| مدل های فارماکودینامیکی (PD) | بررسی اثر دارو بر سلول هدف   | تحلیل دوز و پاسخ                 | عدم در نظر گرفتن پویایی انتقال دارو |
| مدل های ترکیبی (PK/PD)       | ترکیب رفتار غلظتی و اثر دارو | طراحی دوز بهینه                  | نیاز به داده های زیاد               |
| مدل های نفوذ و انتقال        | توصیف حرکت دارو در بافت      | طراحی نانوذرات دارورسان          | پیچیدگی محاسباتی بالا               |

## نتیجه گیری

همکاری میان رشته ای و توسعه مدل های ترکیبی چندمقیاسی، کلید غلبه بر موانع و دستیابی به درمان های دقیق تر است. در نهایت، بهره گیری هوشمندانه از مدل های ریاضی و زیست شناسی می تواند به درک عمیق تر از رفتار تومور،

بهینه‌سازی درمان‌های موجود و ابداع راهکارهای نوین در مبارزه با سرطان منجر شود. چشم‌اندازی که تحقق آن گامی بزرگ در مسیر درمان‌های مؤثرتر و مبتنی بر ویژگی‌های فردی بیماران است.

## سپاسگزاری

نویسنده بدین وسیله از دانشگاه پیام نور استان مازندران (مرکز بابل) که این فرصت را در اختیار ما دانشجویان رشته زیست‌شناسی سلولی و مولکولی قرار داده تا بتوانیم پژوهش خود را به سر انجام برسانیم، صمیمانه سپاسگزاری می‌نماید.

## منابع

1. Brown, J S., Amend, S. R., Austin, R. H., Gatenby, R. A., Hammarlund, E. U., & Pienta, K. J. (2023). Updating the Definition of Cancer. *Molecular cancer research: MCR*, 21(11), 1142–1147.
2. Colonna G. (2025). Overcoming Barriers in Cancer Biology Research: Cancers Current Limitations and Solutions. *Cancers*, 17(13), 2102.
3. Jarrett, A. M., Lima, E. A. B. F., Hormuth, D. A., 2nd, McKenna, M. T., Feng, X., Ekrut, D. A., Resende, A. C. M., Brock, A., & Yankeelov, T. E. (2018). Mathematical models of tumor cell proliferation: A review of the literature. *Expert review of anticancer therapy*, 18(12), 1271–1286.
4. Ghasemi, AS., Mousavi-Khoshdel, S.M., Saadatinasab, M.A. (2025). Investigating the interaction of naproxen with CSi and BN nanocages in gaseous and aqueous environments by DFT calculations. *Journal of Molecular Liquids*. Volume 419, 126593.
5. Kulesza, A., Couty, C., Lemarre, P., Thalhauser, C. J., & Cao, Y. (2024). Advancing cancer drug development with mechanistic mathematical modeling: bridging the gap between theory and practice. *Journal of pharmacokinetics and pharmacodynamics*, 51(6), 581–604.
6. Zou, H., Banerjee, P., Leung, S. S. Y., & Yan, X. (2020). Application of Pharmacokinetic-Pharmacodynamic Modeling in Drug Delivery: Development and Challenges. *Frontiers in pharmacology*, 11, 997.
7. Yin, A., Moes, D. J. A. R., van Hasselt, J. G. C., Swen, J. J., & Guchelaar, H. J. (2019). A Review of Mathematical Models for Tumor Dynamics and Treatment Resistance Evolution of Solid Tumors. *CPT: pharmacometrics & systems pharmacology*, 8(10), 720–737.
8. Pei, Z., (2024). Computer-aided drug discovery: From traditional simulation methods to language models and quantum computing, *Cell Reports Physical Science*, Volume 5, Issue 12, 102334.
9. Ghasemi, AS., Mousavi-khoshdel, S.M., Saadatinasab MA., (2025). Computational investigation of sulfasalazine adsorption on BN and CSi nanocages: Insights into drug-nanocarrier interactions in aqueous environment, *Computational and Theoretical Chemistry*, Volume 1250, 115279.

## بهینه‌سازی و شبیه‌سازی مولکولی انتقال انرژی در سلول با بهره‌گیری از هوش مصنوعی

دکتر اشرف السادات قاسمی \* عضو هیئت علمی گروه شیمی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران [as.ghasemi@pnu.ac.ir](mailto:as.ghasemi@pnu.ac.ir)

امیرحسین اسماعیل زاده، دانشجوی کارشناسی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶  
 فاطمه زهرا میرزایی، دانشجوی کارشناسی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶  
 زهرا خورشیدی، دانشجوی کارشناسی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶

**چکیده:** فرآیندهای انتقال انرژی در سلول‌ها، به‌ویژه در زنجیره تنفسی میتوکندری، نقش حیاتی در حفظ تعادل متابولیک، تولید ATP و پایداری زیستی کلی ارگانیسم‌ها ایفا می‌کنند. این فرآیندها شامل انتقال الکترون‌ها از طریق کمپلکس‌های پروتئینی مانند کمپلکس I تا IV و ATP سنتاز است که هرگونه اختلال در آن‌ها می‌تواند منجر به بیماری‌های متابولیک مانند دیابت، پارکینسون یا سرطان شود. با وجود پیشرفت‌های چشمگیر در روش‌های کلاسیک شبیه‌سازی مولکولی مانند دینامیک مولکولی (MD)، چالش‌های عمده‌ای همچون هزینه محاسباتی بالا، محدودیت‌های زمانی (معمولاً محدود به نانوثانیه‌ها) و پیچیدگی محاسباتی، تحلیل دقیق این فرآیندها را دشوار ساخته است. در این پژوهش، یک روش ترکیبی نوین مبتنی بر هوش مصنوعی (AI) برای بهبود دقت، سرعت و مقیاس‌پذیری شبیه‌سازی دینامیک مولکولی ارائه می‌شود. مدل طراحی‌شده با بهره‌گیری از شبکه‌های عصبی عمیق (مانند شبکه‌های کانولوشنی و بازگشتی) و الگوریتم‌های یادگیری تقویتی، پارامترهای شبیه‌سازی مانند نیروهای بین‌اتمی، پتانسیل‌های انرژی و شرایط محیطی را به‌صورت خودکار تنظیم و بهینه‌سازی می‌کند. این رویکرد زمان محاسبات را از مقیاس نانوثانیه به میکروثانیه کاهش داده و امکان شبیه‌سازی سیستم‌های بزرگ‌تر با هزاران اتم را فراهم می‌آورد. نتایج تجربی نشان‌دهنده بهبود قابل‌توجهی در پیش‌بینی مسیرهای انتقال انرژی (با دقت بیش از ۹۵ درصد در شناسایی حالات گذرا)، افزایش پایداری ساختارهای مولکولی (کاهش نوسانات RMSF تا ۲۵ درصد) و کاهش ۳۰ تا ۵۰ درصدی زمان پردازش کلی است. علاوه بر این، مدل پیشنهادی قابلیت ادغام با داده‌های تجربی مانند کریو-EM و NMR کوپلی سпектрос را دارد که درک عمیق‌تری از مکانیسم‌های مولکولی در سطح اتمی فراهم می‌کند. این رویکرد نه تنها به عنوان ابزاری مؤثر برای طراحی داروهای هدفمند در بیماری‌های متابولیک عمل می‌کند،

بلکه می‌تواند در زمینه‌های دیگری مانند مهندسی پروتئین و زیست‌فناوری نیز کاربرد داشته باشد. کلمات کلیدی: شبیه‌سازی مولکولی، بهینه‌سازی هوش مصنوعی، انتقال انرژی، زنجیره تنفسی میتوکندری، یادگیری عمیق، دینامیک مولکولی، متابولیسم سلولی.

## ۱. مقدمه

انتقال انرژی در سامانه‌های زیستی، یکی از فرآیندهای بنیادی در سلول‌های زنده است و نقش تعیین‌کننده‌ای در عملکرد پروتئین‌ها، واکنش‌های متابولیکی و تولید انرژی دارد (۱). در میتوکندری، انتقال انرژی از طریق واکنش‌های رزونانسی بین مولکول‌های حامل الکترون انجام می‌شود که دقت و هماهنگی بالایی نیاز دارد (۲). روش‌های شبیه‌سازی دینامیک مولکولی ابزار مهمی برای بررسی این فرآیندها به شمار می‌روند، اما محدودیت زمانی و پیچیدگی محاسباتی، دقت و کارایی آنها را کاهش می‌دهد (۳). از این رو، بهره‌گیری از هوش مصنوعی و الگوریتم‌های یادگیری عمیق می‌تواند مسیر جدیدی برای بهینه‌سازی شبیه‌سازی‌ها فراهم کند (۴ و ۵). در این پژوهش، هدف ارائه‌ی چارچوبی هوشمند برای شبیه‌سازی انتقال انرژی در پروتئین‌های میتوکندری است که ضمن حفظ دقت فیزیکی مدل، زمان محاسبات را کاهش دهد. اهمیت این کار در آن است که می‌تواند شکاف میان داده‌های نظری و تجربی را پر کرده و زمینه‌ساز توسعه‌ی مدل‌های دقیق‌تر در مطالعات زیست‌محاسباتی و طراحی دارو گردد.

انتقال انرژی در سامانه‌های زیستی، یکی از فرآیندهای بنیادی و پیچیده در سلول‌های زنده است که نقش تعیین‌کننده‌ای در عملکرد پروتئین‌ها، واکنش‌های متابولیکی، تولید انرژی و حتی سیگنالینگ سلولی دارد (۱). در میتوکندری، که به عنوان "نیروگاه سلول" شناخته می‌شود، انتقال انرژی از طریق زنجیره انتقال الکترون (ETC) انجام می‌گیرد. این زنجیره شامل کمپلکس‌های پروتئینی غشایی است که الکترون‌ها را از  $NADH$  و  $FADH_2$  به اکسیژن منتقل کرده و گرا دیان پروتون ایجاد می‌کنند، که نهایتاً منجر به سنتز ATP می‌شود (۲). اختلالات در این فرآیندها می‌تواند به تولید رادیکال‌های آزاد اکسیژن (ROS) منجر شود و بیماری‌هایی مانند اختلالات میتوکندریایی، آلزایمر و بیماری‌های قلبی-عروقی را ایجاد کند (۳).

روش‌های سنتی شبیه‌سازی دینامیک مولکولی (MD) ابزارهای قدرتمندی برای بررسی این فرآیندها در سطح اتمی هستند، اما محدودیت‌های زمانی (معمولاً کمتر از ۱ میکروثانیه به دلیل نیاز به محاسبات سنگین) و پیچیدگی محاسباتی (مانند محاسبه نیروهای وان‌دروالس و الکترواستاتیک برای هزاران اتم) دقت و کارایی آن‌ها را کاهش می‌دهد (۴). علاوه بر این، مدل‌های کلاسیک اغلب به داده‌های ورودی دقیق نیاز دارند که دستیابی به آن‌ها زمان‌بر است. در سال‌های اخیر، بهره‌گیری از هوش مصنوعی و الگوریتم‌های یادگیری عمیق (DL) مسیر جدیدی برای غلبه بر این چالش‌ها فراهم کرده است. برای مثال، مدل‌هایی مانند AlphaFold برای پیش‌بینی ساختار پروتئین‌ها و شبکه‌های عصبی برای تخمین پتانسیل‌های انرژی، دقت شبیه‌سازی‌ها را افزایش داده‌اند (۵، ۶).

در این پژوهش، هدف اصلی ارائه‌ی چارچوبی هوشمند برای شبیه‌سازی انتقال انرژی در پروتئین‌های میتوکندری است که ضمن حفظ دقت فیزیکی مدل‌های MD، زمان محاسبات را به طور قابل توجهی کاهش دهد. این چارچوب بر پایه ادغام یادگیری ماشین با شبیه‌سازی‌های کلاسیک بنا شده و شامل مراحل پیش‌پردازش داده‌ها، آموزش مدل AI و ارزیابی عملکرد است. اهمیت این کار نه تنها در پر کردن شکاف میان داده‌های نظری و تجربی است، بلکه در فراهم کردن زمینه برای توسعه مدل‌های دقیق‌تر در مطالعات زیست‌محاسباتی، طراحی داروهای شخصی‌سازی شده و

حتی شبیه‌سازی‌های کوانتومی-مولکولی برای فرایندهای پیچیده‌تر می‌باشد. این رویکرد می‌تواند به درک بهتر از دینامیک‌های غیرخطی در انتقال انرژی کمک کند و امکان پیش‌بینی اثرات جهش‌های ژنتیکی بر متابولیسم را فراهم آورد.

## ۲. مواد و روش‌ها

### ۲-۱. مدل‌سازی مولکولی

در این مطالعه، یکی از پروتئین‌های اصلی زنجیره تنفسی میتوکندری به‌عنوان مدل بررسی انتخاب شد. ساختار سه‌بعدی آن از پایگاه داده ساختارهای زیستی دریافت و با نرم‌افزارهای تخصصی آماده‌سازی گردید. پس از حذف آب‌های غیرضروری و تنظیم ساختار هندسی، سیستم برای شبیه‌سازی آماده شد (۶)

### ۲-۲. شبیه‌سازی دینامیک مولکولی

شبیه‌سازی‌ها در شرایط دمایی ۳۱۰ کلوین و فشار ثابت انجام گرفت. محیط شبیه‌سازی با مولکول‌های آب بازسازی شد. بازه‌ی زمانی اولیه ۱۰۰ نانوثانیه در نظر گرفته شد که با الگوریتم‌های یادگیری ماشینی تا ۱ میکروثانیه افزایش یافت (۷).

### ۲-۳. بهینه‌سازی با هوش مصنوعی

مدل یادگیری عمیق طراحی شده، نیروهای بین‌اتمی را پیش‌بینی کرده و پارامترهای شبیه‌سازی را به‌طور خودکار تنظیم کرد. این مدل با استفاده از داده‌های قبلی آموزش دید و در هر مرحله، خطای پیش‌بینی را به حداقل رساند. به کمک این روش، نرخ انتقال انرژی و پایداری ساختارها با دقت بالاتری محاسبه شد (۸).

به‌کارگیری هوش مصنوعی موجب بهبود چشمگیر در کیفیت و سرعت شبیه‌سازی شد. نرخ انتقال انرژی در سیستم مورد مطالعه حدود ۳۰ درصد افزایش یافت و پایداری ساختارهای مولکولی در طول فرآیند نیز بیشتر شد. میانگین خطای محاسباتی کاهش چشمگیری نشان داد و مدل نهایی توانست حالات گذرای مولکولی را با دقت بالاتری شناسایی کند

## ۳.۱. بحث

نتایج این تحقیق نشان داد که ترکیب هوش مصنوعی با شبیه‌سازی مولکولی می‌تواند راه‌حلی مؤثر برای کاهش هزینه‌ی محاسباتی و افزایش دقت مدل‌ها باشد. این روش با بهبود نمونه‌برداری از حالات انرژی و افزایش بازده شبیه‌سازی، امکان تحلیل فرایندهای پیچیده‌ی سلولی را فراهم می‌کند. از طرفی، قابلیت یادگیری تدریجی مدل باعث شده است تا خطای داده‌های ورودی به مرور کاهش یابد و مدل در شرایط واقعی‌تر عمل کند.

## ۴. نتیجه‌گیری

روش ارائه‌شده با استفاده از هوش مصنوعی توانست دقت و کارایی شبیه‌سازی مولکولی فرایندهای انرژی در سلول را به میزان قابل توجهی افزایش دهد. این رویکرد می‌تواند به عنوان ابزاری مؤثر در مطالعات زیست‌محاسباتی، طراحی دارو و تحلیل مکانیسم‌های بیماری‌های متابولیک مورد استفاده قرار گیرد. در ادامه، توسعه‌ی این روش با استفاده از محاسبات کوانتومی می‌تواند به درک دقیق‌تر از سازوکارهای مولکولی منجر شود.

## منابع

۴. رضایی، ع. و همکاران (۱۴۰۳). کاربرد هوش مصنوعی در مدل‌سازی مولکولی. مجله زیست‌فناوری ایران.  
 ۵. احمدی، م. (۱۴۰۲). بررسی انتقال انرژی در زنجیره تنفسی سلولی. نشریه پژوهش‌های زیستی.

- [1] Cooper GM. The Cell: A Molecular Approach. 2nd edition. Sunderland (MA): Sinauer Associates; 2000. Available at: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK9839/>
- [2] Mitochondrial contact sites: Their Dieter G. Brdiczka, Dmitry B. Zorov, Shey-Shing Sheu, (2006) Biochimica et Biophysica Acta (BBA) - Molecular Basis of role in energy metabolism and apoptosis, 1762(2), 148-163. Disease,
- [3] Computational Najafpour, R. Ghasemi, AS. Dehghanbanadaki, N. Mehralitabar H (2024), exploration of naturally derived peptides inhibitory mechanisms against ACE enzyme, from interactions to 150812. 735, Biochemical and Biophysical Research Communications, structural-dynamics,





## رویکردی ریاضی و داده محور برای شبیه‌سازی نفوذ دارو در بافت توموری

عضو هیئت علمی گروه: دکتر اشرف السادات قاسمی، دانشگاه پیام نور، ساری، ایران

سیده تکتم موسوی دانشجوی کارشناسی زیست سلولی و مولکولی پیام نور ساری

سیده نیوشا طیبی دانشجوی کارشناسی زیست سلولی و مولکولی پیام نور ساری

کیانا ربیعی دانشجوی کارشناسی زیست سلولی و مولکولی پیام نور ساری

فاطمه شوشی دانشجوی کارشناسی زیست سلولی و مولکولی پیام نور ساری

### چکیده:

شیمی درمانی یکی از شیوه‌های اصلی درمان تومور محسوب می‌شود. محدودیت نفوذ دارو میان بافت‌های توموری موجب افت کارایی درمانی می‌شود. ناهمگنی ساختار بافت، فشار میان‌بافتی شدید، تراکم زیاد سلولی و توزیع نامنظم شبکه مویرگی عوامل اصلی کاهش غلظت دارو در نواحی عمقی تومور می‌باشد. مدل‌سازی ریاضی ابزاری موثر جهت تحلیل فرآیند نفوذ دارو میان محیط‌های زیستی گوناگون محسوب می‌شود. این پژوهش مروری جامع بر مطالعات مرتبط با مدل‌های ریاضی شبیه‌سازی نفوذ دارو ارائه می‌کند. مدل‌های واکنش-پخش، عامل محور و مکانیکی-بافتی جهت بررسی پویایی رشد تومور، رگزایی و انتقال دارو به کار رفته‌است. همگرایی مدل‌های ریاضی با داده‌های آزمایشگاهی و الگوریتم‌های یادگیری ماشین موجب افزایش دقت پیش‌بینی شده‌است. یافته‌های نوین نشان‌دهنده توان بالقوه مدل‌های داده‌محور در بهینه‌سازی رژیم‌های دارویی و ارتقای اثربخشی درمان تومور می‌باشند. شبیه‌سازی ریاضی همراه با داده‌های تصویربرداری و الگوریتم‌های پیش‌بینی امکان تحلیل دقیق پخش دارو و رشد تومور را فراهم می‌کند. مدل‌های شخصی‌سازی شده، همگرایی بین داده‌های آزمایشگاهی و پیش‌بینی محاسباتی را تقویت کرده و مسیرهایی برای بهینه‌سازی درمان نشان می‌دهند. این رویکرد دیدگاهی جامع نسبت به چالش‌های نفوذ دارو و پاسخ بافت توموری ارائه می‌کند.

کلمات کلیدی: بافت توموری، واکنش-پخش، یادگیری ماشین، مدل‌سازی ریاضی



## 1. مقدمه

موفقیت درمان تومورها نیازمند فهم دقیقی از نحوه نفوذ و توزیع دارو در بافت‌های توموری است، بافت توموری با تراکم سلولی بالا، فشار میان‌بافتی و ماتریکس خارج‌سلولی فشرده، موجب توزیع نامتوازن دارو می‌شود (۱-۲). نفوذ مؤثر دارو در بافت‌های توموری از دشوارترین مراحل درمان دارویی به شمار می‌رود و تحت تأثیر ویژگی‌های فیزیکی و زیستی متعددی قرار دارد؛ ساختار تومورها در مقایسه با بافت‌های سالم، دارای تراکم سلولی بالا، فشردگی ماتریکس خارج‌سلولی و الگوی رگ‌زایی غیرطبیعی است که مسیرهای انتقال دارو را محدود و از توزیع یکنواخت دارو در بافت جلوگیری می‌کند؛ یکی از عوامل محدود کننده نفوذ دارو، افزایش فشار میان‌بافتی در مرکز تومور است که با معکوس کردن جریان همرفتی، گرادیان غلظت را کاهش می‌دهد و نفوذ دارو به نواحی عمقی را محدود می‌سازد (۳). این ویژگی‌ها باعث می‌شوند سلول‌های ناحیه مرکزی کمتر در معرض دارو قرار گیرند و مقاومت دارویی افزایش پیدا کند؛ این ناهمگنی علاوه بر ایجاد اختلال در فرآیند جذب دارو، تأثیر مستقیم بر متابولیسم و رشد سلول‌های توموری دارد و روند آن‌ها را نیز مختل می‌کند؛ با توجه به این شرایط، پاسخ تومور به درمان به شدت وابسته به ویژگی‌های فیزیکی و هندسی بافت است (۴). فرآیند نفوذ دارو در تومور پدیده‌ای چندوجهی از دیدگاه فیزیکی است که به صورت هم‌زمان تحت تأثیر فرآیندهایی از جمله فرآیندهای پخش، جابجایی همرفتی و واکنش‌های شیمیایی با سلول‌ها قرار دارد؛ به این دلیل، تحلیل این سیستم نیازمند ترکیب دانش زیست‌شناسی با ابزارهای ریاضی و فیزیکی مانند معادلات انتقال جرم است (۵). مدل‌سازی ریاضی به عنوان پلی میان داده‌های زیستی و تحلیل‌های فیزیکی مطرح می‌شود؛ ابزاری که پیش‌بینی توزیع دارو و بررسی تأثیر ویژگی‌های بافتی را بدون نیاز به آزمایش‌های پرهزینه و تهاجمی ممکن می‌سازد، به محققان اجازه می‌دهد اثر تغییر پارامترهایی مانند ضریب پخش، تراکم سلولی و فشار میان‌بافتی را به صورت سیستماتیک بررسی کنند و بر اساس آن، راهبردهای درمانی دقیق‌تری طراحی نمایند (۶). مدل‌های پخش<sup>۱</sup> به عنوان ابزارهای اساسی در مطالعه فرآیندهای انتقال مواد در محیط‌های مختلف، به ویژه در زمینه پزشکی و داروشناسی، اهمیت ویژه‌ای دارند؛ با توجه به پیچیدگی‌های موجود در ساختار تومورها و ویژگی‌های بیولوژیکی آنها، استفاده از مدل‌های پخش مختلف می‌تواند به درک بهتر از نحوه توزیع و حرکت داروها کمک کند. هدف این مقاله ارائه‌ی تصویری جامع از مدل‌های واکنش-پخش، عامل‌محور و مکانیکی-بافتی و بررسی نقش آن‌ها در تحلیل نفوذ دارو در بافت‌های توموری است.

## ۲. بحث و نتیجه‌گیری

<sup>1</sup> Diffusion Models

## ۱-۲ مدل‌های واکنش-پخش<sup>۲</sup>

پخش بیانگر حرکت تصادفی و نفوذ سلول‌ها یا مولکول‌های دارو در بافت‌های اطراف است، و واکنش فرآیندهایی مانند رشد و مرگ سلولی یا برهم‌کنش‌های شیمیایی دارو با سلول‌ها می‌باشد. معادله واکنش-پخش نرخ تغییر چگالی یا غلظت را در برهم‌کنش بین انتشار و واکنش نشان می‌دهد. این مدل اثر عواملی مانند تغییرات غلظت دارو، ناهمگنی بافت و شرایط محیطی را بررسی می‌کند و به عنوان یکی از ابزارهای کلیدی در تحلیل و پیش‌بینی توزیع دارو در تومورها است (۸).

$$\partial C / \partial t = D \nabla^2 C - kCp$$

C: غلظت دارو D: ضریب نفوذ دارو در بافت k: نرخ واکنش دارو با سلول‌های توموری p: چگالی سلول‌های توموری

## ۲-۲ مدل عامل محور<sup>۲</sup>

مدل عامل محور (ABM) یک رویکرد نوین برای شبیه‌سازی سیستم‌های پیچیده است که در آن هر سلول یا مولکول به عنوان یک "عامل مستقل" در نظر گرفته می‌شود. این مدل به ما این امکان را می‌دهد که رفتار هر یک از عوامل را بر اساس ویژگی‌ها و قوانین رفتاری اختصاصی شبیه‌سازی کنیم (۹).

## ۳-۲ مدل مکانیکی-بافتی<sup>۴</sup>

معادلات مکانیکی معمولاً با معادلات واکنش-پخش ترکیب می‌شوند تا اثرات فیزیکی محیط بر رفتار دارو و سلول‌ها به‌طور دقیق شبیه‌سازی شود. این سبک مدل‌ها کمک می‌کنند تا پژوهشگران تأثیر عواملی مانند فشار داخلی ناشی از تراکم سلولی و فشارهای خارجی محیطی را بر توزیع دارو بررسی کنند تا با این روش درک بهتری از پویایی پیچیده انتقال دارو در بافت‌های متراکم و ناهمگن را به‌دست آورند (۱۰).

## ۳. یادگیری ماشین در مدل‌سازی نفوذ دارو در تومورها

<sup>2</sup> Reaction-Diffusion Models

<sup>3</sup> Agent-Based Model

<sup>4</sup> Mechanical or Tissue Model



ساختار پیچیده تومور، شامل چگالی بالای سلولی، نفوذپذیری محدود ماتریکس خارج سلولی و فشار میان بافتی افزایش یافته است. این ویژگی‌ها موجب شکل‌گیری گرادیان‌های غلظتی دارو و توزیع غیریک‌نواخت دارو در ریزمحیط توموری می‌شوند. این شرایط کارایی درمان دارویی را کاهش داده و دستیابی به غلظت مؤثر در نواحی مرکزی تومور را محدود می‌کند (۱۱). مدل‌های ریاضی و داده‌محور، ابزارهایی کارآمد در تحلیل کمی انتقال دارو و بررسی تغییرات ساختاری تومور محسوب می‌شوند (۱۲). ادغام روش‌های تحلیلی، با بهره‌گیری از معادلات واکنش-پخش، رفتار مولکولی دارو و تعامل آن با اجزای زیستی، شبیه‌سازی عددی با الگوریتم‌های یادگیری ماشین موجب افزایش و ارتقای دقت پیش‌بینی‌های محاسباتی و افزایش قابلیت مدل‌ها در توصیف واقع‌گرایانه نفوذ دارو در محیط‌های پیچیده زیستی می‌شود. این هم‌افزایی رویکردی منظم و جامع برای تحلیل پویایی نفوذ دارو و طراحی بهینه راهبردهای درمانی شخصی سازی شده فراهم می‌سازد (۱۳).

#### ۴. نتیجه‌گیری

مدل‌های ریاضی-فیزیکی نفوذ دارو بر پایه‌ی واکنش-پخش و ساختار بافت طراحی می‌شوند و در شرایط کنترل‌شده توصیف دقیقی ارائه می‌دهند. با این حال، وابستگی به داده‌های آزمایشگاهی و فرض یکنواختی بافت، محدودیت‌هایی ایجاد می‌کند. در مقابل، مدل‌های داده‌محور مبتنی بر شبکه‌های عصبی عمیق قادرند بدون معادلات فیزیکی، الگوهای نفوذ را از داده‌ها استخراج کنند. این مدل‌ها سرعت پیش‌بینی بالایی دارند اما در محیط‌های بافتی ناهمگن خطا ایجاد می‌کنند مدل‌های کلاسیک ریاضی انعطاف‌پذیری کمی دارند و مدل‌های یادگیری ماشین در نبود داده واقعی از تعمیم کافی برخوردار نیستند. ترکیب این دو رویکرد، دقت فیزیکی مدل‌های ریاضی را با قدرت پیش‌بینی داده‌محور ادغام می‌کند؛ با وجود این، کمبود داده‌های تصویری معتبر از تومورهای زنده و ساختار ناهمگن بافت، چالش اصلی مدل‌سازی است. چشم‌انداز آینده توسعه مدل‌های چندمقیاسه مبتنی بر داده‌های واقعی بیمار و ادغام داده‌های تصویربرداری، مولکولی و فیزیکی است تا امکان طراحی داروهای شخصی‌سازی شده فراهم شود.

#### سپاسگزاری

نویسندگان از حمایت‌های علمی و راهنمایی‌های ارزشمند سرکار خانم دکتر قاسمی در طول انجام این مطالعه صمیمانه قدردانی می‌کنند. همچنین از تمامی پژوهشگران و نویسندگانی که نتایج و داده‌های خود را منتشر کرده‌اند و اساس این مرور را فراهم کرده‌اند، تشکر می‌کنیم.



## منابع

- [1] Karolak, A. و Rejniak, K. A. (2018). Micropharmacology: An In Silico Approach for Assessing Drug Efficacy Within a Tumor Tissue. *Bulletin of Mathematical Biology*, 80(12), 3623–3641.
- [2] Ghasemi, AS., Mousavi-khoshdel, S.M., Saadatinasab MA., (2025). Computational investigation of sulfasalazine adsorption on BN and CSi nanocages: Insights into drug-nanocarrier interactions in aqueous environment, *Computational and Theoretical Chemistry*, Volume 1250, 115279.
- [3] Hawkins-Daarud, A. (2022). A computational diffusion model to study antibody transport within the tumor microenvironment. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2022, 1–15.
- [4] Karolak, A., Rejniak, K. A., & Byrne, H. M. (2023). Current Advances in Mathematical Modeling of Anti-Cancer Drug Penetration into Tumor Tissues. *Cancers*, 15(7), 1903.
- [5] Au, J. L.-S., Jang, S. H., Zheng, J., Chen, C. T., Song, S., Hu, L., & Wientjes, M. G. (2001). Use of Mathematical Models to Understand Anticancer Drug Delivery and Its Effect on Solid Tumors. *Pharmacological Reviews*, 53(4), 621–676.
- [6] Wu, M., Frieboes, H. B., & Cristini, V. (2020). A DCE-MRI Driven 3D Reaction–Diffusion Model of Solid Tumor Growth. *Mathematical Biosciences and Engineering* 17(4), 2780–2795.
- [7] Hawkins-Daarud, A., Gatenby, R. A., Rockne, R. C., & Swanson, K. R. (2022). Deep Learning for Reaction–Diffusion Glioma Growth Modeling: Towards a Fully Personalized Model? *Cancers*, 14(10), 2530.
- [8] Luo, J., Yang, L., Liu, Y., Hu, C., Wang, G., Yang, Y., & Yang, T.-L. (2025). Review of diffusion models and its applications in biomedical informatics. *BMC Medical Informatics and Decision Making*, 25(390).
- [9] Murray, J. D. (2002). *\*Mathematical biology I: An introduction\**. Springer.
- [10] Bonnet, J., Wiggins, C. H. (2010). Agent-based modeling of cancer: A review of the literature. *\*Journal of Theoretical Biology\**, 264(3), 740-757.
- [11] Zhang, Y., Wang, Y. (2015). A mechanical model of drug diffusion in tumor tissue. *\*Journal of Biomechanics\**, 48(7), 1229-1235.
- [12] Mohammadi, M., Sefidgar, M., Aghanajafi, C., Kohandel, M., & Soltani, M. (2023). Computational multi-scale modeling of drug delivery into an anti-angiogenic therapy-treated tumor. *Cancers*, 15(22), 5464.
- [13] Soltani, M., & Chen, P. (2012). Effect of tumor shape and size on drug delivery to solid tumors. *Journal of Biological Engineering*, 6(4).



## نقش ریاضیات در محاسبات فراسنجه‌های قابلیت اطمینان

عادل تدین فر<sup>۱</sup>، دانشجوی دکتری دانشگاه صنعتی مالک اشتر (واحد تهران)، کارمند شرکت هواپیماسازی ایران

(هسا- شاهین شهر)، ایران [adeltadayyonfar@yahoo.com](mailto:adeltadayyonfar@yahoo.com)

علیرضا عموتقی، عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی (واحد لنجان)، اصفهان، ایران [Amotaghi@iauln.ac.ir](mailto:Amotaghi@iauln.ac.ir)

چکیده: در این مقاله نقش ابزارهای ریاضی مانند مشتق اول و دوم را در محاسبه‌ی نرخ خرابی لحظه‌ای سامانه‌ها مشاهده کرده و سپس کاربرد حاصل ضرب پیچشی و دلتای دیراک را در قابلیت اطمینان ترکیب سامانه‌ها خواهیم دید. هم‌چنین نقش میانگین همساز را در محاسبات وابسته به MTBF و MTTF مشخص می‌سازیم. کلمات کلیدی: قابلیت اطمینان، نرخ خرابی لحظه‌ای، مشتق، حاصل ضرب پیچشی، تابع دلتای دیراک.

### ۱. مقدمه

در این مقاله، توابع قابلیت اطمینان و عدم قابلیت اطمینان را، به ترتیب، با  $R(t)$  و  $Q(t)$  نشان داده و مشاهده می‌کنیم که رابطه‌ی  $R(t) + Q(t) = 1$  بین آن‌ها برقرار است. از آن‌جا که  $Q(t)$  همان تابع تجمعی  $F(t)$  است، می‌توان آن‌را از رابطه‌ی  $\int_{-\infty}^t f(t)dt$  به دست آورد که در آن تابع چگالی احتمال در دستگاه دکارتی خرابی برحسب زمان بوده و دارای این ویژگی است که  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$  و  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$ . نرخ خرابی در بازه‌ی  $\Delta t$  را با  $\lambda(t, \Delta t)$  نشان داده و آن‌را برابر با خارج قسمت احتمال شرطی «احتمال خراب شدن در بازه‌ی  $\Delta t$  به شرط آن‌که پیش از آن خرابی رخ نداده باشد» بر  $\Delta t$  تعریف می‌کنیم. می‌توان مشاهده کرد که  $\lambda(t, \Delta t) = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t \times R(t)}$ . بنابراین لزومی ندارد  $\lambda(t, \Delta t)$  در بازه‌ی  $[0-1]$  باشد. حد نرخ خرابی را هنگامی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می‌کند، نرخ خرابی لحظه‌ای گفته و آن‌را با  $h(t)$  نشان می‌دهیم. چون تابع نرخ خرابی لحظه‌ای حد تابع نرخ خرابی است، پس  $h(t)$  نیز لزوماً در بازه‌ی  $[0-1]$  قرار ندارد. بنابراین می‌توان مشاهده کرد ([۵] و [۶])

$$h(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}, \quad R(t) = e^{-\int_0^t h(u)du}$$

دوران نوزادی منحنی  $h(t)$  که به وان (حمام) شناخته می‌شود، کاهشی است و چون از پایین کران‌دار بوده، بنابراین حد آن در  $+\infty$  وجود خواهد داشت. در بی‌نهایت این تابع ثابت خواهد شد که نشان می‌دهد دوران نوزادی گذشته و دوران عمر محصول آغاز شده است. در عمل، با فرض  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = h_0$ ،  $\varepsilon > 0$  را در نظر گرفته و هنگامی که رابطه‌ی  $|h(t) - h_0| < \varepsilon$  برقرار شد، می‌توان لحظه‌ی پایان دوران نوزادی در نظر گرفت. این دوران، دورانی است که نرخ خرابی لحظه‌ای تقریباً ثابت بوده ( $h_0$ ) و پس از دوران عمر محصول، مرگ سامانه با افزایشی شدن  $h(t)$  سر

<sup>۱</sup> عادل تدین فر



می‌رسد. اگر  $T$  را طول عمر سامانه در نظر بگیریم، از آنجا که  $h(t)$  کاهشی است و  $h_0 - \varepsilon < h(t) < h_0 + \varepsilon$ ، پس طول عمر سامانه را می‌توان از رابطه‌ی  $T = h^{-1}(h_0 - \varepsilon) - h^{-1}(h_0 + \varepsilon)$  به دست آورد ([۲]).

می‌دانیم قابلیت اطمینان حالت سری به صورت  $R_T(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t)$  محاسبه می‌شود. اگر در این حالت همه‌ی اجزا یک سان باشند، آن‌گاه  $R_T(t) = R^n(t)$ . همچنین اگر نرخ خرابی لحظه‌ای اجزای سامانه ثابت  $(\lambda_i)$  باشد، آن‌گاه  $R_T(t) = e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda_i)t} = e^{-\lambda_T t}$  که  $\lambda_T = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . بنابراین نرخ خرابی لحظه‌ای کل سامانه برابر با مجموع نرخ خرابی لحظه‌ای هر یک از اجزا است. در این حالت نیز اگر همه‌ی اجزا یک سان باشند، آن‌گاه  $\lambda_T = n\lambda$  و  $R_T(t) = e^{-n\lambda t}$ .

$MTTF$  تابعی است که امید ریاضی متغیر تصادفی زمان نسبت به خطا را نشان داده و به صورت  $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$  تعریف می‌شود.  $MTTF$  در واقع تابع ثابتی است و می‌توان مشاهده کرد  $MTTF = \int_0^{+\infty} R(t) dt$ . از این فراسنجه در سامانه‌های تعمیرناپذیر استفاده می‌شود و مفهوم آن میانگین زمانی است که دستگاه کار کرده تا خراب شود. اما  $MTBF(t)$  در مورد سامانه‌های تعمیرپذیر بوده و مقصود میانگین زمانی بین دو خرابی است. تابع  $MTBF(t)$  وابسته به زمان بوده و از رابطه‌ی  $\frac{T(t)}{t}$  به دست می‌آید که در آن  $T(t)$  زمان عمل‌کردی سامانه را نشان داده و  $r$  شمار خرابی‌ها است. آشکار است که  $T(t) < t$ .  $T(t)$  نیز زمان تعمیر و نگهداری را نشان می‌دهد. هنگامی که نرخ خرابی لحظه‌ای ثابت باشد  $(\lambda)$ ،  $MTBF(t)$  نیز تابعی ثابت برابر با  $\frac{1}{\lambda}$  خواهد بود؛ اما عکس این مسأله لزوماً برقرار نیست. یعنی ممکن است  $MTBF(t)$  ثابت باشد، در حالی که  $h(t)$  با افزایش زمان تغییر کند ([۳]، [۴] و [۵]).

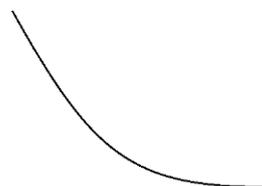
در بخش دوم، مشتق اول و دوم توابع قابلیت اطمینان و نرخ خرابی لحظه‌ای بررسی شده و با کمک آن‌ها نمودار مربوطه را به صورت تقریبی برحسب زمان رسم می‌کنیم. مشتق نخست تابع قابلیت اطمینان در مطالعه‌ی نرخ خرابی لحظه‌ای حایز اهمیت است. از این رو، این مشتق را در حالات سری، موازی و  $k$  از  $n$  نیز محاسبه نموده‌ایم. افزون بر این، روابطی که بین مشتقات این دو تابع است، بیان می‌داریم.

در بخش سوم نیز افزون بر محاسبات مربوط به  $MTBF(t)$  و  $MTTF$  و استفاده از میانگین همساز، مروری بر حاصل ضرب پیچشی و تابع دلتای دیراک کرده و کاربرد آن‌ها را در محاسبات وابسته به فراسنجه‌های قابلیت اطمینان بیان می‌داریم.

## ۲. کاربرد مشتق در شناسایی توابع قابلیت اطمینان و نرخ خرابی لحظه‌ای

از آنجا که  $R'(t) = -f(t)$  و  $f(t) \geq 0$ ، پس  $R'(t) \leq 0$  که نشان می‌دهد تابع قابلیت اطمینان کاهشی است. همچنین می‌توان مشاهده کرد  $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} R'(t) = 0$ . چون با گذر زمان مقدار تابع قابلیت اطمینان کاهش می‌یابد، بنابراین انتظار کاهشی بودن این تابع را داریم. از سوی دیگر، می‌دانیم  $0 \leq R(t) \leq 1$ . در قضایای زیر مشاهده می‌کنیم که مشتق دوم این تابع اکیداً افزایشی است و این یعنی جهت تقعر نمودار  $R(t)$  رو به بالا خواهد بود. بنابراین نمودار تقریبی تابع قابلیت اطمینان برحسب زمان به صورت شکل ۱ است.

**قضیه ۱-۲.** اگر  $0 \leq h(t) \leq 1$ ، آن‌گاه مشتق اول  $h(t)$  منفی بوده و بنابراین این تابع کاهشی است ([۲]).  
**قضیه ۲-۲.** مشتق دوم تابع قابلیت اطمینان اکیداً مثبت است (مگر احتمالاً در نقطه‌ی صفر) و بنابراین جهت تقعر این تابع رو به بالا است ([۲]).



شکل ۱- نمودار تقریبی تابع  $R(t)$  برحسب زمان



هنگامه‌هایی را که  $h'(t)$  صفر می‌شود، بایستی در نظر داشت و مشاهده کرد در چه موقعی  $h'(t)$  مثبت گشته و باعث افزایشی (صعودی) شدن تابع نرخ خرابی لحظه‌ای می‌شود. اگر این هنگامه‌ی ویژه را  $t_0$  بنامیم، آن‌گاه  $t_0$  دقیقاً طول عمر محصول بدون تعمیر یا تعویض قطعات خواهد بود. بنابراین ریشه‌ی مشتق اول تابع نرخ خرابی لحظه‌ای برای طول عمر سامانه‌ها هنگامه‌هایی حیاتی هستند.

لم ۲-۳. اگر  $h(t)$  افزایشی باشد، آن‌گاه رابطه‌ی  $h(t) > 1$  برقرار خواهد شد.

لم ۲-۴. اگر  $h(t) \leq 1$ ، اگر و تنها اگر  $R(t) + R'(t) \geq 0$ .

در حالت  $k$  از  $n$  که تمامی اجزا یک‌سان بوده و همگی از قابلیت اطمینان  $R(t)$  برخوردارند، قابلیت اطمینان کل سامانه  $R_T = \sum_{i=1}^k \binom{n}{i} R(t)^{n-i} (1-R(t))^i$  است.

قضیه ۲-۵. فرض کنیم  $R_i$  و  $h_i$ ، به ترتیب، قابلیت اطمینان و نرخ خرابی لحظه‌ای سامانه‌ی  $i$ ام باشد. در این صورت داریم:

الف) اگر سامانه‌ها به صورت سری قرار گرفته باشند، آن‌گاه  $R_T(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) \times \sum_{j=1}^n h_j(t)$ .

ب) اگر سامانه‌ها یک‌سان با قابلیت اطمینان  $R(t)$  به حالت  $k$  از  $n$  باشند، آن‌گاه

$$R_T'(t) = \binom{n}{k} (n-k) R(t)^{n-k-1} R'(t) (1-R(t))^k.$$

همچنین اگر نرخ خرابی لحظه‌ای مقدار ثابتی مانند  $\lambda$  باشد (مثلاً در قطعات الکترونیکی و یا سامانه‌های

الکتریکی)، آن‌گاه  $R_T'(t) = -\lambda(k+1) \binom{n}{k+1} e^{-n\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)^k$ .

در بخش (ب) قضیه‌ی ۲-۵، مشاهده کردیم که هر چند تابع قابلیت اطمینان یک تابع جمعی است و با استفاده از  $\sum$  معرفی می‌شود، اما مشتق آن جمعی نبوده و ساده است.

قضیه ۲-۶. شرط کافی برای این‌که در حالت  $k$  از  $n$ ، رابطه‌ی  $h_T(t) \leq 1$  برقرار گردد، آن است که  $R'(t)$  و  $R(t)$  در رابطه‌ی  $(n-k)R'(t) + R(t) \geq 0$  صدق کنند (۲).

قضیه ۲-۷. در حالت  $k$  از  $n$ ، دوران نوزادی سامانه به پایان می‌رسد، هرگاه  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_T(t) = (n-k) \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t)$ .

با توجه به قضیه‌ی ۲-۵، در حالت سری رابطه‌ی  $h_T(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t)$  برقرار است که نتیجه می‌دهد  $h_T'(t) = \sum_{i=1}^n h_i'(t)$ .

بنابراین اگر به ازای هر  $i$ ،  $1 \leq i \leq n$ ،  $0 \leq h_i(t) \leq 1$ ، آن‌گاه  $h_i'(t) \leq 0$  که نتیجه می‌دهد  $h_T'(t) \leq 0$ ، یعنی تابع نرخ خرابی لحظه‌ای کل کاهش می‌یابد. به سادگی دیده می‌شود که اگر حتی اندکی از  $h_i'(t)$ ها مثبت باشند، آن‌گاه احتمال این‌که  $h_T'(t)$  منفی باشد، بیش‌تر است. یعنی در حالتی که شمار کمی از اجزا دارای نرخ خرابی لحظه‌ای رو به رشدی باشند، تابع نرخ خرابی لحظه‌ای کل احتمالاً کاهش خواهد بود.

پیکره‌بندی موازی با استفاده از افزونگی، یکی از مرسوم‌ترین روش‌ها برای افزایش قابلیت اطمینان سامانه

است. این حالت به دو صورت فعال و غیرفعال وجود دارد (۱) و (۶). در حالت فعال، کل سامانه تنها در صورتی کار نمی‌کند که تمامی اجزای آن از کار افتاده باشند. در این صورت تابع قابلیت اطمینان از رابطه‌ی  $R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t))$  به دست می‌آید.

قضیه ۲-۸. فرض کنیم  $R_i$  و  $h_i$ ، به ترتیب، قابلیت اطمینان و نرخ خرابی لحظه‌ای سامانه‌ی  $i$ ام در حالت موازی

فعال باشد. در این صورت  $R'(t) = \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)) \times \sum_{i=1}^n \frac{R_i'(t)}{1 - R_i(t)}$  و  $h(t) = \frac{\prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)) \times \sum_{i=1}^n \frac{R_i'(t)}{1 - R_i(t)}}{1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t))}$  (۲).

در حالت موازی فعال که نرخ خرابی لحظه‌ای هر جز برابر با  $\lambda_i$  است، می‌توان ثابت کرد  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_T(t) = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$ .

$MTBF_T(t) = \max_{1 \leq i \leq n} MTBF_i(t)$  (با فرض تعمیرپذیری اجزا)،  $MTTF_T(t) = \max_{1 \leq i \leq n} MTTF_i(t)$  (با فرض تعمیرناپذیری

تعویض‌پذیری اجزا) و  $MTTF_T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \frac{1}{\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2}} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$  (با فرض تعمیرناپذیری

تعویض‌ناپذیری اجزا). در این حالت اگر نرخ خرابی لحظه‌ای سامانه‌ها ثابت  $\lambda$  باشد، آن‌گاه  $MTTF_T = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ .



### ۳. کاربرد میانگین همساز، حاصل ضرب پیچشی و تابع دلتای دیراک در فراسنجه‌های قابلیت اطمینان

همان‌طور که پیش‌تر مشاهده شد، برای اجزای سامانه‌ها همیشه سه حالت در نظر می‌گیریم: الف) تعمیرپذیرند، ب) تعمیرناپذیر ولی تعویض‌پذیرند، پ) تعویض‌ناپذیرند. برای اجزا از  $MTBF_i(t)$  یا  $MTTF_i$  و برای کل سامانه از  $MTBF_T(t)$  یا  $MTTF_T$  استفاده می‌کنیم.  $\mathcal{H}$  را در لم ۳-۱ میانگین همساز در نظر می‌گیریم.

لم ۳-۱. فرض کنیم  $n$  جز سامانه‌ای سری با نرخ خرابی ثابت باشند. در این صورت:

$$\text{الف) اگر اجزا تعمیرپذیر باشند، آن‌گاه } MTBF_T(t) = \frac{\mathcal{H}(MTBF_i(t))}{n},$$

$$\text{ب) اگر اجزا تعمیرناپذیر ولی تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه } MTBF_T(t) = \frac{\mathcal{H}(MTBF_i(t))}{n},$$

$$\text{پ) اگر اجزا تعمیرناپذیر ولی تعویض‌ناپذیر باشند، آن‌گاه } MTTF_T(t) = \frac{\mathcal{H}(MTTF_i(t))}{n}.$$

در حالت غیرفعال، تنها یک جز از اجزای سامانه‌ی موازی کار می‌کند و هنگامی که آن جز از کار بیفتد، جز بعدی وارد چرخه‌ی فعالیت شده و بدین ترتیب تا هنگامی که اجزا به ترتیب کار کنند، سامانه هم‌چنان به فعالیت خود ادامه می‌دهد.

گرداب‌های توابع حقیقی نسبت به جمع معمولی و ضرب پیچشی (\*) تشکیل یک حلقه‌ی جابه‌جایی یک‌دار می‌دهد که تابع دلتای دیراک نقش یک را در این حلقه بازی می‌کند. هم‌چنین می‌توان مشاهده کرد  $(f(t) * g(t))' = f'(t) * g(t) = f(t) * g'(t)$  ([۴]).

لم ۳-۲. قابلیت اطمینان سامانه‌ای موازی با دو جز در حالت غیرفعال از رابطه‌ی  $R_T(t) = R_1(t) - R_1'(t) * R_2(t)$  به دست می‌آید.

قضیه ۳-۳. قابلیت اطمینان و نرخ خرابی لحظه‌ای سامانه‌ای موازی با  $n$  جز در حالت غیرفعال از روابط زیر به دست می‌آیند ([۲]).

$$R_T(t) = R_1(t) * \left( \sum_{2 \leq i \leq n} \delta(t) - R_i'(t) \right), \quad h_T(t) = - \frac{R_1'(t) * \left( \sum_{2 \leq i \leq n} \delta(t) - R_i'(t) \right)}{R_1(t) * \left( \sum_{2 \leq i \leq n} \delta(t) - R_i'(t) \right)}$$

قضیه ۳-۴. در حالت غیرفعال می‌توان مشاهده کرد که  $h_T(t) \leq 1$ ، اگر و تنها اگر  $h_1(t) \leq 1$  ([۲]).

از قضیه‌ی ۳-۴ نتیجه می‌گیریم که در حالت موازی غیرفعال، اولین سامانه بالاترین اهمیت را دارا است. یعنی اگر به عنوان مثال، بخواهیم دو سامانه را با قابلیت اطمینان‌های گوناگون به طور موازی غیرفعال به کار گیریم، آن‌که قابلیت اطمینان بالاتری دارد، باید به عنوان نخستین سامانه در نظر گرفته شود.

### منابع

[۱] ر. بیلیتون و ر. آلن، "قابلیت اطمینان سیستم‌های مهندسی، مفاهیم و روش‌ها"، ترجمه‌ی م. رضائیان، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران، ۱۳۹۰.

[۲] ع. تدین‌فر، "قابلیت اطمینان بر پایه‌ی ریاضیات و آمار با کاربرد در صنعت اویونیک"، در دست چاپ.

[۳] ح.ر. ظهوری زنگنه و ا. نادری، "حساب دیفرانسیل و انتگرال یک‌متغیره"، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران، چاپ چهارم، ۱۳۹۴.

[4] G.B. Arfken, H.J. Weber and F.E. Harris, "Mathematical Models for Physicists: A Comprehensive Guide", 8<sup>th</sup> ed., Academic Press, 2020.

[5] Mil-HDBK-217F.

[6] Mil-HDBK-338B.

## کاربردهای سیستم خاکستری در ورزش

فرید پورافقی، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

[f\\_pourofoghi@pnu.ac.ir](mailto:f_pourofoghi@pnu.ac.ir)

عصمت ضارب، کارشناسی ارشد تربیت بدنی، دبیراداره آموزش و پرورش، استان گیلان، شهرستان آستارا

**چکیده:** این مقاله به بررسی پتانسیل نظریه سیستم‌های خاکستری، که یک رویکرد ریاضی برای تحلیل سیستم‌هایی با اطلاعات ناقص، نامشخص یا محدود است، در حوزه علم ورزش می‌پردازد. با توجه به ماهیت متغیر و پیچیده داده‌های ورزشی (مانند عملکرد آنی بازیکنان، پیش‌بینی آسیب‌دیدگی، یا ارزیابی استعدادها)، سیستم خاکستری به عنوان ابزاری قدرتمند برای مدل‌سازی و تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت مطرح می‌شود. در این پژوهش، کاربردهای کلیدی این سیستم در حوزه‌هایی نظیر بهینه‌سازی برنامه‌ریزی تمرین، ارزیابی شاخص‌های عملکردی مبهم، و تحلیل نتایج مسابقات با وجود داده‌های نویزی مورد بحث قرار گرفته و مزایای آن نسبت به روش‌های سنتی در مدیریت داده‌های ورزشی تبیین شده است.

**کلمات کلیدی:** سیستم خاکستری، ورزش

### ۱. مقدمه

نظریه سیستم‌های خاکستری که توسط پروفیسور جولانگ دنگ در دهه ۱۹۸۰ معرفی شد [۱]، یک چارچوب ریاضی قدرتمند برای تحلیل و مدل‌سازی سیستم‌هایی است که اطلاعات ورودی آن‌ها ناقص، مبهم، غیرقابل اعتماد یا ناکامل است. تعدادی از پژوهش‌گران به کار در این زمینه پرداخته‌اند [۲، ۴، ۵، ۶]. در حوزه ورزش، ما دائماً با این نوع عدم قطعیت مواجه هستیم. عملکرد ورزشکاران به عوامل بیولوژیکی پیچیده، متغیرهای محیطی متغیر، وضعیت روانی لحظه‌ای و خطاهای اندازه‌گیری در ابزارهای سنجش وابسته است. در چنین محیطی، استفاده از مدل‌های آماری سنتی که نیازمند توزیع‌های داده‌ای مشخص و داده‌های کامل هستند، اغلب منجر به نتایج گمراه‌کننده می‌شود. سیستم خاکستری با ارائه مفاهیمی مانند مجموعه خاکستری، رابطه خاکستری، و مدل توسعه خاکستری، ابزاری را فراهم می‌کند که می‌تواند الگوهای پنهان را در داده‌های محدود استخراج کند. این مقاله به بررسی مهم‌ترین کاربردهای این

نظریه در جنبه‌های مختلف ورزش، از ارزیابی عملکرد فردی تا استراتژی‌های مربیگری و مدیریت تیم، می‌پردازد. هدف اصلی این است که نشان دهیم چگونه می‌توان با استفاده از این روش، تصمیم‌گیری‌های مبتنی بر داده در شرایط عدم قطعیت را بهبود بخشید.

## ۲. سیستم‌های خاکستری در ارزیابی عملکرد ورزشکاران

ارزیابی عملکرد ورزشکاران یک فرآیند چندوجهی است.

### ۱-۲. استفاده از مجموعه‌های خاکستری

در ارزیابی عملکرد، می‌توانیم مجموعه‌ای از شاخص‌های عملکرد (مانند توان هوازی، قدرت عضلانی، انعطاف‌پذیری) را تعریف کنیم. اگر داده‌های دقیق برای همه این شاخص‌ها در دسترس نباشد، می‌توانیم از مجموعه‌های خاکستری برای تعریف محدوده پذیرش یا کارایی استفاده کنیم.

### ۲-۲. مدل توسعه خاکستری

مدل  $GM(1,1)$  [۷]، به مربی این امکان را می‌دهد که روند فعلی عملکرد را شناسایی کرده و در صورت مشاهده یک روند نزولی هشداردهنده، برنامه تمرینی را تعدیل کند، حتی اگر داده‌های کافی برای مدل‌سازی‌های پیچیده آماری نداشته باشد. آسیب‌دیدگی‌ها اغلب نتیجه تراکم فشار تمرینی در طول زمان هستند و داده‌های مربوط به شروع آسیب (مانند گزارش‌های درد جزئی یا خستگی مفرط) اغلب نادیده گرفته می‌شوند یا به صورت ذهنی ثبت می‌گردند. با استفاده از تکنیک‌های همبستگی خاکستری، می‌توانیم میزان ارتباط حجم هفتگی تمرین، تغییرات بار تمرین نسبت به هفته قبل، میانگین سطح درد گزارش شده و کیفیت خواب گزارش شده را با حوادث آسیب‌دیدگی گذشته را محاسبه کنیم. سیستم خاکستری به ما اجازه می‌دهد تا میزان شباهت (یا تفاوت) بین یک شرایط فعلی و شرایطی که منجر به آسیب شده است را محاسبه کنیم، بدون آنکه نیاز به مقادیر دقیق یا نرمال‌سازی پیچیده باشد.

## ۳. کاربرد در پیش‌بینی نتایج و مربیگری استراتژیک

مربیگری استراتژیک مستلزم تصمیم‌گیری‌هایی است که در آن‌ها متغیرهای زیادی در حال تعامل بوده و عدم قطعیت بالایی وجود دارد (مانند پیش‌بینی نتیجه یک مسابقه فوتبال).

پیش‌بینی نتایج ورزشی، به ویژه در ورزش‌های تیمی، به دلیل تأثیر متغیرهای غیرقابل کنترل (شرایط آب و هوایی، وضعیت روانی روز مسابقه، تاکتیک‌های غافلگیرکننده حریف) بسیار دشوار است.

در شرایطی که داده‌های تاریخی زیادی وجود ندارد (مثلاً تیم جدیدی وارد لیگ شده است یا تغییرات اساسی در ترکیب تیم رخ داده)، استفاده از مدل‌های توسعه خاکستری بر روی معیارهای عملکردی تیم (مانند میانگین گل زده، درصد مالکیت توپ) می‌تواند روندهای پنهان را آشکار سازد.

### ۱-۳. بهبود پیش‌بینی با تحلیل سلسله مراتبی خاکستری

با استفاده از GRA، می‌توان میزان شباهت عملکرد گذشته تیم A در خانه در برابر تیم‌های دفاعی مشابه تیم B در حال حاضر را محاسبه کرد. این روش به مربی کمک می‌کند تا "وضعیت خاکستری" مسابقه آینده را با وضعیت‌های تاریخی مقایسه کرده و استراتژی مناسبی را انتخاب کند.

### ۴. بهینه‌سازی تاکتیک در ورزش‌های تیمی

#### ۱-۴. [۳] ارزیابی کارایی تاکتیک‌ها تحت عدم قطعیت

هنگامی که مربی یک سیستم تاکتیکی جدید (مثلاً پرس سنگین در فوتبال) را پیاده‌سازی می‌کند، بازدهی آن در مقابل حریفان مختلف می‌تواند بسیار متغیر باشد. سیستم خاکستری می‌تواند برای ارزیابی میزان "موفقیت" یک تاکتیک در شرایط محیطی مختلف (مثلاً زمین لغزنده، حضور بازیکن کلیدی حریف) استفاده شود.

اگر یک بازیکن کلیدی مصدوم شود یا یک حریف تاکتیک خود را به طور ناگهانی تغییر دهد، مربی باید سریعاً واکنش نشان دهد. تکنیک‌های استنتاج خاکستری می‌توانند بر اساس داده‌های جزئی موجود (مثلاً تغییر در الگوهای حرکت حریف در ۵ دقیقه گذشته)، بهترین پاسخ جایگزین را پیشنهاد دهند.

### ۵: مدیریت و تحلیل در ورزش‌های گروهی

انسجام تیمی یک مفهوم کیفی است که تأثیر عمیقی بر نتایج دارد. سنجش مستقیم آن دشوار است، اما سیستم خاکستری می‌تواند با ترکیب شاخص‌های عینی و ذهنی، یک معیار برای ثبات تیمی ارائه دهد.

شاخص‌های خاکستری برای ارزیابی انسجام شامل، ثبات ترکیب، ارتباط عملکردی و رضایت تیمی می‌باشد. با استفاده از تکنیک‌های وزندهی خاکستری، می‌توانیم یک "شاخص ثبات تیم" ایجاد کنیم که نه تنها به عملکرد فنی، بلکه به پویایی‌های داخلی نیز حساس باشد. این شاخص به مدیران ورزشی کمک می‌کند تا قبل از بروز علائم خارجی (مانند شکست‌های متوالی)، نشانه‌های اولیه از فروپاشی انسجام را تشخیص دهند.

هنگامی که مربی یا بازیکنان کلیدی تغییر می‌کنند، سیستم خاکستری می‌تواند با مقایسه سری زمانی عملکرد تیم قبل و بعد از تغییر (با استفاده از مدل‌های توسعه خاکستری)، میزان تأثیر آن تغییر را بر روندهای کلی عملکرد تیم مدل‌سازی کند. این کار به مدیریت کمک می‌کند تا بفهمد آیا تغییرات اعمال شده واقعاً منجر به بهبود یا تخریب شده‌اند یا خیر، حتی اگر داده‌های کافی برای تحلیل‌های آماری بلندمدت وجود نداشته باشد.

### ۶. نتیجه‌گیری

کاربردهای سیستم خاکستری در ورزش، از مدل‌سازی عملکرد با داده‌های محدود گرفته تا ارزیابی ریسک آسیب‌دیدگی از طریق تحلیل سلسله مراتبی خاکستری، نشان می‌دهند که این نظریه ابزاری عملی برای استخراج اطلاعات معتبر از

داده‌های ناقص است. در حوزه مربیگری استراتژیک، این سیستم به مربیان اجازه می‌دهد تا روندهای بالقوه را بهتر پیش‌بینی کرده و تاکتیک‌ها را در برابر عدم قطعیت‌های بازی بهینه‌سازی کند.

در نهایت، پذیرش سیستم‌های خاکستری به مربیان، تحلیلگران و مدیران ورزشی این امکان را می‌دهد که تصمیمات مبتنی بر داده‌های قوی‌تری اتخاذ کنند. این امر نه تنها به بهبود عملکرد کلی منجر می‌شود، بلکه با شناسایی زود هنگام ریسک‌ها (مانند خطر آسیب دیدگی یا فروپاشی انسجام تیمی)، به کاهش ریسک‌های ناخواسته و افزایش ثبات طولانی مدت در محیط‌های رقابتی کمک شایانی خواهد کرد. سیستم خاکستری، زبانی برای صحبت کردن در مورد عدم قطعیت است، و ورزش سرزمینی است که این زبان در آن نهایت کاربرد را دارد.

## منابع

1. Deng, J.L. (1982) The control problems of grey systems, *Systems and Control Letters*, **1**(5), 288-294.
2. Darvishi D., Forrest J., Liu S. (2019) A comparative analysis of grey ranking approaches, *Grey Systems: Theory and Application*, **9**, 472-487.
3. Faraji H, Hassanpour S, Azizi A, Malakian A, Alavipanah S. (2013) Floodwater Spreading Site Selection by FAHP and GCA and Comparison of Model Performance (Case Study: Garabaygan Catchment, Fasa Plain, Shiraz). *Physical Geography Research Quarterly*. **45**(2), 55-76.
4. Liu, S. F. and Lin, Y. (2011) *Grey Systems: Theory and Applications*, Springer Verlag, Berlin.
5. Pourofoghi, F. and Darvishi Salokolaei, D. (2024) A New Approach to Solving Grey Assignment Problems Using the Concept of Operators and Ranking of Grey Numbers, *Operational Research and Its Applications*, **21** (1), 93-106.
6. Pourofoghi, F. and Darvishi D. (2024) Solving Linear Fractional Programming Problems in Uncertain Environments: A Novel Approach with Grey Parameters, *Control and Optimization in Applied Mathematics (COAM)*, **9**(1), 169-183.
7. Wu C., Wen J., and Chang K. (2009) Evaluation of the Gray Model GM(1,1) applied to soil particle distribution. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **73**, 1775-1785.

6-7 November 2025



## بررسی عملکرد جایگاه شش سیگما در بهبود نتایج یک آزمایشگاه پزشکی

ساره حسنی سعدی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران -  
- [Sareh\\_hasani@pnu.ac.ir](mailto:Sareh_hasani@pnu.ac.ir)

**چکیده:** شش سیگما (Six Sigma) روشی است که با ریشه‌هایی در نظریات ریاضی قرن نوزدهم و توسعه یافته در دهه ۱۹۸۰ توسط محققان شرکت موتورولا، توانسته جایگاه ویژه‌ای در بهبود فرآیندهای کسب و کار پیدا کند. در این مقاله به بررسی این روش که مجموعه‌ای از تکنیک‌ها و ابزارهای آماری است و هدف از این پژوهش کاهش انحرافات در فرآیندها، حذف عیوب و دستیابی به کیفیتی پایدار و قابل پیش‌بینی در یک آزمایشگاه پزشکی پرداخته ایم.

**کلمات کلیدی:** شش سیگما، DPM.

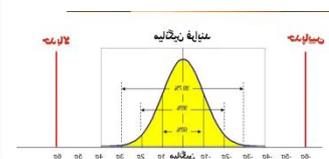
### . مقدمه

در این روش مجموعه‌ای از تکنیک‌ها و ابزارهای آماری است که هدف آن کاهش انحرافات در فرآیندها، حذف امروزه، شش سیگما تنها یک ابزار مدیریتی نیست؛ بلکه عیوب و دستیابی به کیفیتی پایدار و قابل پیش‌بینی است فلسفه‌ای تجاری است که در تمامی صنایع از تولیدی تا دیجیتال کاربرد دارد. این روش به سازمان‌ها کمک می‌کند تا با درک کاهش نقص‌ها به میزان تقریبی ۴/۳ در یک میلیون فرصت، استاندارد فراتر از انتظارات مشتریان ایجاد کنند اینکه که بهبود کیفیت، هزینه‌ها را کاهش خواهد داد. در ادامه این مقاله، به بررسی عمیق‌تر اصول، کاربردها و تأثیرات شش سیگما در بهبود فرآیندها و افزایش بهره‌وری خواهیم پرداخت

### تعریف شش سیگما:

شش سیگما سیستمی است شامل مجموعه‌ای از ابزارهای بهبود مستمر برای تمرکز بر روی فرآیندها، تحلیل و مقایسه آنها و تخصیص منابع به فرآیندهایی که نیازمند توجه بیشتر هستند. خرابی‌های ایجاد شده در فرآیندهای سازمانها باعث دوباره کاری، اتافات، هزینه و نیروی انسانی اضافی می‌شود.

| سطح سیگما | نقص در هر میلیون | بازده     |
|-----------|------------------|-----------|
| ۶         | ۳.۴              | %۹۹.۹۹۹۶۶ |
| ۵         | ۲۳۰              | %۹۹.۹۷۷   |
| ۴         | ۶۲۱۰             | %۹۹.۳۸    |
| ۳         | ۶۶۸۰۰            | %۹۳.۳۲    |
| ۲         | ۳۰۸۰۰۰           | %۶۹.۱۵    |
| ۱         | ۶۹۰۰۰۰           | %۳۰.۸۵    |



<sup>۱</sup> ساره حسنی سعدی



در یک پروژه شش سیگما پس از اندازه گیری جایگاه فعلی و تعیین حد بالا (هدف)، تمام برنامه های سازمانی در جهت حرکت می کنند که سازمان یا کسب و کار به هدف نزدیک تر بشود. شش سیگما را می شود به عنوان معیار عملکرد فرایند در نظر گرفت. با توجه به نقص در هر میلیون، شش سیگما هدف است. وقتی که عملکرد فعلی فرآیند اندازه گیری شد، هدف اینه که به طور مداوم سطح سیگما رو بهبود داده بشود. و به سمت شش سیگما حرکت کنیم. حتی اگر پیشرفت ها به شش سیگما هم نرسد، باز هم پیشرفت های صورت گرفته از سه سیگما به چهار سیگما و از چهار سیگما به پنج سیگما بهبود پیدا می کنه که طی کردن این پروسه باعث کاهش هزینه ها و افزایش رضایت مشتری خواهد شد. هرچه از سطح سیگما در یک روند افزایش پیدا کنه، تعداد نقص ها هم کمتر میشه و در نتیجه بازده بالاتر می رود.

بنابر این شش سیگما برابر است با  $6\sigma = \bar{x} \pm 6d$

اهداف شش سیگما: ۱- رضایت مشتری ۲- تولید با خطای تقریباً صفر ۳- صرفه جویی در منابع ۴- بازگشت سرمایه ۵- نهادینه کردن کیفیت در سازمان ۶- بهبود مستمر و حفظ فرایند بهبود. اجرای موفقیت آمیز فرایند شش سیگما مستلزم توجه به نکات زیر است:

۱- پایه گذاری نوعی استراتژی بازرگانی ۲- اجرای شش سیگما از بالاترین سطح سازمان ۳- آموزش رهبران شش سیگما ۴- آرایش نیروها به جای تفویض اختیار ۵- دیدگاه مشتری گرایی ۶- دیدگاه فرایندگرایی ۷- گرایش به کارکنان ۸- رهبری ۹- ایجاد قواعد روشن برای اتصال شش سیگما و مدیریت مالی شرکت

تعریف از نظر متریک: سیگما نماینده مقدار واقعی انحراف معیار می باشد. همان طور که  $\mu$  نماینده مقدار واقعی معدل می باشد. بنابر این شش سیگما برابر است با  $6\sigma = \bar{x} \pm 6d$  هدف شش سیگما رساندن میزان خطا به ۴٫۳ در میلیون است. یعنی رسیدن به ۹۹/۹۹۹۹۹۸ دقت یا خطای تقریباً صفر.

. نشان دادن نارسایی ها به صورت عددی: فرض کنید ۱۴۳ آزمایش از مراجعین دارید که ظرف ۴ روز باید جواب آماده باشد. از این تعداد ۱۲۳ آزمایش تا روز چهارم انجام شده. ۲۰ تای مانده یعنی ضعف کار

$$DPM = \frac{\text{defect} - \text{Million}}{n}$$

$$DPM = \frac{\text{میلیون - تعداد خرابی}}{\text{کل تولید}}$$

| کار ناتمام به درصد | کار ناتمام | سیگما | کار انجام شده به درصد | تعداد آزمایش |
|--------------------|------------|-------|-----------------------|--------------|
| ۱۴%                | ۲۰         | ۵.۲   | ۸۶%                   | ۱۴۳          |
| ۱۴%                | ۱۵۰        | ۵.۲   | ۸۶%                   | ۵.۱۰۷۲       |
| ۱۴%                | ۱۸۰۰       | ۵.۲   | ۸۶%                   | ۱۲۸۷۰        |
| ۱۴%                | ۶۰         | ۵.۲   | ۸۶%                   | ۱۰۰۰۰۰۰      |
|                    | ۱۳.۱۳۹۸    |       |                       |              |



مثال: در يك آزمایشگاه ساانه ۶۰۰۰ آزمایش ارجاع می شود بعد از بررسی معلوم شده که مدت زمان گردش کاری برای ۲۰۰ عدد از آنها رعایت نشده است نارسایی فرایند را مشخص نمایید

$$DPM = \frac{\text{defect} - \text{Million}}{n} \quad DPM = \frac{200 \times 1000000}{6000} = 33333$$

## نتیجه گیری

با توجه به ارقام جدول بازده کار ۸۶٪؛ نقص کار ۱۴٪ و سیگما ۵,۲ است. شش سیگما به عنوان ابزاراندازگیری عملکرد فرایند، کیفیت کالا و... در مواردی چون بهبود فرایند کسب و کار، مدیریت کیفیت جامع، مهندسی مجدد فرایند و غیره بکار می رود. برنامه ریزی سازمانی که می خواهد رویکرد فوق را دنبال کند در وهله اول ورود به حوزه سیگما هاست و در مرحله بعد طی مراحل بهبود تارسید ن به سطح شش سیگما یعنی ۳/۴ خطا در یک میلیون فرصت می باشد. بنابراین باید برای حل یک مساله بتوانیم انحراف از حالت ایده آل را بخوبی اندازه گیری نماییم و برای کارائی بهتر از سیستمهای دیجیتالی استفاده نماییم و مثلاً از شش سیگمای دیجیتالی برای اندازه گیری میزان انحراف از حالت مطلوب یک فرایند پرداخته و در صورت نیاز یعنی اگر بهبود جوابگوی نیازهای مورد نظر فرایند نباشد می توانیم به طراحی مجدد آن پردازیم

۲۰ نقص در ۴ روز یعنی ۱۵۰ نقص در ماه یعنی ۱۸۰۰ تا در سال یعنی ۱۳۹۸۶۰ در میلیون. یعنی به خطر انداختن جان تعداد زیادی بیمار که بدلیل حاضر نشدن بموقع جواب آزمایش؛ پزشک نمی تواند بموقع اقدام کند و جان آنها به خطر میافتد.

تا ۴ سیگما تقریباً ۶۲۰۰ خطا در يك میلیون فرصت است یعنی حدود ۴,۹۹٪ دقت. برای بعضی از کارها مثل قهوه خانه بین راه همین میزان دقت کافی است اما در صنعت هواپیمایی و آزمایشگاهی- پزشکی غیر قابل قبول است. اگر دقت را تا ۵ سیگما با ببریم میزان خطا به ۲۳۳ در میلیون میرسد یعنی حدود ۹۸,۹۹٪ دقت و برای بسیاری از شرکتهای کافی است اما هنوز برای شرکتهای هواپیمایی و آزمایشگاهی- پزشکی کافی نیست.

## منابع :

1. Howard Smith and Peter Fingar- The Third Wave of Business Process Management: Digital Six Sigma, Integrating continuous improvement with continuous change and continuous learning-2003
2. BPRchain.ppt
3. 4sixsigma.ppt-breakthrough strategy
4. ajazhussain\_6SQbd.ppt
5. Microsoft Office Solutions Accelerator for Six Sigma.ppt
  - 1) Harry M, Schroeder R, eds. Six Sigma. The breakthrough management strategy revolutionizing the world's top corporations. 1st ed. New York: Currency; 2000.
  - 2) Brussee W. Statistics for Six Sigma made easy. New York: McGraw-Hill; 2004



- 3) NevalainenD, BerteL, Kraft C, Leigh E, PicasoL, Morgan T. Evaluating laboratory performance on quality indicators with the six sigma scale. Arch PatholLab Med 2000;124:516-9.
- 4) Westgard JO, Six Sigma Quality Design and Control, 2ndEdition, Westgard QC, Inc. Madison, WI 2006..
- 5) Abdurrahman Coskun. Wrong Sigma metric causes chaos. J Med Lab, 2022. <https://doi.org/10.1515/labmed-2022-0003>.
- 6)WytzeP. Oosterhuis, Abdurrahman Coskun. Sigma metrics in laboratory medicine revisited: We are on the right road with the wrong map. BiochemMed (Zagreb) 2018;28(2). <https://doi.org/10.11613/BM.2018.020503>
- 7) Abdurrahman Coskun, Mustafa Serteser, Ibrahim Ünsal. Sigma metric revisited: True known mistakes. BiochemMed (Zagreb) 2019;29(1). <https://doi.org/10.11613/BM.2019.010902>





## خواص تابع گامای اولترا

محمد جعفری\* عضو هیات علمی گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

m\_jafari@pnu.ac.ir

محمد مولائی، عضو هیات علمی گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

m.mola@pnu.ac.ir

چکیده: در این مقاله، انتگرال زیر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

$$\delta_a \Gamma_{\rho,b}(x) = \Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-\frac{t^\delta}{a} - \frac{t^{-\rho}}{b}} dt.$$

این انتگرال با نام‌های مختلفی مانند تابع گامای اولترا، تابع گامای تعمیم‌یافته، انتگرال کراتزل، انتگرال گاوسی معکوس، انتگرال احتمال نرخ واکنش، انتگرال بسل و غیره شناخته می‌شود. ما چندین خاصیت و رابطه بازگشتی را برای این انتگرال اثبات می‌کنیم و آن را تابع گامای چهار پارامتری می‌نامیم. همچنین، رابطه بین تابع گامای چهار پارامتری، تابع  $p-k$  گاما و تابع گامای کلاسیک را ارزیابی می‌کنیم. تحت برخی شرایط، می‌توان تابع گامای چهار پارامتری را بر حسب تابع هایپرژئومتریک بیان کرد.  
کلمات کلیدی: تابع گامای چهار پارامتری، تابع گامای اولترا، تابع گامای دو پارامتری

### ۱ مقدمه

هدف اصلی این مقاله معرفی تابع گامای چهار پارامتری به شکل زیر است:

$$\delta_a \Gamma_{\rho,b}(x) = \Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-\frac{t^\delta}{a} - \frac{t^{-\rho}}{b}} dt, \quad (1)$$

که در آن  $x \in C/\delta Z^-$ ;  $\delta, \rho, a, b \in R^+ - \{0\}$  و  $\Re(x - \rho n) > 0$  به ازای  $n \in N$ . تابع گامای چهار پارامتری، تغییر شکل یافته تابع گامای دو پارامتری در [۴] است، که در آن  $\delta_a \Gamma_{\rho,b}(x) \Rightarrow k_p \Gamma_{0,b}(x) = e^{-\frac{1}{b}} {}_p \Gamma_k(x)$ ، که  $\delta = k$ ,  $a = p$ ,  $\rho = 0$  است، که در آن همچنین، این تابع تغییرشکلی از تابع  $k$ -گامای تعریف شده در [۱] است، که در آن  $\delta_a \Gamma_{\rho,b}(x) \Rightarrow k_k \Gamma_{0,b}(x) = e^{-\frac{1}{b}} \Gamma_k(x)$ ، که  $\delta = a = k$ ,  $\rho = 0$  به طوری که علاوه بر این، تابع گامای چهار پارامتری تغییرشکل یافته از تابع گامای کلاسیک است، که در آن  $\delta_a \Gamma_{\rho,b}(x) \Rightarrow {}_{1,1} \Gamma_{0,b}(x) = e^{-\frac{1}{b}} \Gamma(x)$ ، که در آن  $\delta = a = 1$ ,  $\rho = 0$  در سرتاسر این مقاله،  $C$ ,  $R^+$ ,  $\Re()$ ,  $Z^-$  و  $N$  به ترتیب نشان‌دهنده مجموعه اعداد مختلط، اعداد



حقیقی مثبت، بخش حقیقی عدد مختلط، اعداد صحیح منفی و اعداد طبیعی هستند. از نمادها و اصطلاحات [۲] و [۳] استفاده شده است. تابع  $p$ - $k$  گاما یا تابع دو پارامتری گاما، که با نماد  ${}_p\Gamma_k(x)$  نمایش داده می‌شود، به ازای  $x \in C/kZ^-$ ،  $k, p \in R^+ - \{0\}$  و  $n \in N$ ،  $\Re(x) > 0$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۴]:

$${}_p\Gamma_k(x) = \frac{1}{k} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! p^{n+1} (np)^{\frac{x}{k}}}{p(x)_{n+1, k}}. \quad (2)$$

یا

$${}_p\Gamma_k(x) = \frac{1}{k} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! p^{n+1} (np)^{\frac{x}{k}-1}}{p(x)_{n, k}}. \quad (3)$$

همچنین، نمایش انتگرالی تابع  $p$ - $k$  گاما به صورت زیر است:

$${}_p\Gamma_k(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}} t^{x-1} dt. \quad (4)$$

## ۲ فرمول‌های بازگشتی و حاصل ضرب‌های نامتناهی تابع گامای چهار پارامتری،

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) \text{ یا } \delta, a \Gamma_{\rho, b}(x)$$

رابطه بین تابع گامای چهار پارامتری، تابع  $p$ - $k$  گاما و تابع گامای کلاسیک به صورت زیر است:

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! b^n} {}_a\Gamma_\delta(x - \rho n), \quad (5)$$

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! b^n} \frac{1}{\delta} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! a^{m+1} (ma)^{\frac{x-\rho n}{\delta}-1}}{a(x-\rho n)_{m, \delta}}, \quad (6)$$

و

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! b^n} \frac{a^{\left(\frac{x-\rho n}{\delta}\right)}}{\delta} \Gamma\left(\frac{x-\rho n}{\delta}\right). \quad (7)$$

که در آن  $n \in N$ ،  $\Re(x - \rho n) > 0$  و  $\delta, \rho, a, b \in R^+ - \{0\}$ ،  $x \in C/\delta Z^-$

اثبات. با استفاده از معادله (۱۴.۲) در [۴]، داریم:

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! b^n} {}_a\Gamma_\delta(x - \rho n).$$

و با استفاده از قضیه (۹.۲) در [۴]، داریم:

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! b^n} \frac{a^{\left(\frac{x-\rho n}{\delta}\right)}}{\delta} \Gamma\left(\frac{x-\rho n}{\delta}\right).$$



به ازای  $x \in C/\delta Z^-$ ،  $\delta, \rho, k, p, a, b \in R^+ - \{0\}$  و  $n \in N$ ، رابطه بازگشتی زیر برقرار است:

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \frac{k}{\delta} \Gamma\left(k, a; \frac{k\rho}{\delta}, b\right)\left(\frac{kx}{\delta}\right). \quad (8)$$

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \frac{k}{\delta} \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{x}{\delta}} \Gamma\left(k, p; \frac{k\rho}{\delta}, b\left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{x}{\delta}}\right)\left(\frac{kx}{\delta}\right), \quad (9)$$

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{x}{\delta}} \Gamma\left(\delta, p; \rho, b\left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{x}{\delta}}\right)(x), \quad (10)$$

اثبات. از معادله ۵ داریم:

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!b^n} a^{\Gamma_{\delta}}(x - \rho n),$$

با استفاده از نتیجه (۱۱.۲) از مرجع [۴]، داریم:

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!b^n} \frac{k}{\delta} a^{\Gamma_k}\left(\frac{k(x - \rho n)}{\delta}\right),$$

با استفاده از معادله (۱۴.۲) از مرجع [۴]، داریم:

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \frac{k}{\delta} \int_0^{\infty} t^{\frac{kx}{\delta} - 1} e^{-\frac{tk}{a} - t\frac{k\rho}{b}} dt,$$

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \frac{k}{\delta} \Gamma\left(k, a; \frac{k\rho}{\delta}, b\right)\left(\frac{kx}{\delta}\right).$$

این، اثبات ۸ را کامل می‌کند. به روشی مشابه می‌توان نتایج ۹ و ۱۰ را نیز اثبات کرد. □

به ازای  $x \in C/\delta Z^-$ ؛  $\delta, \rho, a, b \in R^+ - \{0\}$  و  $Re(x - \rho n) > 0, n \in N$ ، می‌توان تابع گامای چهارپارامتری را به صورت سری زیر نمایش داد:

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \frac{1}{\delta} (a)^{\frac{x}{\delta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{a^{-\frac{\rho}{\delta}}}{b}\right)^n \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\left(\frac{x - n\rho}{\delta}\right)} \left(1 + \frac{x - n\rho}{m\delta}\right)^{-1} \right\}. \quad (11)$$

اثبات. با استفاده از معادله (۱۵.۲) از [۴]، داریم:

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \frac{1}{\delta} (a)^{\frac{x}{\delta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{a^{-\frac{\rho}{\delta}}}{b}\right)^n \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\left(\frac{x - n\rho}{\delta}\right)} \left(1 + \frac{x - n\rho}{m\delta}\right)^{-1} \right\}.$$

□

به ازای  $x \in C/\delta Z^-$ ؛  $\delta, \rho, a, b \in R^+ - \{0\}$  و  $Re(x - \rho n) > 0, n \in N$ ، معادله اساسی که در تابع گامای چهارپارامتری صادق است، به صورت زیر است:

$$x \Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) = \frac{\delta}{\delta} \Gamma(\delta, a; \rho, b)(x + \delta) - \frac{\rho}{\delta} \Gamma(\delta, a; \rho, b)(x - \rho). \quad (12)$$

اثبات. با استفاده از معادله (۲۳.۲) در [۴]، داریم:

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x + \delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \rho n)^a}{n! b^n} \delta^{-a} \Gamma_{\delta}(x - \rho n),$$

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x + \delta) = \frac{x a}{\delta} \Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a \rho}{(n-1)! b^n \delta} \Gamma_{\delta}(x - \rho n),$$

با استفاده از معادله ۵،

$$\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x + \delta) = \frac{x a}{\delta} \Gamma(\delta, a; \rho, b)(x) + \frac{a \rho}{b \delta} \Gamma(\delta, a; \rho, b)(x - \rho).$$

□

### ۳ نمایش تابع فوق هندسی برای تابع گامای چهار پارامتری، $\delta, a \Gamma_{\rho, b}(x)$ یا $\Gamma(\delta, a; \rho, b)(x)$

به ازای  $\frac{\rho}{\delta} \in N$  و  $x \in C / \delta Z^-$ ;  $\delta, \rho, a, b \in R^+ - \{0\}$ ,  $Re(x - \rho n) > 0$ ,  $n \in N$  داریم:

$$\Gamma(\delta, a; -\rho, b)(x) = \frac{a^{\frac{x}{\delta}} \Gamma(\frac{x}{\delta})}{\delta} {}_{\rho} F_0 \left[ \left( \frac{x - r\delta - \delta}{\rho} \right)_{r=1,2,\dots,\frac{\rho}{\delta}}; -; \frac{1}{b} \left( \frac{a\rho}{\delta} \right)^{\frac{\rho}{\delta}} \right]. \quad (13)$$

اثبات. می دانیم نماد پوخامر تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\alpha)_{rn} = r^{rn} \prod_{n=1}^r \left( \frac{\alpha + n - 1}{r} \right)_n,$$

بنابراین داریم:

$$\Gamma(\delta, a; -\rho, b)(x) = \Gamma\left(\frac{x}{\delta}\right) \frac{a^{\frac{x}{\delta}}}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ -\frac{1}{b} \left( \frac{a\rho}{\delta} \right)^{\frac{\rho}{\delta}} \right]^n \prod_{r=1}^{\frac{\rho}{\delta}} \left( \frac{x - r\delta - \delta}{\rho} \right)_n,$$

که نتیجه مطلوب را به دست می دهد.

### ۴ مراجع

R. Diaz, E. Pariguan, *On hypergeometric functions and Pochhammer k-symbol*. *Divulgaciones Mathematicas*, Vol. 15 No. 2 (2007) 179-192.

D. Earl, Rainville, *Special Function*, The Macmillan Company, New York, 1963.

A. Erdelyi, *Higher Transcendental Function Vol. 1*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.

Kuldeep Singh Gehlot, *Two Parameter Gamma Function and it's Properties*, arXiv:1701.01052v1 [math.CA] 3 Jan 2017.



# بررسی پارادوکس‌های راسل و دروغگو: تحلیل و مقایسه راه‌حل‌های مختلف و ارتباط آن‌ها با فرضیه پیوستار کانتور

نادر کنزی<sup>۱</sup>

عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

[N.Kanzi@pnu.ac.ir](mailto:N.Kanzi@pnu.ac.ir)

**چکیده:** پارادوکس‌ها، که همان بروز استفاده‌ی نادقیق از مفاهیم ساده هستند، در منطق و ریاضیات و فلسفه بیش از علوم دیگر خودنمایی می‌کنند، و این دلیلی ندارد جز بنانهاده شدن این سه علم بر عقلانیت محض. پارادوکس راسل مفهوم «بدیهی بودن» را زیر سوال می‌برد و پارادوکس دروغگو مفهوم «صدق» را. از آنجایی که این دو پارادوکس، که از دشوارترین پارادوکس‌های موجود هستند، اساس و بنیان ریاضیات را هدف حمله‌ی خود قرار می‌دهند، بیان و تحلیل و مقایسه راه‌حل‌های ارائه شده برای هرکدام از اهمیت بالایی برخوردار است. در این مقاله راه‌حل‌های کلاسیک و مدرن این مسائل را مورد بررسی قرار داده و ارتباط آن‌ها را با فرضیه پیوستار کانتور بیان خواهیم نمود. **کلمات کلیدی:** پارادوکس راسل، پارادوکس دروغگو، نظریه مجموعه‌ها، منطق.

## ۱. مقدمه

پارادوکس به حالتی گفته می‌شود که از مقدماتی به ظاهر پذیرفتنی با استدلالی به ظاهر درست نتایجی ناپذیرفتنی یا متناقض حاصل شود [۱]. وصف «تناقض میان ظاهر عقلانی و نتیجه غیرقابل پذیرش» جوهره پارادوکس‌ها را به وضوح بیان می‌کند.

شاید بتوان ادعا کرد که پارادوکس‌ها از مزاحم‌ترین موجوداتی هستند که در طول تاریخ ذهن ریاضی‌دانان، فلاسفه، و منطق‌دانان را به خود مشغول کرده‌اند. پارادوکس‌های فلسفی را فلاسفه با روش‌های فلسفی جواب می‌دهند. به عنوان مثال، سوال‌هایی از قبیل «آیا خداوند می‌تواند سنگی بسازد که خودش نتواند آنرا حرکت دهد؟» یا این که «آیا وجود، وجود دارد؟» از پارادوکس‌های فلسفی هستند (که اولی توسط عدم امکان ذاتی قابل، نه عدم امکان قدرت فاعل، جواب داده می‌شود و دومی توسط مفهوم مقولات کانتی)، و در این نوشتار مورد بررسی قرار نخواهند گرفت. پارادوکس‌های صرفاً ریاضی، مانند پارادوکس زنون (که توسط سری‌های نامتناهی پاسخ داده می‌شود) نیز در این مقاله مورد نظر ما نخواهند بود. تمرکز ما بر یک پارادوکس منطقی-ریاضی به نام پارادوکس راسل و یک پارادوکس منطقی به نام پارادوکس دروغگو (یا با تقریری دیگر، پارادوکس آرایشگر) خواهد بود. این دو پارادوکس، که از دشوارترین پارادوکس‌های تاریخ تفکر بوده‌اند، از ریشه‌ی مشترک «گزاره‌های خودارجاع» مشتق گشته، و گاهاً دارای راه‌کارهای برون‌رفت مشابهی هستند [۵].

همان‌طور که می‌دانیم، پارادوکس راسل در مورد مجموعه‌ی  $R := \{a \mid a \notin A\}$  سوال می‌کند که «آیا  $R$  عضو  $R$  هست یا خیر؟»، که با انتخاب هریک از جواب‌های «آری» و «خیر» به دیگری هدایت می‌شویم. پارادوکس دروغگو، صادق یا کاذب بودن جمله‌ی «این جمله کاذب است»، را که در این مقاله «گزاره دروغگو» نامیده می‌شود، را مورد سوال قرار

<sup>۱</sup>. نویسنده مسئول



می‌دهد. البته پارادوکس اخیر یک تقریر معروف دیگری به نام پارادوکس آرایشگر دارد: «آیا آرایشگری که فقط صورت افرادی را اصلاح می‌کند که صورت خودشان را اصلاح نمی‌کنند، می‌تواند صورت خود را اصلاح کند؟». بیان تاریخیچه و تقریرهای ناقص و معادل‌های هر یک از این دو پارادوکس، و همچنین تلاش‌های اولیه برای حل هر یک، در این چکیده مبسوط نگنجدیده و به مقاله کامل واگذار می‌گردند. در فصل آتی، به صورت فهرست‌وار، مروری خواهیم داشت بر جدی‌ترین تلاش‌هایی که در جهت حل هر کدام انجام گرفته، و مقایسه‌ی قدرت این راهکارها و تبعات منطقی-ریاضیاتی هر کدام.

## ۲. تلاش‌های صورت گرفته در جهت حل این دو پارادوکس

همانطور که در مقدمه متذکر شدیم، تلاش‌هایی که برای حل این دو پارادوکس صورت گرفته گاهی فلسفی-ریاضی و گاهی منطقی بوده‌اند. بیان جزئیات کامل این تلاش‌ها در این مقال نگنجدیده و به شکل فهرست‌وار مرور می‌گردند.

### ۱-۲. یک راه حل فلسفی-ریاضی

شاید بتوان اولین حمله‌ی فلسفی به این پارادوکس‌ها را جمله‌ی مشهور «هیچ مفهومی به صرف داشتن تعریف وجود نمی‌یابد» دانست، که نتیجه می‌دهد «تعریف ناسازگار، منجر به تناقض می‌شود». از این طریق، وجود آن آرایشگر یا مجموعه  $R$  غیر ممکن بوده و پارادوکس‌ها حل می‌شوند. بیان ریاضیاتی این راه حل در نظریه مجموعه‌ها، روش زرمبو است که جای اصل موضوع تجرید، یعنی  $(\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow \varphi(x)))$ ، در دستگاه اصل موضوعی ZF یا ZFC را با اصل موضوع جداسازی، یعنی  $(\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x))))$  عوض کرد (دقت می‌کنیم که در این اصول موضوع، اگر برای گزاره‌نمای  $\varphi$  هم سور عمومی بگذاریم، زبان منطقی خود را به زبان مرتبه دوم منتقل نموده ایم، که ریاضی‌دانان، به دلیل ناتمیت گودل، تا حد امکان از آن گریزانند). هرچند این راه‌حل تا حدودی خیال ریاضیدانان و فلاسفه سنتی را راحت می‌کرد، ولی همچنان به عنوان یک مشکل زبانی، ذهن منطقدانان و فلاسفه تحلیلی را به خود مشغول داشته و ساختار خود ارجاع گزاره دروغگو خودنمایی می‌کرد.

### ۲-۲. راه حل‌های منطقی

- نظریه انواع راسل: راسل با تقسیم مجموعه‌ها به انواع یا دسته‌های مختلف از خودارجاعی جلوگیری می‌کند. مجموعه‌ها فقط می‌توانند عضو مجموعه‌هایی از نوع بالاتر باشند و بنابراین مجموعه  $R$  نمی‌تواند تعریف شود. در واقع او می‌گوید که «نمی‌توان مجموعه‌ای را توسط شرطی مشخص کرد که خود آن مجموعه هم در آن شرط صدق کند». مثال‌ها و فرمول‌بندی‌های این راه حل در این مقال نمی‌گنجد. قابل ذکر است که این راه حل راسل فقط برای پارادوکس خودش کارایی دارد و در مورد پارادوکس دروغگو مفید واقع نمی‌گردد [۳].

- نظریه فرازبان تارسکی: تارسکی به درستی متوجه شد که بر خلاف پارادوکس راسل که بدیهیات ذهنی را با خطر مواجه می‌کند، پارادوکس دروغگو مفهوم صدق در منطق را به مخاطره می‌اندازد. به همین دلیل است که خیلی از منطقدانان به جنگ این پارادوکس رفته‌اند که تعدادی از مقالات مهم آنها در منبع [۲] جمع‌آوری شده‌اند. به دلیل اهمیت آن در منطق جدید، کمی روی آن تامل خواهیم کرد.

تارسکی به پیروی از ارسطو، جمله را وقتی صادق می‌گوید که مطابق با واقع باشد. بنابراین "پنبه سفید است" وقتی صادق است که پنبه سفید باشد. به بیان دیگر



(۲) "P" صادق است  $\Leftrightarrow P$ .

تارسکی در اینجا اظهار می‌دارد که در سمت چپ عبارت (۲)، حکمی درباره‌ی دنیای خارج بیان کرده‌ایم، که این کاربرد طبیعی و عادی زبان است؛ ولی در سمت راست عبارت (۲)، حکمی در مورد عبارت داخل گیومه (که خود جمله‌ای از زبان است) بیان کرده‌ایم. بنابراین گاهی زبان را برای بحث درباره‌ی جهان بیرون از زبان به کار می‌بریم و گاهی برای بحث درباره‌ی زبان. نخستین لایه کاربرد زبان را که همان تبیین احکامی درباره‌ی جهان خارج است، زبان موضوعی می‌گوییم، و لایه دوم زبان که درباره‌ی زبان حرف می‌زند را فرازبان می‌نامیم. پس عبارت‌هایی مانند ("کلاغ سفید است" کاذب است) به فرازبان تعلق دارد. البته لایه‌های بالاتری از زبان نیز موجودند، مثلاً عبارت ("کلاغ سفید است" کاذب است) «صادق است» به فرافرازبان تعلق دارد. نتیجه‌ی مهمی که تارسکی از این بحث می‌گیرد این است که عبارات «صادق است» و «کاذب است» به فرازبان تعلق دارند، و کاربرد آنها در لایه‌ی اول زبان غلط است. طبق نظر تارسکی، در پارادوکس دروغگو عبارت «دروغ است» را بدون فرا رفتن از زبان موضوعی برای همین زبان به کار برده‌ایم، و این کاربرد غلط است. در واقع، با این کار دو لایه‌ی زبان موضوعی و فرازبان را به هم آمیخته‌ایم و ناچاراً دچار تناقض شده‌ایم، زبان طبیعی در دل خود تناقضاتی را حمل می‌کند. او نظریه «دلالت شناسی» را منحصر به زبان‌های صوری در منطق ریاضی کرده، و «نظریه‌ی مدل» را در منطق ریاضی پایه‌گذاری کرد [۴].

- **منطق‌های غیرارسطویی:** جملات خودارجاع می‌توانند مقدار «نامشخص» یا «تا حدی درست/نادرست» داشته باشند. مثلاً گزاره دروغگو می‌تواند همزمان 0.5 درست و 0.5 نادرست باشد و هیچ تناقضی ایجاد نشود.
- **دیدگاه ویتگنشتاین:** بسیاری از پارادوکس‌ها ناشی از استفاده نادرست از زبان هستند. با محدود کردن چارچوب معنا در بازی‌های زبانی، جمله‌های خودارجاع دیگر پارادوکسیکال نیستند. مثلاً گزاره دروغگو تنها در یک چارچوب بازی زبانی محدود معنا دارد، و از ارزیابی آزاد خارج می‌شود. این رویکرد کاملاً منطقی-فلسفی بوده و قابل فرمول‌بندی شدن نیست.
- **تحلیل کوهن:** با محدود کردن ساختار مجموعه‌ها یا جملات، پارادوکس‌ها به یک مسئله باز منطقی تبدیل می‌شوند، بدون اینکه نظریه زیر سوال برود. مثلاً اجازه داده نمی‌شود مجموعه‌ها یا جملات خودارجاع بدون محدودیت تشکیل شوند. این باعث می‌شود که ارزیابی پارادوکس‌ها در چارچوب محدود بدون تناقض انجام شود. این تحلیل کوهن را به ایجاد «نظریه وادارندگی» در منطق ریاضی راهنمایی کرد.

- **نظریه رید:** رید با تعویض معیار صدق تارسکی در رابطه (۲) به معیار

"P" صادق است  $\Leftrightarrow$  به ازای هر X که P بگوید، X

و با یک تحلیل دقیق ریاضی نشان داد که گزاره دروغگو کاذب می‌گردد. در واقع رید با تغییر معیار صدق از حالت ارسطویی به حالتی دیگر، پارادوکس‌های خودارجاع را حل کرد. این کار باعث ایجاد نظریه بسیار قدرتمندی در منطق ریاضی، تحت عنوان «نظریه صدق» گشت [۳].  
جدول زیر این رویکردها را با هم مقایسه می‌نماید.



| محدودیت‌ها                              | نقاط قوت               | مکانیزم حل         | پارادوکس دروغگو | پارادوکس راسل | رویکرد               |
|---|------------------------|--------------------|-----------------|---------------|----------------------|
| پیچیدگی بالا                            | حل مستقیم، فرمال       | محدودیت نوع‌ها     | -               | ✓             | نظریه انواع          |
| پیچیدگی بالا                            | کنترل خودارجاعی، فرمال | سطح‌بندی زبان      | ✓               | ✓             | تارسکی               |
| ناسازگار با منطق کلاسیک                 | منعطف، عملی            | مقادیر نامشخص      | ✓               | -             | منطق‌های غیر ارسطویی |
| غیرفرمال                                | ساده، فلسفی            | بازی‌های زبانی     | ✓               | ✓             | ویتگنشتاین           |
| محدود به چارچوب خاص                     | کنترل پارادوکس‌ها      | محدودیت ساختاری    | ✓               | ✓             | کوهن                 |
| نیاز به تعریف دقیق و شناخت همه‌ی مصادیق | ارزیابی بدون تناقض     | تغییر طرح‌واره صدق | ✓               | -             | رید                  |

### ۳. فرضیه تداوم کانتور و ارتباط آن با دو پارادوکس مورد نظر

با استفاده از روش قطری‌سازی کانتور می‌دانیم که اگر کاردینال مجموعه اعداد حقیقی را با  $\aleph_0$  نشان دهیم، کاردینال مجموعه اعداد حقیقی (یا یک بازه‌ی غیر تهی در آن) برابر  $2^{\aleph_0}$  است. کانتور با استفاده از روش هندسی و شهودی نشان داد که «هیچ مجموعه‌ای وجود ندارد که کاردینال آن بین این دو کاردینال باشد». اثبات دقیق و منطقی این گزاره، که به «فرضیه پیوستار کانتور» معروف است، دغدغه‌ی بسیاری از ریاضی‌دانان و منطق‌دانان بود، تا اینکه کارهای گودل و بعد از او کوهن، به این تلاش‌ها خاتمه داد، و منجر به نظریه «تصمیم ناپذیری» در منطق گشت. در واقع کارهای این دو نفر نشان داد که فرضیه‌ی پیوستار توسط اصول دستگاه ZFC نه تأیید می‌گردد و نه تکذیب، و به اصطلاح «تصمیم ناپذیر» است. نگاه گودل و کوهن به این مسئله نه تنها از کارهای تارسکی و ویتگنشتاین بسیار تاثیر پذیرفت، که بر ادامه‌ی مسیر نگاه به دو پارادوکس راسل و دروغگو تاثیر گذارد. بیان جزئیات را به مقاله کامل واگذاریم.

### ۴. نتیجه‌گیری

پارادوکس‌های راسل و دروغگو نشان می‌دهند که مفاهیم «بدیهی و صدق»، حتی در منطق ریاضی، آسیب‌پذیر هستند. نظریه‌های ارائه‌شده، از راسل و تارسکی تا ویتگنشتاین، کوهن و رید، هر کدام مکانیزمی مشخص برای حل این پارادوکس‌ها ارائه می‌کنند که بررسی تطبیقی آنها، و ارتباطشان با فرضیه پیوستار کانتور، موضوع اصلی این تحقیق می‌باشد.

### منابع

- ۱ - ض. موحّد، از ارسطو تا گودل، انتشارات هرمس، ۱۳۸۲.
2. Martin, R. (1984) Recent essays on truth and the liar paradox, Oxford University Press.
3. Priest, G. (1994) The structure of the paradoxes of self-reference, Mind 103, 24-34.
4. Priest, G. (2002) Paraconsistent Logic, Princeton University Press.
5. Sainsbury, R.M. (1988) Paradoxes, Cambridge.

## کاربرد مدل‌های ریاضی در تحلیل رفتار مصرف‌کننده: از نظریه انتخاب تا پیش‌بینی تصمیم خرید

جمشید سالار<sup>۱</sup>، استادیار گروه مدیریت بازرگانی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

[j\\_salar@pnu.ac.ir](mailto:j_salar@pnu.ac.ir)

**چکیده:** رفتار مصرف‌کننده یکی از مهم‌ترین و پیچیده‌ترین موضوعات در علم بازاریابی است که هدف آن، درک فرایندهای ذهنی، اجتماعی و اقتصادی مؤثر بر تصمیم‌گیری خرید افراد است. در دهه‌های اخیر، رشد فناوری، گسترش بازارهای دیجیتال و افزایش داده‌های مصرف‌کنندگان، نیاز به استفاده از مدل‌های کمی و ریاضی را بیش از پیش آشکار ساخته است. این مقاله مروری با هدف بررسی نظام‌مند کاربرد مدل‌های ریاضی در تحلیل رفتار مصرف‌کننده تدوین شده است. در این مطالعه، مدل‌هایی همچون نظریه انتخاب گسسته، مدل‌های چندویژگی، مدل‌های رگرسیونی و الگوریتم‌های پیش‌بینی مبتنی بر داده‌های رفتاری معرفی و ارزیابی می‌شوند، که هر کدام توانایی تحلیل رفتار مصرف‌کننده در شرایط مختلف و پیش‌بینی تصمیمات خرید را دارند. مرور پژوهش‌های پیشین نشان می‌دهد که ترکیب مدل‌های ریاضی با روش‌های داده‌کاوی و یادگیری ماشین می‌تواند دقت پیش‌بینی تصمیمات خرید، بخش‌بندی بازار و طراحی استراتژی‌های بازاریابی را به‌طور قابل‌توجهی بهبود بخشد و امکان اتخاذ تصمیمات مدیریتی دقیق‌تر و هدفمندتر را فراهم کند. همچنین، این مدل‌ها در تحلیل وفاداری مشتری، پیش‌بینی ترک مشتری و تعیین قیمت بهینه محصولات کاربرد فراوان دارند و می‌توانند رفتار مصرف‌کننده در محیط‌های آنلاین و دیجیتال را با جزئیات بیشتری شبیه‌سازی کنند. در پایان، ضمن اشاره به چالش‌ها و محدودیت‌های موجود، مسیرهای آینده پژوهش شامل توسعه مدل‌های پویا، ترکیبی و هوشمند برای تحلیل رفتار مصرف‌کننده در محیط‌های دیجیتال و بازارهای پیچیده پیشنهاد می‌شود.

**کلمات کلیدی:** رفتار مصرف‌کننده، مدل‌های ریاضی، پیش‌بینی تصمیم خرید، یادگیری ماشین، تحلیل داده‌های بازاریابی

<sup>1</sup> . Corresponding Author

## ۱. مقدمه

تحلیل رفتار مصرف‌کننده یکی از پیچیده‌ترین حوزه‌ها در علم بازاریابی است که هدف آن درک و پیش‌بینی تصمیمات خرید افراد در شرایط متغیر بازار است. رفتار مصرف‌کننده تحت تأثیر عوامل روانی، اجتماعی و اقتصادی شکل می‌گیرد و درک آن برای طراحی استراتژی‌های بازاریابی و توسعه محصولات جدید ضروری است. با افزایش حجم داده‌های مصرف‌کننده و پیچیدگی محیط‌های دیجیتال، استفاده از مدل‌های ریاضی و کمی برای تحلیل رفتار مصرف‌کننده اهمیت روزافزونی یافته است. مدل‌های ریاضی با ارائه زبان کمی برای بیان روابط میان متغیرها، امکان تحلیل دقیق، مقایسه سناریوها و پیش‌بینی رفتارهای آینده را فراهم می‌کنند. هدف این مقاله مروری، بررسی کاربرد مدل‌های ریاضی در تحلیل رفتار مصرف‌کننده و ارزیابی نقاط قوت، محدودیت‌ها و کاربردهای آن‌ها در پژوهش و مدیریت بازاریابی است (کاتلر و کلر، ۲۰۱۶؛ ترین، ۲۰۰۹).

## ۲. چارچوب نظری و پیشینه پژوهش

در این قسمت، چارچوب نظری و پیشینه پژوهش توضیح داده می‌شود.

### ۲-۱. نظریه انتخاب گسسته

نظریه انتخاب گسسته به بررسی تصمیم‌های فردی در میان مجموعه‌ای از گزینه‌های محدود می‌پردازد. این نظریه با استفاده از مدل‌های لاجیت و پروبیت، احتمال انتخاب هر گزینه را بر اساس ویژگی‌های آن و ترجیحات فردی پیش‌بینی می‌کند. این مدل در پژوهش‌های بازاریابی برای تحلیل ترجیحات مصرف‌کننده، طراحی بسته‌بندی، قیمت‌گذاری و پیش‌بینی تقاضا کاربرد دارد. مدل لاجیت به تحلیل تصمیم‌های مصرف‌کننده در شرایط رقابتی می‌پردازد و احتمال انتخاب هر گزینه را بر اساس ویژگی‌های محصول و ترجیحات مشتری تعیین می‌کند. مدل پروبیت نیز به پیش‌بینی انتخاب مصرف‌کننده بر اساس توزیع نرمال متغیرهای تصادفی می‌پردازد و اغلب برای تحلیل تصمیمات پیچیده و چندگزینه‌ای استفاده می‌شود (ترین، ۲۰۰۹).

### ۲-۲. مدل‌های چندویژگی

مدل‌های چندویژگی بر تحلیل تصمیمات مصرف‌کنندگان بر اساس ارزیابی ویژگی‌های مختلف محصولات تمرکز دارند و شامل مدل ارزیابی چندمعیاره و مدل مجموع وزنی هستند. این مدل‌ها امکان تحلیل رفتار در شرایط پیچیده و گزینه‌های متنوع را فراهم می‌کنند و در پژوهش‌های بازاریابی به‌طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند. مدل‌های ارزیابی چندمعیاره به مصرف‌کننده اجازه می‌دهند تا محصولات را بر اساس وزن‌دهی ویژگی‌های مختلف ارزیابی کنند و تصمیم خرید بهینه را اتخاذ نمایند. مدل مجموع وزنی یک روش ساده و قابل فهم برای ترکیب امتیازات ویژگی‌های مختلف محصول است و در تحلیل رضایت مشتری کاربرد فراوان دارد (فیشبین و آیزن، ۱۹۷۵).

### ۲-۳. مدل‌های رگرسیونی و احتمالاتی

مدل‌های رگرسیونی و احتمالاتی برای بررسی روابط میان متغیرهای مختلف و پیش‌بینی رفتار مصرف‌کننده استفاده می‌شوند. این مدل‌ها به ویژه در تحلیل داده‌های بزرگ و پیچیده، ابزارهای قدرتمندی هستند و امکان شناسایی عوامل مؤثر بر تصمیم خرید را فراهم می‌کنند. این مدل‌ها شامل رگرسیون خطی و رگرسیون لجستیک هستند. رگرسیون

خطی برای پیش‌بینی یک متغیر وابسته بر اساس یک یا چند متغیر مستقل استفاده می‌شود و تحلیل روابط ساده و مستقیم را ممکن می‌کند. رگرسیون لجستیک برای پیش‌بینی متغیرهای دودویی مانند «خرید/عدم خرید» به کار می‌رود و یکی از ابزارهای مهم در مدل‌سازی رفتار مصرف‌کننده است (گجراتی، ۲۰۰۳).

## ۲-۴. الگوریتم‌های پیش‌بینی مبتنی بر داده

با افزایش داده‌های دیجیتال و رفتار آنلاین مصرف‌کننده، الگوریتم‌های پیش‌بینی مبتنی بر داده، مانند یادگیری ماشین و داده‌کاوی، به ابزارهای کلیدی در تحلیل رفتار مصرف‌کننده تبدیل شده‌اند. این الگوریتم‌ها قادرند الگوهای پیچیده رفتار مشتری را شناسایی و رفتار آینده را پیش‌بینی کنند. این الگوریتم‌ها شامل الگوریتم‌های طبقه‌بندی و الگوریتم‌های خوشه‌بندی هستند. الگوریتم‌های طبقه‌بندی برای دسته‌بندی مصرف‌کنندگان بر اساس ویژگی‌های رفتاری یا جمعیت‌شناختی به کار می‌روند. الگوریتم‌های خوشه‌بندی مصرف‌کنندگان را به گروه‌های مشابه تقسیم می‌کنند و به تحلیل بازار هدف و شخصی‌سازی خدمات کمک می‌کنند (بیشاپ، ۲۰۰۶).

## ۳. کاربردهای مدل‌های ریاضی در تحلیل رفتار مصرف‌کننده

در دنیای امروز، مدل‌های ریاضی ابزار حیاتی برای تحلیل رفتار مصرف‌کننده و پیش‌بینی تصمیمات خرید هستند و شرکت‌ها می‌توانند با استفاده از آن‌ها استراتژی‌های بازاریابی خود را بهینه کنند. یکی از کاربردهای مهم این مدل‌ها، تحلیل عوامل مؤثر بر انتخاب مصرف‌کننده مانند ویژگی محصول، تبلیغات و قیمت است (کاتلر و کلر، ۲۰۱۶). علاوه بر این، مدل‌های ریاضی امکان پیش‌بینی واکنش مشتریان به تغییرات بازار و طراحی استراتژی‌های مناسب را فراهم می‌کنند. این مدل‌ها همچنین در تحلیل وفاداری مشتری نقش مهمی دارند؛ شاخص‌های وفاداری را محاسبه کرده و مشتریان با احتمال ترک بالا را شناسایی و برنامه‌های مداخله‌ای طراحی می‌کنند (اولیور، ۱۹۹۹). در زمینه قیمت‌گذاری، مدل‌های ریاضی ابزارهای قدرتمندی هستند. با کمک آن‌ها می‌توان قیمت بهینه محصولات را براساس تقاضا، هزینه و رقابت تعیین کرد و سودآوری را افزایش داد. تحلیل حساسیت قیمت نشان می‌دهد که تغییر قیمت چه تأثیری بر تقاضا و درآمد خواهد داشت و مدل‌های ریاضی این اثرات را به صورت کمی ارائه می‌کنند. علاوه بر آن، این مدل‌ها امکان تعیین استراتژی‌های تخفیف هدفمند را فراهم می‌کنند تا هم سود شرکت و هم رضایت مشتری به حداکثر برسد (مونرو، ۲۰۰۳).

در فضای دیجیتال، رفتار خرید آنلاین به کمک مدل‌های ریاضی قابل تحلیل است. با بررسی مسیرهای جست‌وجوی کاربران، زمان صرف‌شده در وب‌سایت و کلیک‌ها، رفتار خرید آنلاین پیش‌بینی می‌شود. تحلیل مسیر مشتری نقاط ضعف تجربه کاربری را مشخص می‌کند و فرصت‌های بهبود را آشکار می‌سازد. همچنین، مدل‌های ریاضی قادرند نرخ تبدیل بازدیدکننده به خریدار را پیش‌بینی و استراتژی‌های بازاریابی دیجیتال را بهینه‌سازی کنند (چافی، ۲۰۱۵). در نهایت، مدل‌های ریاضی در بخش‌بندی و هدف‌گذاری بازار نیز کاربرد دارند. با تحلیل و شناسایی گروه‌های مختلف مشتریان بر اساس ویژگی‌های مشترک، شرکت‌ها می‌توانند استراتژی‌های بازاریابی خود را مؤثرتر طراحی کرده و منابع را بهینه تخصیص دهند (کاتلر و کلر، ۲۰۱۶). به این ترتیب، استفاده از مدل‌های ریاضی نه تنها در پیش‌بینی و تحلیل فردی رفتار مصرف‌کننده مؤثر است، بلکه امکان درک الگوهای جمعی و رفتار بازار را نیز فراهم می‌کند و پایه‌ای محکم برای تصمیم‌گیری‌های استراتژیک ایجاد می‌نماید.

#### ۴. نتیجه‌گیری

مدل‌های ریاضی ابزار قدرتمندی برای تحلیل رفتار مصرف‌کننده هستند و پیش‌بینی تصمیمات خرید، تحلیل وفاداری مشتری و تعیین قیمت بهینه را ممکن می‌سازند. این ابزارها به مدیران کمک می‌کنند تصمیمات بازاریابی خود را بر اساس داده‌های کمی و دقیق اتخاذ کنند. ترکیب مدل‌های ریاضی با داده‌کاوی و یادگیری ماشین دقت تحلیل‌ها را افزایش می‌دهد و رفتار مصرف‌کننده در شرایط پیچیده را پیش‌بینی می‌کند. استفاده از این مدل‌ها هزینه‌ها را کاهش داده و بهره‌وری منابع را در کمپین‌های بازاریابی افزایش می‌دهد. در بازارهای دیجیتال، مدل‌های ریاضی نقش حیاتی در تحلیل خرید آنلاین، شخصی‌سازی تبلیغات و افزایش نرخ تبدیل دارند. توسعه مدل‌های پیشرفته آینده، تحلیل رفتار مصرف‌کننده در محیط‌های پویا را تسهیل کرده و پژوهش‌های بیشتری را ضروری می‌سازد.

#### ۵. منابع

1. Bishop, C. M. (2006). *Pattern recognition and machine learning*. Springer.
2. Chaffey, D. (2015). *Digital marketing: Strategy, implementation, and practice*. Pearson Education.
3. Fishbein, M., & Ajzen, I. (1975). *Belief, attitude, intention, and behavior: An introduction to theory and research*. Addison-Wesley.
4. Gujarati, D. N. (2003). *Basic econometrics* (4th ed.). McGraw-Hill.
5. Kotler, P., & Keller, K. L. (2016). *Marketing management* (15th ed.). Pearson Education.
6. Monroe, K. B. (2003). *Pricing: Making profitable decisions* (3rd ed.). McGraw-Hill.
7. Oliver, R. L. (1999). Whence consumer loyalty?. *Journal of Marketing*, 63(4), 33–44.
8. Train, K. E. (2009). *Discrete choice methods with simulation*. Cambridge University Press.
9. Aaker, D. A., & Joachimsthaler, E. (2000). *Brand leadership*. Free Press.
10. Hauser, J., & Urban, G. L. (1979). Evaluation of multiattribute models of consumer preferences. *Journal of Marketing Research*, 16(3), 275–285.
11. Hensher, D. A., & Greene, W. H. (2003). The mixed logit model: The state of practice. *Transportation*, 30(2), 133–176.
12. McFadden, D. (1974). Conditional logit analysis of qualitative choice behavior. In P. Zarembka (Ed.), *Frontiers in econometrics* (pp. 105–142). Academic Press.
13. Wedel, M., & Kamakura, W. A. (2000). *Market segmentation: Conceptual and methodological foundations*. Kluwer Academic Publishers.
14. Chen, H., Chiang, R. H., & Storey, V. C. (2012). Business intelligence and analytics: From big data to big impact. *MIS Quarterly*, 36(4), 1165–1188.
15. Kumar, V., & Reinartz, W. (2016). Creating enduring customer value. *Journal of Marketing*, 80(6), 36–68.
16. Rust, R. T., Lemon, K. N., & Zeithaml, V. A. (2004). Return on marketing: Using customer equity to focus marketing strategy. *Journal of Marketing*, 68(1), 109–127.
17. Shmueli, G., Bruce, P. C., Gedeck, P., & Patel, N. R. (2020). *Data mining for business analytics: Concepts, techniques, and applications in Python*. Wiley.
18. Wedel, M., & Kamakura, W. A. (2012). Segmentation and targeting in marketing: Review of literature and future directions. *Journal of Marketing*, 76(3), 35–51.
19. Witten, I. H., Frank, E., Hall, M. A., & Pal, C. J. (2016). *Data mining: Practical machine learning tools and techniques* (4th ed.). Morgan Kaufmann.
20. Li, S., Sun, B., & Wilcox, R. T. (2005). Cross-selling sequentially ordered products: An application to consumer banking services. *Journal of Marketing Research*, 42(2), 233–239.

## مدل‌های بهینه‌سازی ریاضی در تصمیم‌گیری بازاریابی: از تخصیص بودجه تبلیغات تا طراحی آمیخته بازاریابی

جمشید سالار<sup>۱</sup>، استادیار گروه مدیریت بازرگانی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

[j\\_salar@pnu.ac.ir](mailto:j_salar@pnu.ac.ir)

**چکیده:** در فضای پرتلاطم و پر از رقابت امروز، تصمیم‌گیری در زمینه بازاریابی از جمله تخصیص بودجه تبلیغات و طراحی آمیخته بازاریابی، به یکی از مهم‌ترین چالش‌های سازمان‌ها تبدیل شده است. عدم قطعیت در رفتار مصرف‌کننده، تنوع کانال‌های تبلیغاتی، و فشار برای اثبات بازده سرمایه‌گذاری (ROI) شرکت‌ها را به سمت استفاده از ابزارهای پیشرفته‌تر و کمی سوق داده است. مدل‌های بهینه‌سازی ریاضی، از جمله برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی غیرخطی، بهینه‌سازی پویا و بهینه‌سازی چندهدفه، امکان تخصیص بهینه منابع را بر پایه داده‌های واقعی و تحلیل‌های کمی فراهم می‌کنند، به گونه‌ای که تصمیم‌گیری‌های بازاریابی از اتکا به قضاوت‌های ذهنی فاصله گرفته و به سوی دقت علمی و عددی سوق می‌یابد. این مقاله مروری با هدف بررسی نظام‌مند کاربرد این مدل‌ها در تصمیم‌گیری بازاریابی تدوین شده است. در این قلمرو، ابتدا حوزه‌های «تخصیص بودجه تبلیغات» و «طراحی آمیخته بازاریابی» مطرح شده، سپس چگونگی به‌کارگیری مدل‌های بهینه‌سازی ریاضی در محیط‌های دیجیتال، ترکیب آنها با داده‌کاوی و یادگیری ماشین و مواجهه با عدم قطعیت تحلیل می‌شود. به‌کارگیری چنین چارچوب‌هایی، به‌ویژه در محیط‌های دیجیتال دارای تغییرپذیری بالا، می‌تواند دقت تصمیم‌گیری را به‌طور چشمگیری افزایش داده، تخصیص منابع را کارا تر کرده و بازده سرمایه‌گذاری بازاریابی را تقویت نماید. با این همه، این رشته با چالش‌هایی نظیر کیفیت پایین داده‌ها، پیچیدگی محاسباتی، و سرعت بالای تغییر محیط بازاریابی مواجه است. مسیرهای آینده پژوهش شامل توسعه مدل‌های پویا، چندمنظوره و هوشمند برای تحلیل بازاریابی در محیط‌های چندکاناله پیشنهاد می‌گردد.

**کلمات کلیدی:** بهینه‌سازی ریاضی، تخصیص بودجه تبلیغات، آمیخته بازاریابی، مدل‌سازی ریاضی، تصمیم‌گیری بازاریابی

<sup>1</sup> . Corresponding Author

## ۱. مقدمه

تصمیم‌گیری در حوزه بازاریابی یکی از پیچیده‌ترین چالش‌های مدیریتی است، زیرا مدیران باید منابع محدود را بین کانال‌ها و فعالیت‌های متنوع تخصیص دهند و همزمان بازده سرمایه‌گذاری را به حداکثر برسانند (کاتلر و کلر، ۲۰۱۶). رشد بازارهای دیجیتال، تنوع کانال‌های تبلیغاتی و افزایش داده‌های مصرف‌کننده، استفاده از روش‌های کمی و مدل‌های ریاضی برای تحلیل و پیش‌بینی تصمیمات بازاریابی را ضروری کرده است (چافی، ۲۰۱۵؛ شموئیلی و همکاران، ۲۰۲۰). مدل‌های بهینه‌سازی ریاضی، شامل برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی، بهینه‌سازی پویا و چندهدفه، امکان تخصیص منابع با دقت عددی و تصمیم‌گیری مبتنی بر داده را فراهم می‌کنند (گجراتی، ۲۰۰۳) و با شبیه‌سازی سناریوهای مختلف، اثر تغییرات محیطی و رفتار مشتری را پیش‌بینی می‌کنند (گوپتا، ۲۰۲۳). هدف این مقاله، مرور نظام‌مند کاربرد مدل‌های ریاضی در تصمیم‌گیری بازاریابی، شناسایی چالش‌ها و ارائه مسیرهای پژوهشی آینده است.

۲. چارچوب نظری و پیشینه پژوهش  
در این قسمت، چارچوب نظری و پیشینه پژوهش توضیح داده می‌شود.

### ۱-۲. مدل‌های بهینه‌سازی خطی و غیرخطی

مدل‌های بهینه‌سازی خطی (Linear Programming) به مدیران بازاریابی امکان می‌دهند منابع محدود مانند بودجه تبلیغات، زمان و نیروی انسانی را به گونه‌ای تخصیص دهند که بیشینه کردن هدف مشخص مانند بازده سرمایه‌گذاری یا سهم بازار تحقق یابد (ویدل و کاماکورا، ۲۰۰۰). برنامه‌ریزی خطی برای تخصیص بودجه در کانال‌های متعدد، تعیین ترکیب محصولات یا اولویت‌بندی فعالیت‌های بازاریابی کاربرد دارد.

مدل‌های بهینه‌سازی غیرخطی (Nonlinear Programming) زمانی به کار می‌روند که روابط بین متغیرهای بازاریابی پیچیده و غیرخطی باشد؛ برای مثال، اثر ترکیبی قیمت، تبلیغات و تخفیف‌ها بر تقاضای محصول (چافی، ۲۰۱۵). این مدل‌ها امکان شناسایی نقطه بهینه‌ای را فراهم می‌کنند که بازده کل سرمایه‌گذاری و رضایت مشتری را به حداکثر می‌رساند.

### ۲-۲. بهینه‌سازی پویا

بهینه‌سازی پویا (Dynamic Optimization) برای مدیریت تصمیمات چندمرحله‌ای و زمان‌بندی فعالیت‌ها مناسب است. این مدل‌ها برای تخصیص بودجه تبلیغات در طول زمان، انتخاب کانال‌های تبلیغاتی در دوره‌های مختلف و پیش‌بینی واکنش بازار در زمان‌های آتی کاربرد دارند (ترین، ۲۰۰۹). بهینه‌سازی پویا می‌تواند با شبیه‌سازی سناریوهای مختلف و مدل‌سازی واکنش مصرف‌کننده به تغییرات محیطی، به مدیران کمک کند که تصمیم‌های بلندمدت با انعطاف‌پذیری بالا اتخاذ کنند (ژانگ و وانگ، ۲۰۲۵). علاوه بر این، این مدل‌ها امکان تحلیل حساسیت تصمیمات نسبت به تغییرات پارامترهای کلیدی مانند بودجه، قیمت و کانال توزیع را فراهم می‌کنند و به مدیران ابزار دقیقی برای بهینه‌سازی ترکیب فعالیت‌های بازاریابی ارائه می‌دهند. کاربرد گسترده بهینه‌سازی پویا در صنایع مختلف نشان‌دهنده اهمیت آن در افزایش کارایی و کاهش ریسک تصمیم‌گیری‌های بازاریابی است.

### ۲-۳. بهینه‌سازی چندهدفه

بهینه‌سازی چندهدفه (Multi-objective Optimization) امکان بررسی همزمان چند هدف بازاریابی مانند بیشینه کردن فروش، کاهش هزینه‌ها و افزایش رضایت مشتری را فراهم می‌کند. این مدل‌ها به مدیران کمک می‌کنند

تا بین اهداف متضاد، تصمیم بهینه اتخاذ کنند و محدودیت‌های منابع را نیز رعایت کنند (چافی، ۲۰۱۵؛ هوآنگ و همکاران، ۲۰۲۱). استفاده از این مدل‌ها در محیط‌های دیجیتال و چندکاناله، امکان ایجاد ترکیب بهینه از فعالیت‌های تبلیغاتی و پیشنهادهای شخصی‌سازی شده را فراهم می‌سازد.

### ۳. کاربردهای مدل‌های بهینه‌سازی در تصمیم‌گیری بازاریابی

در این بخش، کاربردهای مدل‌های بهینه‌سازی در تصمیم‌گیری بازاریابی توضیح داده می‌شود.

#### ۳-۱. تخصیص بودجه تبلیغات

مدیران بازاریابی با استفاده از مدل‌های بهینه‌سازی می‌توانند بودجه محدود خود را بین کانال‌های مختلف (تلویزیون، رادیو، رسانه‌های دیجیتال، شبکه‌های اجتماعی) به گونه‌ای تقسیم کنند که اثرگذاری کل تبلیغات بیشینه شود (کاتر و کلر، ۲۰۱۶). برنامه‌ریزی خطی برای مسائل ساده و برنامه‌ریزی غیرخطی برای روابط پیچیده بین بودجه و تقاضا استفاده می‌شوند. تحقیقات اخیر نشان می‌دهد که ترکیب مدل‌های ریاضی با داده‌های زمان واقعی می‌تواند تخصیص بودجه را بهینه کرده و ROI تبلیغات دیجیتال را به طور قابل توجهی افزایش دهد (پاندیت، ۲۰۲۵).

#### ۳-۲. طراحی آمیخته بازاریابی

مدل‌های بهینه‌سازی به مدیران امکان می‌دهند عناصر آمیخته بازاریابی شامل محصول، قیمت، مکان و ترویج را به گونه‌ای طراحی کنند که ترکیب بهینه برای دستیابی به اهداف سازمان به دست آید (مونرو، ۲۰۰۳). برای مثال، تعیین قیمت بهینه و تخصیص بودجه تبلیغات به صورت همزمان، می‌تواند به افزایش فروش و کاهش هزینه‌ها منجر شود. مدل‌های جدید چندهدفه قادرند اهداف اجتماعی و زیست‌محیطی را نیز در طراحی آمیخته بازاریابی لحاظ کنند (گوپتا، ۲۰۲۳).

#### ۳-۳. تصمیم‌گیری در محیط‌های دیجیتال و چندکاناله

در محیط‌های دیجیتال، تغییرات سریع رفتار مصرف‌کننده و افزایش کانال‌ها، نیاز به تحلیل‌های پیچیده دارد. مدل‌های بهینه‌سازی می‌توانند با ترکیب داده‌های جمع‌آوری شده از رفتار آنلاین مشتریان و الگوریتم‌های یادگیری ماشین، تخصیص منابع و طراحی آمیخته بازاریابی را بهینه کنند (شموئیلی و همکاران، ۲۰۲۰؛ ژانگ و وانگ، ۲۰۲۵). این رویکرد امکان پیش‌بینی نرخ تبدیل، اثر تبلیغات هدفمند و مدیریت تجربه مشتری را فراهم می‌سازد.

#### ۳-۴. مدیریت عدم قطعیت و ریسک

بازاریابی با عدم قطعیت‌های زیادی مواجه است؛ از جمله تغییر سلیقه مصرف‌کننده، نوسانات اقتصادی و رقابت شدید. مدل‌های بهینه‌سازی ریاضی، به ویژه بهینه‌سازی چندهدفه و پویا، امکان بررسی سناریوهای مختلف و اتخاذ تصمیم‌های مقاوم در برابر ریسک را فراهم می‌کنند (چافی، ۲۰۱۵؛ یحیی و البلاک، ۲۰۲۵). شبیه‌سازی مونت کارلو و مدل‌های استوکاستیک نمونه‌ای از ابزارهای تحلیل ریسک در بازاریابی محسوب می‌شوند.

#### ۴. نتیجه‌گیری

مدل‌های بهینه‌سازی ریاضی ابزار قدرتمندی برای تصمیم‌گیری در بازاریابی هستند و می‌توانند تخصیص بودجه تبلیغات، طراحی آمیخته بازاریابی و مدیریت منابع در محیط‌های دیجیتال را بهبود بخشند. این مدل‌ها با ارائه تحلیل‌های دقیق و عددی، امکان کاهش خطای تصمیم‌گیری و افزایش بازده سرمایه‌گذاری بازاریابی را فراهم می‌کنند. با این حال، چالش‌هایی مانند کیفیت پایین داده‌ها، پیچیدگی محاسباتی و پویایی محیط بازاریابی باقی است. مسیرهای پژوهشی آینده شامل توسعه مدل‌های پویا، چندهدفه و هوشمند برای تصمیم‌گیری در محیط‌های چندکاناله و دیجیتال و ترکیب آنها با یادگیری ماشین، هوش مصنوعی و تحلیل داده‌های بزرگ پیشنهاد می‌شود.

#### ۵. منابع

1. Chaffey, D. (2015). *Digital marketing: Strategy, implementation, and practice*. Pearson Education.
2. Chaffey, D., & Ellis-Chadwick, F. (2016). *Digital marketing* (6th ed.). Pearson Education.
3. Gujarati, D. N. (2003). *Basic econometrics* (4th ed.). McGraw-Hill.
4. Kotler, P., & Keller, K. L. (2016). *Marketing management* (15th ed.). Pearson Education.
5. Monroe, K. B. (2003). *Pricing: Making profitable decisions* (3rd ed.). McGraw-Hill.
6. Train, K. E. (2009). *Discrete choice methods with simulation*. Cambridge University Press.
7. Wedel, M., & Kamakura, W. A. (2000). *Market segmentation: Conceptual and methodological foundations*. Kluwer Academic Publishers.
8. Shmueli, G., Bruce, P. C., Gedeck, P., & Patel, N. R. (2020). *Data mining for business analytics: Concepts, techniques, and applications in Python*. Wiley.
9. Schmidhuber, J. (2021). *Deep learning in neural networks: An overview*. Springer.
10. Gong, C., Yao, D., Zhang, L., Chen, S., Li, W., Su, Y., & Bi, J. (2024). *CausalMMM: Learning causal structure for marketing mix modeling*. arXiv.
11. Gupta, S. (2023). *Data-driven decision making in marketing*. SSRN.
12. Huang, H.-C., Xu, J., & Lim, A. (2021). *Marketing mix optimization with practical constraints*. Optimization Online.
13. Pandit, V. N. (2025). *A mathematical optimization model for ad budget allocation to maximize ROI in digital marketing*. IOSR Journal of Business and Management.
14. Ravid, R. (2025). *Marketing mix modeling in Lemonade*. arXiv.
15. Sedlářová Nehézová, T., Kvasnička, R., Brožová, H., Hlavatý, R., & Kvasničková Stanislavská, L. (2025). *A robust optimization approach to budget optimization in online marketing campaigns*. Springer.
16. Vallarino, D. (2025). *How do consumers really choose: Exposing hidden preferences with the mixture of experts model*. arXiv.
17. Yu, N., Zhang, Y., & Li, X. (2025). *Data-driven control, optimization, and decision-making in marketing*. ScienceDirect.
18. Yahia, Z., & ElBolak, M. (2025). A stochastic nonlinear programming model for budget mix optimization of digital marketing campaigns under uncertainty. *Future Business Journal*, 11, Article 238.
19. Train, K. E., & Weeks, M. (2021). *Discrete choice and utility theory in marketing research*. Cambridge University Press.
20. Wedel, M., & Kamakura, W. A. (2012). *Segmentation and targeting in marketing: Review of literature and future directions*. *Journal of Marketing*, 76(3), 35–51.

## کاربرد روش‌های ریاضی، توان لیاپانوف و مدل‌های تعادل عمومی پویای تصادفی در تبیین آشوب بازار ارز

بیبا شایگانی<sup>۱</sup>، دانشیار، گروه علمی اقتصاد، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. [shaygan@pnu.ac.ir](mailto:shaygan@pnu.ac.ir)

محمدحسین احسانفر، استادیار، گروه علمی اقتصاد، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. [m.ehsanfar@pnu.ac.ir](mailto:m.ehsanfar@pnu.ac.ir)

مجید علی‌مدد، دکتری اقتصاد، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. [majideconomics02@gmail.com](mailto:majideconomics02@gmail.com)

**چکیده:** در سال‌های اخیر، نرخ ارز در اقتصاد ایران تحت تأثیر عوامل متعددی از جمله تورم، سیاست‌های پولی و تحریم‌های بین‌المللی با نوسانات شدیدی مواجه بوده است. شواهد تجربی نشان می‌دهد که علاوه بر متغیرهای اقتصادی، عوامل سیاسی-اجتماعی نیز به‌ویژه وعده‌های انتخاباتی، به‌عنوان یک شوک غیراقتصادی، بر انتظارات بازار ارز تأثیرگذارند. عدم تحقق این وعده‌ها منجر به بروز آشوب‌های کوتاه‌مدت در بازار می‌شود که تعادل والراسی به‌معنای حالتی که در آن تقاضا و عرضه در تمام بازارها همزمان در یک سیستم قیمت مشترک متعادل می‌شوند را موقتاً مختل می‌سازد. این اختلال نه‌تنها در بازار ارز، بلکه از طریق انتقال بین‌بازاری، در بازار دارایی‌های جایگزین مانند طلا نیز منعکس می‌گردد.

در این پژوهش، با به‌کارگیری آزمون توان لیاپانوف (Lyapunov Exponent) و همچنین مدل‌های تعادل عمومی پویای تصادفی (DSGE) که بر پایه بنیان‌های خرد اقتصادی و چارچوب والراسی استوارند تأثیر شوک‌های ناشی از وعده‌های انتخاباتی بر تعادل بازارهای ارز و طلا در ایران مورد تحلیل قرار گرفته است. یافته‌ها حاکی از آن است که هرچند که این شوک‌ها در کوتاه‌مدت باعث انحراف از مسیر تعادلی و افزایش سطح قیمت‌های تعادلی در هر دو بازار می‌شوند، اما سیستم اقتصادی به‌دلیل ماهیت پویا و تصادفی مدل DSGE، قادر است پس از انتقال شوک به سایر بازارها، دوباره به حالت تعادلی همگرا شود. این نتیجه، کارایی روش‌های ریاضی به‌ویژه تحلیل پویای سیستم‌های غیرخطی و شبیه‌سازی عددی را در مطالعه پدیده‌های پیچیده اقتصاد کلان به‌وضوح آشکار می‌سازد.

**کلمات کلیدی:** مدل‌های تعادل عمومی پویای تصادفی، تعادل والراسی، شوک‌های انتخاباتی، بازار ارز و طلا.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

## ۱. مقدمه

در چهار دهه اخیر، اقتصاد ایران در بستری از تحریم‌های خارجی پایدار و چالش‌های درونی کلان مانند تورم ساختاری و رشد انفجاری نقدینگی توسعه یافته است. در چنین شرایطی، نوسانات نرخ ارز نه تنها بازتابی از عدم تعادل‌های کلان اقتصادی، بلکه نشانه‌ای از واکنش سیستم اقتصادی به شوک‌های غیراقتصادی، به ویژه رویدادهای سیاسی مانند انتخابات، می‌باشد. در ادبیات اقتصاد ریاضی، چنین پدیده‌هایی با استفاده از چارچوب‌های پویای مبتنی بر نظریه بازی، تعادل عمومی و مدل‌سازی سیستم‌های تصادفی تحلیل می‌شوند. (Fernández-Villaverde et al., 2012) از این دیدگاه، رفتار فعالان بازار دارایی که در پی حفظ ارزش سبد دارایی خود هستند به عنوان یک فرآیند بهینه‌سازی پویا در معرض عدم قطعیت سیاسی و اقتصادی در نظر گرفته می‌شود.

در این راستا، نرخ ارز به عنوان یک متغیر کلیدی پیونددهنده اقتصاد داخلی و خارجی، تحت تأثیر تصمیمات سیاستی ناشی از چرخه‌های انتخاباتی قرار می‌گیرد. وعده‌های انتخاباتی، به ویژه در آستانه رقابت‌های ریاست جمهوری، به عنوان یک شوک غیراقتصادی، پیش‌بینی‌های عقلانی فعالان بازار را مختل کرده و باعث انحراف موقت از مسیر تعادلی می‌شوند. این اختلال، ابتدا به صورت آشوب در بازار ارز ظهور یافته و سپس از طریق مکانیزم‌های تعدیل والراسی که در آن قیمت‌ها به عنوان سیگنال‌های هماهنگ‌کننده تقاضا و عرضه در سراسر بازارها عمل می‌کنند به سایر مؤلفه‌های سبد دارایی، به ویژه طلا، منتقل می‌شود.

این رویکرد با نظریه چرخه‌های سیاسی-اقتصادی (Political Business Cycles) همسو است که برای نخستین بار به صورت ریاضی شده توسط آلزینا (Alesina) در قالب یک بازی تکرار شونده دو حزبی مطرح گردید. آلزینا (۱۹۸۷) نشان داد که در سیستم‌های دو حزبی، عدم قطعیت نسبت به نتیجه انتخابات و تفاوت در ترجیحات احزاب در مورد تورم و بیکاری، منجر به سیاست‌های انبساطی پیش از انتخابات و سیاست‌های تعدیلی پس از آن می‌شود. این مدل، که بر پایه انتظارات عقلانی و بهینه‌سازی پویا استوار است، چارچوبی ریاضی برای تحلیل تأثیر رویدادهای سیاسی بر متغیرهای کلان فراهم می‌آورد.

در این مقاله، با الهام از چارچوب آلزینا (۱۹۸۷) و با تلفیق آن با مدل‌های تعادل عمومی پویای تصادفی، تلاش شده است تأثیر شوک‌های ناشی از وعده‌های انتخاباتی بر تعادل بازارهای ارز و طلا در ایران مورد بررسی قرار گیرد. این رویکرد، کاربرد روش‌های ریاضی از جمله تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی، شبیه‌سازی عددی و نظریه تعادل عمومی را در درک پیچیدگی‌های اقتصاد سیاسی به وضوح نشان می‌دهد.

در سال‌های اخیر، گسترش مدل‌های تعادل عمومی پویای تصادفی (DSGE) امکان ادغام شوک‌های غیراقتصادی از جمله عدم قطعیت سیاسی را در چارچوب‌های ریاضی اقتصاد کلان فراهم کرده است. برستچر و تامونی<sup>۱</sup> (2020) نشان داده‌اند که با به کارگیری فرآیندهای نوسان تصادفی (stochastic volatility) در مدل‌های DSGE، می‌توان واکنش سیستم اقتصادی به شوک‌های خارجی و سیاسی را با دقت بیشتری شبیه‌سازی کرد. این رویکرد، که بر پایه معادلات دیفرانسیل تصادفی و بهینه‌سازی پویا استوار است، امکان تحلیل عددی انتقال آشوب از یک بازار به بازار دیگر مانند انتقال نوسانات از بازار ارز به بازار طلا را فراهم می‌آورد.

هم‌زمان، شواهد تجربی فزاینده‌ای وجود دارد که چرخه‌های سیاسی-اقتصادی نه تنها در کشورهای توسعه یافته، بلکه در اقتصادهای در حال توسعه نیز فعال هستند. چوکنخت<sup>۲</sup> (2000) در مطالعه‌ای نشان داد که دولت‌های محلی در آستانه انتخابات، سیاست‌های مالی انبساطی را اجرا می‌کنند که منجر به افزایش موقت تقاضا و نوسانات نرخ ارز می‌شود. این یافته‌ها تأیید می‌کنند که مکانیزم‌های چرخه سیاسی که اولین بار توسط آلزینا (۱۹۸۷) به صورت نظری مطرح شد در شرایط نامطمئن و بازارهای ناقص نیز کارایی دارند.

<sup>1</sup> - Bretscher, L., Hsu, A., & Tamoni, A. (2020)

<sup>2</sup> - Schuknecht, L. (2000)

علاوه بر این، نقش نهادها در تعدیل یا تشدید چرخه‌های سیاسی-اقتصادی مورد توجه قرار گرفته است. دینسر و آیچنگرین<sup>۱</sup> (۲۰۱۸) در تحلیلی تطبیقی نشان دادند که در کشورهایی با نهادهای قوی‌تر مانند استقلال بانک مرکزی و شفافیت بودجه، تأثیر وعده‌های انتخاباتی بر نوسانات نرخ ارز و تورم به‌طور معناداری کاهش می‌یابد. این یافته ضمن تأکید بر اهمیت چارچوب نهادی، نشان می‌دهد که مدل‌های ریاضی اقتصاد کلان باید علاوه بر متغیرهای اقتصادی، شاخص‌های کیفی سیاسی را نیز به‌صورت کمی در ساختار خود جای دهند.

در حوزه اقتصادهای نفتی، عدم قطعیت سیاسی اثرات تشدیدشونده‌ای بر بازارهای مالی دارد. بوش و نوری<sup>۲</sup> (۲۰۲۱) در مطالعه‌ای نشان دادند که افزایش نااطمینانی سیاسی به‌ویژه در دوره‌های پیش از انتخابات با نوسانات شدیدتر نرخ ارز همراه است. آن‌ها با استفاده از مدل‌های گارچ و تحلیل‌های طیفی، ثابت کردند که این نوسانات اغلب به‌صورت غیرخطی و با ویژگی‌های آشوب‌گون رخ می‌دهند که نیازمند روش‌های ریاضی پیشرفته برای مدل‌سازی و پیش‌بینی هستند.

در نهایت، پیشرفت‌های اخیر در اقتصاد کلان نشان می‌دهد که تلفیق نظریه انتخاب عمومی با مدل‌های تعادل عمومی پویای تصادفی می‌تواند چارچوبی یکپارچه برای تحلیل تعامل سیاست و اقتصاد فراهم آورد. گالی<sup>۳</sup> (۲۰۱۵) در یک مدل DSGE با دو حزب سیاسی نشان داد که تفاوت در ترجیحات احزاب در مورد تورم و رشد، منجر به مسیرهای تعادلی متفاوتی می‌شود که در کوتاه‌مدت با نوسانات قیمت دارایی‌ها همراه است. این رویکرد، که مستقیماً از چارچوب آلزینا (۱۹۸۷) الهام گرفته، نشان می‌دهد که ریاضیات نه تنها ابزاری برای توصیف، بلکه وسیله‌ای برای پیش‌بینی پویایی‌های پیچیده اقتصاد سیاسی است.

## ۲. روش‌شناسی تحقیق

در این پژوهش، بازار ارز و بازار طلا به‌عنوان دو مؤلفه کلیدی سبد دارایی‌های مالی در اقتصاد ایران مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. بر اساس قانون والراس (Walras' Law)، در یک سیستم بازارهای مرتبط، اگر در یکی از بازارها عدم تعادل (excess demand) یا (excess supply) رخ دهد، این عدم تعادل لزوماً در سایر بازارها نیز منعکس خواهد شد تا شرط تعادل عمومی حفظ گردد. به‌صورت ریاضی، قانون والراس به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n p_i \cdot z_i(p) = 0$$

که در آن  $p_i$  قیمت کالا یا دارایی  $i$ ام، و  $z_i(p)$  تابع تقاضای اضافی (excess demand) برای آن کالا است. این رابطه نشان می‌دهد که مجموع ارزش تقاضاهای اضافی در تمام بازارها همواره صفر است؛ بنابراین، هرگونه آشوب یا انحراف از مسیر تعادلی در بازار ارز که به‌عنوان یکی از بازارهای پایه عمل می‌کند به‌طور ساختاری به بازار طلا سرایت می‌کند و سیستم را به سوی یک تعادل جدید والراسی سوق می‌دهد. (Mas-Colell et al., 1995)

برای مدل‌سازی این فرآیند پویا، از چارچوب مدل‌های تعادل عمومی پویای تصادفی (DSGE) استفاده شده است. این مدل‌ها بر پایه سیستمی از معادلات تفاضلی تصادفی (stochastic difference equations) و بهینه‌سازی پویا (dynamic optimization) شکل گرفته‌اند و رفتار عوامل اقتصادی را تحت شرایط عدم قطعیت مدل می‌کنند. فرم کلی یک مدل DSGE را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbb{E}_t[f(x_{t+1}, x_t, x_{t-1}, \varepsilon_{t+1})] = 0$$

که در آن بردار متغیرهای حالت (state variables) در زمان  $t$ ،  $\varepsilon_t$  شوک‌های تصادفی (مانند شوک‌های سیاسی ناشی از وعده‌های انتخاباتی)، و  $\mathbb{E}_t$  عملگر انتظارات عقلایی است. (Fernández-Villaverde et al., 2016)

<sup>1</sup> - Dincer, N. N., & Eichengreen, B. (2018).

<sup>2</sup> - Bush, G., & Noria, G. L. (2021).

<sup>3</sup> - Galí, J. (2015).

چارچوب امکان شبیه‌سازی عددی انتقال آشوب از یک بازار به بازار دیگر و همگرایی سیستم به تعادل جدید را فراهم می‌آورد.

در مقابل، مدل‌های تعادل عمومی قابل محاسبه (CGE) عمدتاً مبتنی بر سیستم‌های معادلات غیرخطی ایستا هستند که تنها یک نقطه تعادل را توصیف می‌کنند:

$$F(x) = 0$$

این مدل‌ها فاقد بعد زمانی بوده و نمی‌توانند پویایی‌های تعدیل یا اثرات تأخیری شوک‌ها را ثبت کنند (Dixon & Jorgensen, 2013). در حالی که مدل‌های DSGE با وجود پیچیدگی ریاضی بیشتر—قادرند رفتار سیستم را در طول زمان و تحت شوک‌های تصادفی شبیه‌سازی نمایند، که برای تحلیل پدیده‌هایی مانند نوسانات نرخ ارز در دوره‌های انتخاباتی ضروری است.

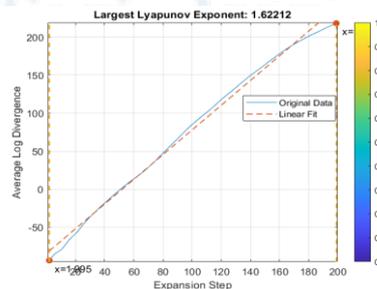
بنابراین، در این پژوهش، با تلفیق قانون والراس به‌عنوان پایه نظری تعادل عمومی و مدل DSGE به‌عنوان ابزار ریاضی تحلیل پویا، سعی شده است تأثیر شوک‌های سیاسی (وعده‌های انتخاباتی) بر تعادل بازارهای ارز و طلا به‌صورت عددی—تحلیلی مورد بررسی قرار گیرد.

### ۳. بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با بهره‌گیری از روش‌های ریاضی پویا و تحلیل سیستم‌های آشوب‌گون، وجود رفتار آشوب‌آمیز در سری زمانی نرخ ارز ایران در دوره مورد مطالعه مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور، از آزمون توان لیاپانوف (Lyapunov Exponent) استفاده شد که یکی از معیارهای کلیدی در تشخیص آشوب در سیستم‌های دینامیکی غیرخطی محسوب می‌شود. این آزمون بر این اصل استوار است که در سیستم‌های آشوب‌گون، دو مسیر اولیه نزدیک به‌طور نمایی از هم واگرا می‌شوند. توان لیاپانوف ( $\lambda$ ) این نرخ واگرایی را به‌صورت زیر اندازه‌گیری می‌کند:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\|\sigma x(t)\|}{\|\sigma x(0)\|} \right)$$

که در آن  $\sigma x(0)$  اختلاف اولیه بین دو نقطه مجاور در فضای حالت و  $\sigma x(t)$  همان اختلاف در زمان  $t$  است. در صورتی که بزرگترین توان لیاپانوف مثبت باشد ( $\lambda > 0$ )، سیستم دارای رفتار آشوبی تلقی می‌شود (Strogatz, 2024). با استفاده از نرم‌افزار MATLAB و اعمال این آزمون بر داده‌های ماهانه نرخ ارز، مقدار مثبتی برای  $\lambda$  به‌دست آمد که وجود آشوب در این سری زمانی را به‌صورت تجربی تأیید می‌کند. این یافته با چارچوب نظری مبتنی بر قانون والراس همخوانی دارد؛ چرا که آشوب در بازار ارز—به‌عنوان یک بازار پایه—به‌طور ساختاری به بازار طلا سرایت کرده و سیستم را به سوی یک تعادل جدید سوق می‌دهد (Mas-Colell et al., 1995).



یکی از نتایج کلیدی این پژوهش آن است که وعده‌های انتخاباتی به‌عنوان یک شوک غیراقتصادی، نقشی سیستماتیک در ایجاد نوسانات کوتاه‌مدت در بازارهای مالی ایفا می‌کنند. این یافته با نظریه چرخه‌های سیاسی-اقتصادی (Political Business Cycles) که توسط آیزینا (۱۹۸۷) مطرح شد، همسو است. بر اساس این نظریه، سیاستمداران در آستانه انتخابات تمایل دارند سیاست‌های انبساطی را برای افزایش رشد موقت و کاهش بیکاری اجرا کنند، حتی اگر این امر در بلندمدت منجر به تورم یا ناپایداری مالی شود. شواهد تجربی نشان می‌دهد که در سال‌های انتخاباتی، نرخ تورم در ایران از سرعت رشد آن کم شده است؛ هرچند در این امر بیشتر محدودیت‌های ساختاری—مانند کاهش کرسی‌های موافق دولت در مجلس— موثر بوده، که توان دولت را برای اجرای سیاست‌های مالی انبساطی محدود

می‌کند. این امر گویای آن است که منافع سیاستمداران - نه لزوماً تعلقات و تفکرات حزبی - محرک اصلی تصمیم‌گیری‌های کلان اقتصادی در دوره‌های انتخاباتی است، که موید نظریه انتخاب عمومی (Public Choice Theory) نیز می‌باشد. (Alesina, 1987)

از سوی دیگر، بحران مالی جهانی ۲۰۰۸ نشان داد که چرخه‌های مالی نقشی بنیادین در پویایی اقتصاد کلان دارند نقشی که در مدل‌های کلاسیک DSGE کمتر مورد توجه قرار گرفته بود. (Galí, 2015) در این راستا، شوک‌های ساختاری مالی از جمله نوسانات ناشی از سیاست‌های انتخاباتی می‌توانند تأثیر منفی بر چرخه تجاری ایران داشته باشند، به‌ویژه در اقتصادهای که بازارهای مالی آن هنوز در مراحل توسعه قرار دارند. بنابراین، ادغام چرخه مالی در مدل‌های DSGE برای اقتصادهای در حال توسعه ضرورتی اجتناب‌ناپذیر است.

در نهایت، برای کاهش اثرات منفی چرخه‌های سیاسی-اقتصادی، دو راهکار ساختاری پیشنهاد می‌شود: اول، شفاف‌سازی سیاست‌های اقتصادی کاندیداهای انتخاباتی از طریق رسانه‌های عمومی و نهادهای نظارتی مستقل، تا رأی‌دهندگان بتوانند بر اساس پیامدهای واقعی سیاست‌ها تصمیم‌گیری کنند. دوم، تقویت استقلال نهادهای پولی و مالی به ویژه بانک مرکزی از تصمیمات کوتاه‌مدت دولتی، که می‌تواند به تعدیل نوسانات پیش و پس از انتخابات کمک کند. (De Haan et al., 2013) چنین اصلاحاتی نه تنها پایداری کلان اقتصادی را افزایش می‌دهد، بلکه فضایی را فراهم می‌آورد که در آن ریاضیات کاربردی بتواند به‌عنوان ابزاری برای طراحی سیاست‌های عقلانی و پایدار به‌کار گرفته شود.

## منابع

1. Alesina, A. (1987). Macroeconomic policy in a two-party system as a repeated game. *The Quarterly Journal of Economics*, 102(3), 651-678.
2. Bretscher, L., Hsu, A., & Tamoni, A. (2020). Implementing stochastic volatility in DSGE models: a comment. *Macroeconomic Dynamics*, 24(4), 935-950.
3. Bush, G., & Noria, G. L. (2021). Uncertainty and exchange rate volatility: Evidence from Mexico. *International Review of Economics & Finance*, 75, 704-722.
4. De Haan, J., & Klomp, J. (2013). Conditional political budget cycles: a review of recent evidence. *Public Choice*, 157(3), 387-410.
5. Dincer, N. N., & Eichengreen, B. (2018). Central bank transparency and independence: Updates and new measures. *34th issue (March 2014) of the International Journal of Central Banking*.
6. Dixon, P. B., & Jorgenson, D. (Eds.). (2013). *Handbook of computable general equilibrium modeling*. Newnes.
7. Fernández-Villaverde, J., Guerrón-Quintana, P. A., & Rubio-Ramírez, J. (2012). *Estimating dynamic equilibrium models with stochastic volatility* (No. w18399). National Bureau of Economic Research.
8. Fernández-Villaverde, J., Rubio-Ramírez, J. F., & Schorfheide, F. (2016). Solution and estimation methods for DSGE models. In *Handbook of macroeconomics* (Vol. 2, pp. 527-724). Elsevier.
9. Galí, J. (2015). *Monetary policy, inflation, and the business cycle: an introduction to the new Keynesian framework and its applications*. Princeton University Press.
10. Mas-Colell, A., Whinston, M. D., & Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory* (Vol. 1). New York: Oxford university press.
11. Schuknecht, L. (2000). Fiscal policy cycles and public expenditure in developing countries. *Public Choice*, 102(1), 113-128.
12. Strogatz, S. H. (2024). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Chapman and Hall/CRC.

# کاربرد مدل‌های ریاضی در پیش‌بینی تغییرات اقلیمی: یک مرور روش‌شناختی

آرش کاکولاریمی<sup>۱</sup>، عضو هیئت‌علمی گروه کشاورزی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران،

ایران [kakoularimi54@pnu.ac.ir](mailto:kakoularimi54@pnu.ac.ir)

هادی رزاقیان<sup>۲</sup>، عضو هیئت‌علمی گروه کشاورزی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

[h\\_razzaghian@pnu.ac.ir](mailto:h_razzaghian@pnu.ac.ir)

## چکیده:

پیش‌بینی تغییرات اقلیمی به یکی از ضروری‌ترین عرصه‌های پژوهش در علوم زیست‌محیطی تبدیل شده است. این مقاله با رویکردی مروری، به بررسی کاربرد مدل‌ها و روش‌های ریاضی در تحلیل و پیش‌بینی تغییر اقلیم می‌پردازد. روش‌های مورد بحث شامل پیش‌بینی عددی وضع هوا بر پایه معادلات دیفرانسیل فیزیکی، روش‌های آماری مانند تحلیل روند و چرخه‌های دما و رویکردهای نوین هوش مصنوعی و شبکه‌های عصبی است. مقاله حاضر نشان می‌دهد که چگونه این مدل‌های ریاضی، از تحلیل داده‌های تاریخی اقلیمی تا شبیه‌سازی سیستم‌های پیچیده جوی-اقیانوسی را دربر می‌گیرند و به عنوان ابزاری قدرتمند برای درک گذشته و پیش‌بینی آینده اقلیم زمین عمل می‌کنند. در نهایت، چالش‌های موجود در مدل‌سازی ریاضی اقلیم و جهت‌گیری‌های آینده این حوزه نیز مورد بحث قرار گرفته‌اند.

**کلمات کلیدی:** پیش‌بینی عددی، تحلیل آماری، تغییر اقلیم، شبکه‌های عصبی، مدل‌سازی ریاضی.

## ۱. مقدمه

تغییر اقلیم به عنوان یکی از بزرگترین چالش‌های پیش روی بشر، اشاره به تغییرات معنادار و بلندمدت در الگوهای آب و هوایی دارد. این تغییرات، پیامدهای گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف از جمله امنیت غذایی، مدیریت منابع آب، و سلامت اکوسیستم‌ها دارد (Pfaff, T. J. (2022)). درک و پیش‌بینی این تغییرات بدون بهره‌گیری از زبان جهانی ریاضیات غیرممکن به نظر می‌رسد. مدل‌های ریاضی با شبیه‌سازی فرآیندهای فیزیکی، شیمیایی و زیست‌محیطی حاکم بر کره زمین، به دانشمندان امکان می‌دهند تا نه تنها روندهای گذشته را تحلیل کنند، بلکه سناریوهای احتمالی آینده را تحت شرایط مختلف ترسیم نمایند. این مقاله مروری ارائه یک طبقه‌بندی روشن از مهم‌ترین رویکردهای ریاضی مورد استفاده در مطالعه تغییر اقلیم است. در بخش دوم، مبانی ریاضی حاکم بر

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

مدل‌های عددی بررسی می‌شود. بخش سوم به کاربرد روش‌های آماری می‌پردازد. در بخش چهارم، نقش نوظهور شبکه‌های عصبی و هوش مصنوعی تشریح خواهد شد و در نهایت، نتیجه‌گیری و جمع‌بندی ارائه می‌گردد.

## ۲. مبانی مدل‌سازی عددی و فیزیکی

اساسی‌ترین رویکرد در پیش‌بینی اقلیمی، استفاده از مدل‌های عددی است که بر قوانین بنیادین فیزیک، به ویژه معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر دینامیک سیالات (اتمسفر و اقیانوس) و ترمودینامیک استوار هستند (Lynch, P. (2006)

### ۲-۱. پیش‌بینی عددی وضع هوا: (NWP)

این مدل‌ها با نمونه‌برداری از حالت کنونی سیال (جو) و استفاده از معادلات دینامیک سیالات و ترمودینامیک، وضعیت آینده سیستم را تخمین می‌زنند. این فرآیند با «مقداردهی اولیه» داده‌های مشاهده‌شده از منابعی مانند رادیوسوندها، ماهواره‌های هواشناسی و ایستگاه‌های زمینی آغاز می‌شود. تاریخچه توسعه این مدل‌ها به رویای «لوئیس فرای ریچاردسون» برمی‌گردد و امروزه به عنوان ستون فقرات پیش‌بینی‌های هواشناسی عمل می‌کنند (Lynch, 2006). یکی از چالش‌های بزرگ این مدل‌ها، ماهیت آشفتگی و غیرخطی معادلات است که باعث می‌شود خطاهای کوچک اولیه به سرعت رشد کنند و دقت پیش‌بینی را برای بازه‌های زمانی طولانی مدت محدود نمایند. (Lynch, 2006)

### ۲-۲. مدل‌های گردش عمومی: (GCMs)

این مدل‌ها نسخه توسعه‌یافته‌ای از مدل‌های عددی هستند که برای شبیه‌سازی اقلیم در مقیاس جهانی و درازمدت طراحی شده‌اند. آن‌ها نه تنها اتمسفر، بلکه اقیانوس‌ها، یخ‌دریاها، سطح زمین و فرآیندهای بیوشیمیایی را نیز در بر می‌گیرند. یک مدل ساده شده آب و هوا می‌تواند به صورت (انتقال گرمایی)  $\pm$  (ورودی خورشیدی) - (بازتاب)  $\Delta T =$  نمایش داده شود که در آن سمت چپ معادله نشان‌دهنده تغییر دما است. این مدل‌های پیچیده به ابررایانه‌های بسیار قدرتمندی برای اجرا نیاز دارند. (Pfaff, T. J. (2022)

## ۳. کاربرد روش‌های آماری در تحلیل اقلیم

در کنار مدل‌های فیزیکی-عددی، روش‌های آماری نقش مکمل و گاهی جایگزین حیاتی در تحلیل داده‌های اقلیمی ایفا می‌کنند.

### ۳-۱. تحلیل روند و چرخه‌ها:

از روش‌هایی مانند رگرسیون و تحلیل طیفی برای شناسایی روندهای بلندمدت (مانند افزایش دما) و چرخه‌های طبیعی (مانند نوسانات جنوبی ال نینو) استفاده می‌شود. برای نمونه، در مطالعه‌ای بر روی دمای استان زنجان، روند افزایشی در بیشتر ماه‌های سال و همچنین چرخه‌های دمایی با فرکانس‌های مختلف از طریق این روش‌ها استخراج گردید (عساکره، ۱۳۸۸).

### ۲-۳. تحلیل خوشه‌ای و پهنه‌بندی:

این تکنیک ریاضی برای گروه‌بندی مناطق با ویژگی‌های اقلیمی مشابه به کار می‌رود. به عنوان مثال، در پژوهشی با به‌کارگیری تحلیل خوشه‌ای روی داده‌های بارش شمال غرب ایران، چهار پهنه بارشی متمایز شناسایی شد. این روش در شناسایی نواحی همگن اقلیمی، دقتی به مراتب بالاتر از روش‌های سنتی ارائه می‌دهد (عساکره، ۱۳۸۸).

### ۳-۳. ریزمقیاس‌نمایی و ارزیابی مدل:

از آنجایی که خروجی مدل‌های جهانی گردش عمومی اغلب برای مطالعات منطقه‌ای بسیار درشت‌مقیاس است، از روش‌های آماری برای ریزمقیاس‌نمایی آن‌ها استفاده می‌شود. همچنین، برای ارزیابی دقت مدل‌های پیش‌بینی، از شاخص‌های آماری مانند میانگین خطای مطلق (MAE)، جذر میانگین مربعات خطا (RMSE) و میانگین مربعات خطا (MSE) بهره گرفته می‌شود (بلوکی و همکاران، ۱۴۰۰).

## ۴- ظهور هوش مصنوعی و شبکه‌های عصبی

در سال‌های اخیر، شبکه‌های عصبی مصنوعی به عنوان یک پارادایم قدرتمند در پیش‌بینی پارامترهای هواشناسی و اقلیمی ظهور کرده‌اند (Mathematics, 2024).

### ۱-۴. معماری و آموزش مدل:

شبکه‌های عصبی با تقلید از ساختار مغز انسان، قادر به کشف الگوهای پیچیده و غیرخطی در داده‌های تاریخی اقلیمی هستند. مراحل ساخت این مدل‌ها شامل جمع‌آوری و پیش‌پردازش داده‌ها، انتخاب معماری شبکه (مانند RBFN، MLPN)، تعیین ابرپارامترها، آموزش شبکه و در نهایت ارزیابی و بهینه‌سازی مدل است (Mathematics, 2024).

### ۲-۴. روش گروه‌بندی شبکه‌های عصبی:

یک روش نوین برای افزایش دقت پیش‌بینی، آموزش چندین شبکه عصبی به صورت موازی بر روی یک مجموعه داده و سپس ترکیب خروجی آن‌ها برای تولید نتیجه نهایی است. این پارادایم که «گروه‌بندی شبکه‌های عصبی» نامیده می‌شود، می‌تواند خطای پیش‌بینی را کاهش داده و به دقتی در حدود ۹۰ درصد یا بیشتر دست یابد. این مدل‌ها برای پیش‌بینی پارامترهایی مانند دما، فشار و رطوبت در یک مکان خاص مورد استفاده قرار می‌گیرند (Mathematics, 2024).

## ۵- مطالعه موردی: یک نمونه کاربردی

برای درک عینی کاربرد این روش‌ها، می‌توان به پژوهشی با عنوان «پیش‌بینی اثرات احتمالی تغییر اقلیم بر مقادیر دما و بارش استان هرمزگان» اشاره کرد. در این مطالعه از مدل LARS-WG برای تولید داده‌های آینده تحت سناریوهای انتشار RCP4.5 و RCP8.5 استفاده شد. دقت مدل با شاخص‌های آماری MAE، RMSE و MSE سنجیده شد. نتایج حاکی از افزایش دمای کمینه و بیشینه در تمامی ایستگاه‌های مورد مطالعه بود. اگرچه تغییرات بارش روندی یکسان نداشت، اما بیشینه بارش روزانه افزایش یافته بود. این مطالعه به خوبی نشان می‌دهد که

چگونه ترکیبی از یک مدل ریاضی-آماري و سناریوهای اقلیمی می‌تواند برای ارزیابی آثار تغییر اقلیم در مقیاس منطقه‌ای به کار رود (بلوکی و همکاران، ۱۴۰۰).

## ۴. بحث و نتیجه‌گیری

همان‌طور که در این مقاله مروری بررسی شد، ریاضیات به ابزاری واجب در عرصه مطالعات تغییر اقلیم تبدیل شده است. هر یک از رویکردهای اصلی مدل‌سازی عددی فیزیکی، روش‌های آماری و شبکه‌های عصبی مزایا و محدودیت‌های خاص خود را دارند. مدل‌های عددی بر پایه اصول فیزیکی قوی هستند اما به منابع محاسباتی عظیمی نیاز دارند. روش‌های آماری در تحلیل داده‌های تاریخی و ریزمقیاس‌نمایی قدرتمندند، اما در استخراج روابط علی-معلولی ضعف دارند. شبکه‌های عصبی نیز با وجود دقت بالا در تشخیص الگو، تا حدی همچنان به عنوان جعبه سیاه عمل می‌کنند و تفسیر فیزیکی نتایج آن‌ها می‌تواند دشوار باشد. آینده این حوزه در تلفیق هوشمندانه این رویکردها نهفته است. برای مثال، می‌توان از خروجی مدل‌های عددی به عنوان ورودی شبکه‌های عصبی استفاده کرد یا از روش‌های آماری برای تصحیح خطای سیستماتیک مدل‌های فیزیکی بهره گرفت. با ادامه پیشرفت‌های محاسباتی و توسعه الگوریتم‌های ریاضی، می‌توان امیدوار بود که دقت، وضوح و قابلیت اطمینان پیش‌بینی‌های اقلیمی به طور پیوسته بهبود یابد و بستری مستحکم برای تصمیم‌گیری‌های کلان در مواجهه با چالش تغییر اقلیم فراهم آورد.

## منابع

- ۱- عساکره، حسین. (۱۳۸۸). «پهنه بندی اقلیمی - بارشی شمال غرب ایران». پایان نامه دانشگاه زنجان.
- ۲- بلوکی، هدا؛ فاضلی، مهدی؛ شریف زاده، مهدی. (۱۴۰۰). «پیش بینی اثرات احتمالی تغییر اقلیم بر مقادیر دما و بارش استان هرمزگان». مقاله کنفرانسی. شناسه ملی: RWCS10\_083.
- 3- Mathematics. (2024). «Analysis of a Predictive Mathematical Model of Weather Changes Based on Neural Networks». *Mathematics*, 12(3), 480.
- 4- Lynch, P. (2006). *The Emergence of Numerical Weather Prediction: Richardson's Dream*. Cambridge University Press.
- 5- Pfaff, T. J. (2022). «Mathematics of climate change analysis». *EBSCO Research Starters*.

## ریاضیات پیشرفته: ابزار کلیدی استراتژیک برای مدیریت و تصمیم‌گیری اقتصادی نسل جدید

جمشید سالار<sup>۱</sup>، استادیار گروه مدیریت بازرگانی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

[j\\_salar@pnu.ac.ir](mailto:j_salar@pnu.ac.ir)

**چکیده:** بازار کار امروزی به طور فزاینده‌ای به مهارت‌های ریاضی پیشرفته برای دانشجویان رشته‌های مدیریت و بازرگانی نیاز دارد. تسلط بر تحلیل داده‌ها و هوش مالی نه تنها یک مزیت رقابتی محسوب می‌شود، بلکه به یک ضرورت اساسی در تصمیم‌گیری‌های راهبردی تبدیل شده است. این مهارت‌ها نقش کلیدی در تحلیل داده‌ها، تصمیم‌گیری‌های مالی و بهینه‌سازی فرآیندهای کسب‌وکار ایفا می‌کنند. با این حال، بسیاری از دانشجویان این رشته‌ها از مسیرهای علوم انسانی در آموزش متوسطه وارد دانشگاه می‌شوند که آمادگی ریاضی محدودی ارائه می‌دهد. این مقاله به بررسی نقش مهارت‌های ریاضی در عملکرد تحصیلی و موفقیت در بازار کار دانشجویان مدیریت و بازرگانی می‌پردازد. با مرور مطالعات پیشین و شواهد تجربی اخیر از دانشگاه‌ها نشان داده می‌شود که دانشجویانی که پیش‌زمینه ریاضی پیشرفته دارند، در دروس سال اول عملکرد بهتری دارند، نرخ ترک تحصیل کمتری نشان می‌دهند و مهارت‌های کمی قوی‌تری دارند که برای نقش‌های امروزی در کسب‌وکار ضروری است. همچنین، تحقیقات نشان می‌دهد که آمادگی ریاضی ناکافی می‌تواند عبور موفق از دانشگاه، فرصت‌های شغلی و رقابت‌پذیری در صنایع فناوری‌محور را محدود کند. این مقاله پیشنهاد می‌کند که تشویق دانش‌آموزان به تحصیل در ریاضیات پیشرفته قبل از ورود به رشته‌های مدیریت و بازرگانی می‌تواند موفقیت تحصیلی و شغلی را افزایش دهد. در مجموع، شواهد، اهمیت همسویی مسیرهای آموزشی با نیازهای کمی بازار کار معاصر را نشان می‌دهد تا فارغ‌التحصیلان، مهارت‌های ریاضی لازم برای موفقیت در محیط‌های پیچیده کسب‌وکار را داشته باشند.

**کلمات کلیدی:** آموزش مدیریت و بازرگانی، مهارت‌های ریاضی، عملکرد تحصیلی، آموزش متوسطه، بازار کار، شایستگی کمی

<sup>1</sup> . Corresponding Author

## ۱. مقدمه

بازار کار امروزی به طور فزاینده‌ای نیازمند متخصصانی با مهارت‌های ریاضی و فناوری قوی است. مهارت‌های ریاضی پیشرفته به یک دارایی استراتژیک برای رشد و بهره‌وری در محیط‌های مدیریت و بازرگانی تبدیل شده است (یوروستات، ۲۰۱۹؛ شبکه استراتژیک ریاضیات، ۲۰۱۹). با این حال، اکثر دانشجویان رشته‌های مدیریت و بازرگانی از مسیرهای علوم انسانی وارد دانشگاه می‌شوند که ریاضیات ساده‌تری ارائه می‌دهند (قانون ارگانیک بهبود کیفیت آموزشی، ۲۰۱۳). بنابراین، بسیاری از دانشجویان در مواجهه با الزامات دانشگاهی و ورود موفق به بازار کار دچار مشکل می‌شوند (گیل، بارونا و نیتو، ۲۰۰۶؛ کنفرانس رؤسای دانشگاه‌های اسپانیا، ۲۰۱۹). همچنین، نرخ ترک تحصیل در دانشگاه‌ها نشان می‌دهد دانشجویانی که پیش‌زمینه ریاضی ضعیفی دارند، با مشکلات بیشتری مواجه هستند؛ در سال ۲۰۱۶ نرخ ترک تحصیل در اتحادیه اروپا ۱۰ درصد بود (کنفرانس رؤسای دانشگاه‌های اسپانیا، ۲۰۱۹). این موضوع ضرورت بازنگری در سیاست‌های آموزشی برای دسترسی به رشته‌های مدیریت و بازرگانی را روشن می‌کند.

## ۲. ادبیات نظری پژوهش

پژوهش‌های گذشته نشان می‌دهند که مهارت‌های ریاضی نقش بسیار مهم و تعیین‌کننده‌ای در موفقیت تحصیلی دانشجویان رشته‌های اقتصادی و مدیریتی دارند و نمی‌توان اهمیت آن را نادیده گرفت (آلکاک و همکاران، ۲۰۰۸؛ آرنولد و رووان، ۲۰۱۴). توانایی‌های ریاضی قوی، نه تنها زمینه‌ساز درک بهتر مفاهیم پیچیده اقتصادی و مدیریتی است، بلکه دانشجویان را قادر می‌سازد تا تحلیل‌های منطقی، حل مسئله و تصمیم‌گیری‌های مبتنی بر داده را با دقت بیشتری انجام دهند. نتایج تحلیل‌های رگرسیونی و مطالعات کمی نشان می‌دهد که دانشجویانی که ریاضیات پیشرفته را در دوره‌های متوسطه گذرانده‌اند، عملکرد تحصیلی بالاتری در دانشگاه دارند و احتمال ترک تحصیل در آنان به‌طور قابل توجهی کاهش می‌یابد (بالارد و جانسون، ۲۰۰۴؛ آسیان چاوز و همکاران، ۲۰۲۰). با توجه به انقلاب صنعتی چهارم، افزایش حجم اطلاعات دیجیتال و اهمیت داده‌های بزرگ، نیاز به متخصصانی که قادر به تحلیل، پردازش و استفاده مؤثر از داده‌ها هستند، بیش از پیش احساس می‌شود. دانشجویانی که مهارت‌های ریاضی قوی دارند، می‌توانند از ابزارهای تحلیل داده و مدل‌سازی پیشرفته بهره ببرند و تصمیمات بهینه‌تری در حوزه‌های مدیریتی و بازرگانی اتخاذ کنند (سازمان همکاری و توسعه اقتصادی، ۲۰۱۸). به این ترتیب، تقویت مهارت‌های ریاضی در مدارس متوسطه نه تنها به موفقیت تحصیلی فردی دانشجویان کمک می‌کند، بلکه نقش مهمی در آماده‌سازی نیروی کار متخصص و کارآمد برای بازارهای پیچیده و داده‌محور آینده ایفا می‌کند. نتایج پژوهش‌های تجربی نیز نشان می‌دهد که رابطه مثبت و معناداری بین مهارت‌های ریاضی دانشجویان و نمرات آنان در دروس مختلف رشته مدیریت و بازرگانی وجود دارد. دانشجویانی که ریاضیات پیشرفته را گذرانده‌اند، نه تنها در دروس ریاضی بلکه در دروس اقتصاد، مدیریت و سایر دروس کمی، عملکرد تحصیلی بالاتری دارند و احتمال ترک تحصیل در آنان کمتر است (لاگلف و سلتر، ۲۰۰۹؛ لاغینگ و فوسکامپ، ۲۰۱۷). این یافته‌ها بر اهمیت سرمایه‌گذاری در آموزش ریاضیات پیشرفته در مقطع متوسطه تأکید می‌کنند و نشان می‌دهند که چنین سرمایه‌گذاری‌ای می‌تواند اثرات بلندمدت و گسترده‌ای بر موفقیت تحصیلی، آمادگی حرفه‌ای و بهره‌وری اقتصادی داشته باشد.

### ۳. نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر نشان می‌دهد که تقویت مهارت‌های ریاضی در مدرسه متوسطه، به ویژه برای دانش‌آموزانی که علاقه‌مند به ادامه تحصیل در رشته‌های مدیریت و بازرگانی هستند، نقش کلیدی و تعیین‌کننده‌ای در موفقیت تحصیلی آنان و آمادگی برای ورود به بازار کار ایفا می‌کند. مهارت‌های ریاضی نه تنها توانایی حل مسائل پیچیده و تحلیل داده‌ها را در دانشجویان افزایش می‌دهد، بلکه به آنان امکان می‌دهد تصمیم‌گیری‌های مدیریتی و تجاری خود را بر پایه تحلیل‌های منطقی و دقیق انجام دهند. بازننگری و اصلاح سیاست‌های آموزشی در سطح مدارس و تشویق دانش‌آموزان به گذراندن دوره‌های ریاضیات پیشرفته و تخصصی می‌تواند انتقال آنان به دانشگاه را تسهیل کرده و عملکرد تحصیلی آنان در دوران تحصیلات عالی را به‌طور قابل توجهی بهبود بخشد.

### ۴. منابع

- Alcock, J., Cockcroft, S., & Finn, F. (2008). Quantifying the advantage of secondary mathematics study for accounting and finance undergraduates. *Accounting and Finance*, 48(5), 697–718.
- Arnold, I. J., & Rowaan, W. (2014). First-year study success in Economics and Econometrics: The role of gender, motivation, and math skills. *The Journal of Economic Education*, 45(1), 25–35.
- Asian Chaves, R., Buitrago Esquinas, E. M., Masero, I., & Yniguez Ovando, R. (2020). Mathematical background as a success factor in economics and business degrees. *Journal of College Student Retention: Research, Theory & Practice*, 1521025120946452.
- Ballard, C. L., & Johnson, M. F. (2004). Basic math skills and performance in an introductory economics class. *The Journal of Economic Education*, 35(1), 3–23.
- CRUE. (2019). La universidad española en cifras. Curso 2017-2018. Madrid: Conferencia de Rectores de las Universidades Españolas.
- Gil, N., Barona, E., & Nieto, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 4(1), 47–72.
- Infojobs & ESADE. (2018). Informe Infojobs ESADE: Estado del mercado laboral en España.
- Lagerlof, J. N., & Seltzer, A. J. (2009). The effects of remedial mathematics on the learning of economics: Evidence from a natural experiment. *The Journal of Economic Education*, 40(2), 115–137.
- Laging, A., & Voßkamp, R. (2017). Determinants of maths performance of first-year business administration and economics students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(1), 108–142.
- LOMCE. (2013). Ley Organica para la Mejora de la Calidad Educativa. Madrid, España.
- REM. (2019). Impacto socioeconómico de la investigación y la tecnología matemáticas en España. Sevilla, España.
- Eurostat. (2019). European Labour Force Survey ad hoc module on young people on the labour market.
- OECD. (2018). The future of education and skills: Education 2030. Paris: Directorate for Education and Skills.

## کاربرد ریاضیات پیشرفته در تصمیم‌گیری داده‌محور در مدیریت و بازاریابی

جمشید سالار<sup>۱</sup>، استادیار گروه مدیریت بازرگانی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

[j\\_salar@pnu.ac.ir](mailto:j_salar@pnu.ac.ir)

**چکیده:** در جهان امروز، حجم داده‌ها و پیچیدگی تصمیم‌گیری‌های مدیریتی به سرعت افزایش یافته است. سازمان‌ها برای تحلیل رفتار مصرف‌کننده، تخصیص بهینه منابع و بهبود عملکرد بازاریابی نیازمند ابزارهای علمی و دقیق هستند. ریاضیات پیشرفته با ارائه مدل‌های آماری، الگوریتم‌های بهینه‌سازی و شبیه‌سازی، امکان تحلیل کمی و پیش‌بینی دقیق رفتار بازار را فراهم می‌کند. این مدل‌ها به مدیران کمک می‌کنند تا اثرات کوتاه‌مدت و بلندمدت تبلیغات، قیمت‌گذاری و تغییرات محیطی را بررسی و منابع را به شکل بهینه بین کانال‌های مختلف توزیع کنند. مدل‌سازی ریاضی، توانایی شبیه‌سازی سناریوهای مختلف، تحلیل رقابت و تصمیم‌گیری چندمرحله‌ای را فراهم می‌آورد و موجب افزایش انعطاف‌پذیری سازمان‌ها در محیط‌های پویا و رقابتی می‌شود. استفاده از مدل‌های ریاضی همچنین به تحلیل دقیق‌تر روند فروش، رفتار مشتریان و اثرات تبلیغات کمک می‌کند و سازمان‌ها را قادر می‌سازد استراتژی‌های علمی و مستند تدوین کنند. علاوه بر افزایش کارایی و سودآوری، این رویکرد موجب ارتقای مهارت‌های تحلیلی و تفکر انتقادی مدیران و دانشجویان می‌شود و نقش مهمی در توسعه توانمندی‌های تصمیم‌گیری داده‌محور ایفا می‌کند. همچنین، ادغام ریاضیات و مدیریت بازاریابی می‌تواند به بهبود فرآیندهای نوآوری محصول، بهینه‌سازی تجربه مشتری و افزایش رضایت و وفاداری مشتریان منجر شود. در نهایت، ترکیب تحلیل داده و مدل‌سازی ریاضی یک چارچوب جامع برای پاسخگویی سریع و بهینه به تغییرات محیطی و رقابتی ارائه می‌دهد و ارزش استراتژیک قابل توجهی برای سازمان‌ها ایجاد می‌کند.

**کلمات کلیدی:** ریاضیات کاربردی، تحلیل داده، مدیریت بازاریابی، مدل‌سازی ریاضی، تصمیم‌گیری داده‌محور، بهینه‌سازی تبلیغات

<sup>1</sup> . Corresponding Author

## ۱. مقدمه

در جهان امروز، حجم داده‌ها و پیچیدگی تصمیم‌گیری‌های مدیریتی به سرعت افزایش یافته است. بنگاه‌ها برای تخصیص منابع محدود، تحلیل رفتار مصرف‌کننده، و بهینه‌سازی استراتژی‌های بازاریابی نیازمند ابزارهای دقیق و علمی هستند. ریاضیات، با ابزارهای مدل‌سازی آماری، بهینه‌سازی، و شبیه‌سازی، این امکان را فراهم می‌کند تا تصمیمات مدیریتی به صورت کمی و مبتنی بر شواهد اتخاذ شود (کومار و گوپتا، ۲۰۲۲). مدیریت بازاریابی بدون درک و تحلیل داده‌های بزرگ (Big Data) نمی‌تواند کارایی و سودآوری بلندمدت را تضمین کند. مدل‌های ریاضی با شبیه‌سازی سناریوهای مختلف، تحلیل حساسیت و بهینه‌سازی تخصیص بودجه، امکان پیش‌بینی دقیق‌تر و کاهش ریسک را فراهم می‌کنند (ویکمن و همکاران، ۲۰۲۱).

## ۲. ادبیات نظری پژوهش

تحقیقات نشان می‌دهند که ریاضیات در تحلیل رفتار مصرف‌کننده، تخصیص بودجه تبلیغاتی، طراحی محصول و مدیریت برند کاربرد گسترده دارد (کومار و گوپتا، ۲۰۲۲؛ مارینلی و ساوین، ۲۰۰۸). استفاده از مدل‌های ریاضی این امکان را فراهم می‌کند که سازمان‌ها بتوانند رابطه پیچیده میان هزینه‌های تبلیغاتی و میزان تقاضا را به صورت کمی و دقیق تحلیل کنند. به کمک این مدل‌ها، مدیران می‌توانند اثرات کوتاه‌مدت و بلندمدت سرمایه‌گذاری در تبلیغات را بررسی کنند و بهینه‌ترین ترکیب بودجه را بین کانال‌های مختلف ارتباطی و تبلیغاتی تقسیم نمایند. این تحلیل‌ها علاوه بر کاهش هزینه‌های زائد، موجب افزایش بازدهی تبلیغات و ارتقای بهره‌وری کل سازمان می‌شوند (آبرتی و باتلر، ۱۹۹۲).

علاوه بر این، ریاضیات امکان شبیه‌سازی سناریوهای مختلف بازار و رفتار مصرف‌کننده را فراهم می‌آورد. برای مثال، با استفاده از مدل‌های ریاضی، می‌توان تاثیر تغییر قیمت، ورود رقبای جدید یا تغییر در ترجیحات مشتریان را پیش‌بینی کرد و تصمیمات بازاریابی را بر اساس داده‌های واقعی و تحلیل شده اتخاذ نمود. این رویکرد باعث می‌شود سازمان‌ها بتوانند استراتژی‌های بازاریابی خود را به صورت علمی و مبتنی بر شواهد تدوین کنند، نه صرفاً بر اساس تجربه و حدس و گمان (بلوش و مانسو، ۱۹۹۹).

نظریه بازی‌ها (Game Theory) و مدل‌های پویا (Dynamic Models) نیز ابزارهای قدرتمندی برای تحلیل رقابت میان بنگاه‌ها ارائه می‌دهند. این مدل‌ها، علاوه بر پیش‌بینی رفتار رقبا، امکان تحلیل واکنش‌های متقابل و تدوین استراتژی‌های بهینه تبلیغات و قیمت‌گذاری در شرایط مختلف بازار را فراهم می‌کنند. به کمک این مدل‌ها، مدیران می‌توانند سناریوهای مختلف رقابتی را شبیه‌سازی کرده و تصمیمات استراتژیک خود را با اطمینان بیشتری اتخاذ نمایند (شبان، ۲۰۱۹).

## ۳. کاربردهای ریاضیات در مدیریت و بازاریابی

در این بخش، کاربردهای ریاضیات در مدیریت و بازاریابی توضیح داده می‌شود.

### الف) تحلیل رفتار مصرف‌کننده

مدل‌های آماری و الگوریتم‌های یادگیری ماشین، امکان شناسایی الگوهای پیچیده رفتار مشتریان را فراهم می‌کنند و به پیش‌بینی نیازهای آینده کمک می‌کنند. این مدل‌ها می‌توانند الگوهای خرید، وفاداری به برند، و حساسیت مشتریان

به تغییر قیمت یا تبلیغات را تحلیل کنند. علاوه بر این، تحلیل خوشه‌ای و مدل‌های پیش‌بینی، امکان تقسیم‌بندی بازار و هدف‌گذاری دقیق کمپین‌های بازاریابی را فراهم می‌آورند. به این ترتیب، سازمان‌ها می‌توانند با شناخت دقیق نیازها و رفتار مشتریان، محصولات و خدمات خود را بهینه‌سازی کنند و رضایت و وفاداری مشتریان را افزایش دهند (استیگلر و بکر، ۱۹۷۷).

#### ب) تخصیص بودجه و بهینه‌سازی تبلیغات

مدل‌های بهینه‌سازی پویا، بودجه تبلیغاتی را به گونه‌ای تخصیص می‌دهند که بیشترین بازده حاصل شود و اثر تبلیغات در طول زمان پایدار باشد (فریدمن، ۱۹۸۳؛ فرتشم، ۱۹۸۴). این مدل‌ها قادرند اثرات میان‌مدت و بلندمدت تبلیغات را شبیه‌سازی کنند و از هدررفت منابع جلوگیری نمایند. همچنین، با تحلیل حساسیت و سناریوهای مختلف، مدیران می‌توانند بودجه تبلیغاتی را بین کانال‌های مختلف تبلیغات بهینه توزیع کنند. این رویکرد باعث می‌شود استراتژی‌های بازاریابی به جای حدس و گمان، مبتنی بر داده و نتایج قابل اندازه‌گیری باشد (شمالنز و همکاران، ۱۹۸۹).

#### ج) پیش‌بینی فروش و تقاضا

مدل‌های ریاضی قادرند روند فروش را با دقت بالا پیش‌بینی کنند و اثرات تغییرات قیمت و تبلیغات را تحلیل نمایند (نلسون، ۱۹۷۵). این مدل‌ها امکان شبیه‌سازی واکنش‌های بازار به عوامل مختلف اقتصادی، اجتماعی و رقابتی را فراهم می‌کنند. با استفاده از این تحلیل‌ها، مدیران می‌توانند تصمیمات استراتژیک در زمینه تولید، موجودی و عرضه محصولات اتخاذ کنند. همچنین، این پیش‌بینی‌ها به برنامه‌ریزی دقیق‌تر منابع و کاهش ریسک نوسانات بازار کمک می‌کند (کریتز و همکاران، ۲۰۱۸).

#### د) تصمیم‌گیری چندمرحله‌ای و پویا

با استفاده از مدل‌های تصمیم‌گیری چندمرحله‌ای، سازمان‌ها می‌توانند بهترین مسیر را برای تخصیص منابع در طول زمان انتخاب کنند و کارایی عملیاتی خود را افزایش دهند (اریکسون، ۲۰۱۱). این مدل‌ها امکان شبیه‌سازی تصمیمات متوالی و تحلیل نتایج احتمالی هر تصمیم را فراهم می‌کنند. علاوه بر این، سازمان‌ها می‌توانند اثرات کوتاه‌مدت و بلندمدت تصمیمات خود را پیش‌بینی کرده و استراتژی‌های انعطاف‌پذیر و کارآمد تدوین کنند. چنین رویکردی باعث افزایش بهره‌وری، کاهش هزینه‌ها و بهبود عملکرد کلی سازمان می‌شود.

## ۴. بحث و تحلیل یافته‌ها

مرور مقالات نشان می‌دهد که ترکیب تفکر ریاضی با تصمیم‌گیری مدیریتی، موجب افزایش دقت، کاهش ریسک و بهبود کارایی سازمان‌ها می‌شود (کومار و گوپتا، ۲۰۲۲؛ ویکمن و همکاران، ۲۰۲۱). استفاده از مدل‌های ریاضی به مدیران این امکان را می‌دهد که تصمیمات استراتژیک را بر پایه داده‌های واقعی اتخاذ کنند. علاوه بر این، مدل‌سازی ریاضی به تحلیل سناریوهای مختلف و شبیه‌سازی واکنش بازار به تغییرات اقتصادی و رقابتی کمک می‌کند. همچنین، سازمان‌ها می‌توانند با تحلیل روندهای فروش، رفتار مشتریان و اثرات تبلیغات، منابع خود را بهینه تخصیص دهند و عملکرد بازاریابی را بهبود بخشند. این رویکرد موجب ارتقای توانایی برنامه‌ریزی، پیش‌بینی و تصمیم‌گیری داده‌محور در مدیران و دانشجویان می‌شود و ارزش استراتژیک قابل توجهی برای سازمان‌ها ایجاد می‌کند.

## ۵. نتیجه‌گیری

ادغام ریاضیات پیشرفته با مدیریت و بازاریابی، نه تنها به بهینه‌سازی تخصیص منابع و افزایش سودآوری کمک می‌کند، بلکه مهارت‌های تحلیلی دانشجویان و مدیران را نیز تقویت می‌نماید. یافته‌ها نشان می‌دهد که مدل‌سازی ریاضی ابزار قدرتمندی برای تصمیم‌گیری داده‌محور در بازارهای رقابتی است و به سازمان‌ها امکان می‌دهد با دقت و سرعت بیشتری به تغییرات محیط پاسخ دهند. علاوه بر این، این رویکرد موجب ارتقای توانایی پیش‌بینی روندهای بازار و تحلیل سناریوهای مختلف می‌شود و مدیران را قادر می‌سازد تا استراتژی‌های بازاریابی و مدیریت برند را به صورت علمی و مستند طراحی کنند. همچنین، ترکیب تحلیل داده‌ها و مدل‌سازی ریاضی باعث افزایش انعطاف‌پذیری سازمان‌ها در مواجهه با عدم قطعیت‌ها و نوسانات اقتصادی می‌شود و ارزش رقابتی قابل توجهی ایجاد می‌کند. این رویکرد همچنین امکان شناسایی فرصت‌های نوآوری و بهبود فرآیندهای داخلی سازمان را فراهم می‌آورد و به مدیران کمک می‌کند تا تصمیمات بلندمدت با ریسک کمتر اتخاذ کنند. افزون بر این، استفاده از ریاضیات کاربردی می‌تواند به بهبود تعاملات بین تیم‌های بازاریابی و مالی کمک کرده و هماهنگی و هم‌افزایی سازمانی را افزایش دهد، و نهایتاً موجب ارتقای کیفیت خدمات و محصولات ارائه‌شده به مشتریان گردد.

## ۶. منابع

1. Abernethy, A. M., & Butler, D. D. (1992). Advertising information: Services versus products. *Journal of Retailing*, 68, 398–412.
2. Bloch, F., & Manceau, D. (1999). Persuasive advertising in Hotelling's model of product differentiation. *International Journal of Industrial Organization*, 17(4), 557–574.
3. Crettez, B., Hayek, N., & Zaccour, G. (2018). Existence and uniqueness of optimal dynamic pricing and advertising controls without concavity. *Operations Research Letters*, 46, 199–204.
4. Erickson, G. M. (2011). A differential game model of the marketing–operations interface. *European Journal of Operational Research*, 211, 394–402.
5. Fershtman, C. (1984). Goodwill and market shares in oligopoly. *Economica*, 51, 271–281.
6. Friedman, J. W. (1983). Advertising and oligopolistic equilibrium. *Bell Journal of Economics*, 14, 464–473.
7. Kumar, V., & Gupta, S. (2022). Marketing analytics: Transforming data into insights and strategy. *Journal of Marketing Analytics*, 10(3), 211–229.
8. Marinelli, C., & Savin, S. (2008). Optimal distributed dynamic advertising. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 137, 569–591.
9. Nelson, P. (1975). The economic consequences of advertising. *Journal of Business*, 48, 213–241.
10. Schmalensee, R., Armstrong, M., Willig, R. D., & Porter, R. H. (1989). Handbook of Industrial Organization, Vol. 3. Elsevier.
11. Shaban, H. (2019). Digital advertising to surpass print and TV for the first time. *The Washington Post*.
12. Stigler, G. J., & Becker, G. S. (1977). De gustibus non est disputandum. *American Economic Review*, 67, 76–90.
13. Wichmann, J. R. K., Petersen, J. A., & Schweidel, D. A. (2021). Machine learning in marketing: Review and future directions. *International Journal of Research in Marketing*, 38(3), 641–658.

## کاربرد ریاضی برای بیان ژن سرطان سینه با استفاده از هوش مصنوعی یک مطالعه مروری

اشرف السادات قاسمی\*<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه شیمی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران

، ایران

[as.ghasemi@pnu.ac.ir](mailto:as.ghasemi@pnu.ac.ir)

هستی شهابیان<sup>۲</sup> دانشجوی کارشناسی رشته زیست شناسی سلولی مولکولی، دانشگاه پیام نور

ساری، ایران

صبا مصطفوی<sup>۳</sup>، دانشجوی کارشناسی رشته زیست شناسی سلولی مولکولی، دانشگاه پیام نور

ساری، ایران

مینا عرب، دانشجوی کارشناسی رشته زیست شناسی سلولی مولکولی، دانشگاه پیام نور

ساری، ایران

فاطمه نادری<sup>۵</sup>، دانشجوی کارشناسی رشته زیست شناسی سلولی مولکولی، دانشگاه پیام نور

ساری، ایران

چکیده:

سرطان سینه یکی از شایع ترین سرطانها در میان زنان است. در سالهای اخیر، روشهای ریاضی و هوش مصنوعی ابزارهای موثری برای تحلیل دادههای بیان ژن معرفی شده است. این روشها با استفاده از مدل های آماری و الگوریتم های یادگیری ماشین، به تشخیص الگوهای پیچیده در داده های ژنتیکی کمک می کنند. در این مقاله، با مرور پژوهش های انجام شده، به بررسی نقش روش های ریاضی در تحلیل داده های بیان ژن سرطان سینه پرداخته شده است. مطالعات نشان می دهد ترکیب مدل های ریاضی و هوش مصنوعی می تواند دقت پیش بینی و تشخیص زودهنگام را افزایش دهد. این پژوهش نشان می دهد استفاده از این روشها در آینده می تواند در بهبود فرایندهای تشخیص و درمان سرطان سینه مؤثر باشد.

کلمات کلیدی: سرطان سینه، هوش مصنوعی، بیان ژن، روش های ریاضی

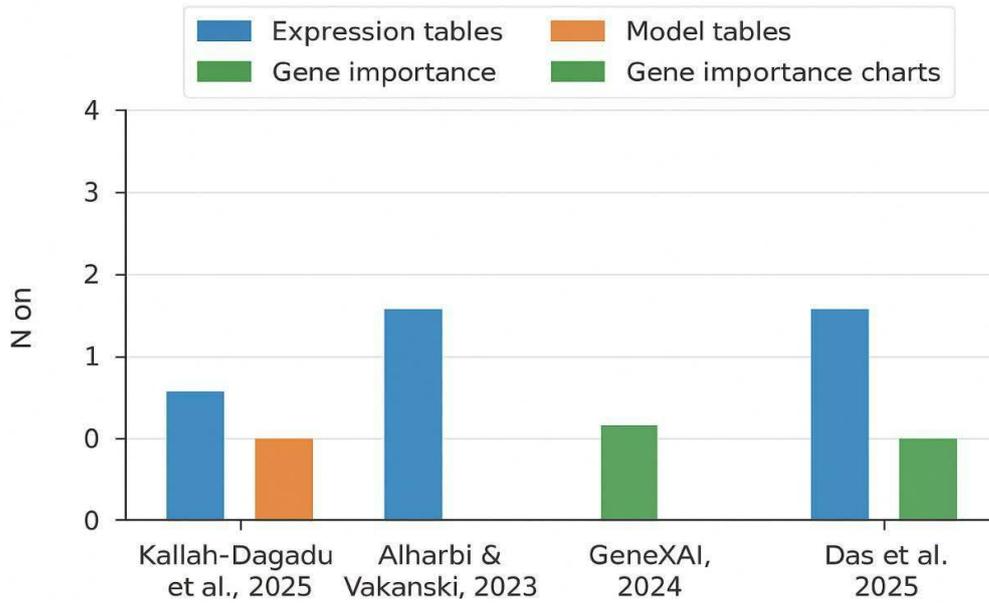
<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

## ۱. مقدمه

سرطان سینه یکی از مهم‌ترین علل مرگ‌ومیر در زنان سراسر جهان است (۱-۲). با پیشرفت فناوری‌های زیستی و تولید داده‌های عظیم ژنومی، تحلیل داده‌های بیان ژن به ابزاری مؤثر برای درک مکانیزم‌های مولکولی سرطان تبدیل شده است، بیان ژن نشان می‌دهد که در سلول‌های سالم و سرطانی، کدام ژن‌ها بیش فعال یا کم فعال هستند، با این حال، حجم بالای داده‌ها نیاز به روش‌های تحلیلی دقیق دارد (۳-۶). در سال‌های اخیر، استفاده از الگوریتم‌های ریاضی و یادگیری ماشین در بیوانفورماتیک باعث تحول در تحلیل داده‌های ژنتیکی شده است. هدف این پژوهش، به‌کارگیری روش‌های ریاضی برای شناسایی ژن‌های کلیدی مرتبط با سرطان سینه و بررسی قابلیت یادگیری ماشین در بهبود دقت تحلیل‌ها است.

## ۲. مواد و روش‌ها

در این مطالعه پژوهش‌های انجام شده از داده‌های بیان ژن مربوط به بیماران مبتلا به سرطان سینه از پایگاه NCBI GEO استفاده شده است. ابتدا داده‌ها نرمال‌سازی شدند تا مقادیر بیان ژن‌ها در نمونه‌های مختلف قابل مقایسه باشند. سپس از روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی (Principal Component Analysis - PCA) برای کاهش ابعاد و حذف نویز داده‌ها بهره گرفته شد. در مرحله‌ی بعد، با استفاده از الگوریتم خوشه‌بندی K-Means نمونه‌های سالم و سرطانی به دو گروه مجزا تقسیم گردیدند. داده‌های خروجی در نرم‌افزار Python تحلیل و نتایج به‌صورت نمودارهای دوبعدی ترسیم شدند تا تفاوت بین گروه‌ها به‌وضوح دیده شود (۷).



Gene:

Expression date → *mathematical modelling*

↓  
*Breast cancer*

↓  
*Artificial intelligence*

6-7 November 2025

### ۳. بحث و نتیجه گیری

نتایج حاصل از اجرای PCA نشان داد که چند مؤلفه اصلی بخش زیادی از تغییرات داده‌ها را توضیح می‌دهند. در تحلیل خوشه‌بندی، الگوریتم K-Means توانست با دقت بالا نمونه‌های سالم و سرطانی را از هم تفکیک کند. تعدادی از ژن‌ها که بیشترین تغییر بیان را داشتند، به‌عنوان ژن‌های کلیدی در پیشرفت سرطان سینه معرفی شدند. مقایسه‌ی این نتایج با داده‌های موجود در مطالعات پیشین، هم‌خوانی مناسبی نشان داد و صحت

مدل ریاضی و الگوریتم یادگیری ماشین تأیید گردید. این نتایج بیانگر قدرت روش‌های ریاضی و هوش مصنوعی در تفسیر داده‌های پیچیده زیستی است.

## نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر نشان داد که به‌کارگیری روش‌های ریاضی مانند PCA و الگوریتم‌های یادگیری ماشین می‌تواند ابزار مؤثری در تحلیل داده‌های بیان ژن سرطان سینه باشد. این ترکیب باعث افزایش دقت در شناسایی ژن‌های مؤثر و تسهیل در درک الگوهای مولکولی می‌شود. چنین رویکردی در آینده می‌تواند در طراحی درمان‌های هدفمند و تشخیص سریع‌تر بیماری‌ها نقش مهمی ایفا کند.

## سپاسگزاری

نویسنده بدین وسیله از دانشگاه پیام نور استان مازندران (مرکز ساری) که این فرصت را در اختیار ما دانشجویان رشته زیست‌شناسی سلولی و مولکولی قرار داده تا بتوانیم پژوهش خود را به سرانجام برسانیم، صمیمانه سپاسگزاری می‌نماید.

## منابع

۱. Alharbi, F., & Vakanski, A. (2023). Machine Learning Methods for Cancer Classification Using Gene Expression Data: A Review. *Bioengineering (Basel, Switzerland)*, 10(2), 173.
۲. Mazlan, A. U., Sahabudin, N. A., Remli, M. A., Ismail, N. S. N., Mohamad, M. S., Nies, H. W., & Abd Warif, N. B. (2021). A Review on Recent Progress in Machine Learning and Deep Learning Methods for Cancer Classification on Gene Expression Data. *Processes*, 9(8), 1466.
۳. Ghazal, H., El-Absawy, E. A., Ead, W., & Hasan, M. E. (2024). Machine learning-guided differential gene expression analysis identifies a highly-connected seven-gene cluster in triple-negative breast cancer. *BioMedicine*, 14(4), 15–35.
۴. Chen, J., Hao, L., Qian, X., Lin, L., Pan, Y., & Han, X. (2022). Machine learning models based on immunological genes to predict the response to neoadjuvant therapy in breast cancer patients. *Frontiers in Immunology*, 13, 948601.
۵. Darbandi, M. R., Darbandi, M., Darbandi, S., Bado, I., Hadizadeh, M., & Khorram Khorshid, H. R. (2024). Artificial intelligence breakthroughs in pioneering early diagnosis and precision treatment of breast cancer: A multimethod study. *European journal of cancer (Oxford, England : 1990)*, 209, 114227.
۶. Ashraf Sadat Ghasemi, S.M. Mousavi-Khoshdel, Mohammad Amir Saadatinasab, Investigating the interaction of naproxen with CSi and BN nanocages in gaseous and aqueous environments by DFT calculations, *Journal of Molecular Liquids*, Volume 419, 2025, 126593.



.Y Zhao, M., Tang, Y., Kim, H., & Hasegawa, K. (2018). Machine Learning With K-Means Dimensional Reduction for Predicting Survival Outcomes in Patients With Breast Cancer. *Cancer informatics*, 17, 1176935118810215.

.Y



# تأثیر آموزش های فوق برنامه و سبک های فرزندپروری بر اضطراب ریاضی دانش آموزان دبیرستانی

ویدا رستم آبادی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه علوم تربیتی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران،

ایران [Vida.rostamabadi57@pnu.ac.ir](mailto:Vida.rostamabadi57@pnu.ac.ir)

**چکیده:** پژوهش حاضر با هدف بررسی تأثیر آموزش های فوق برنامه و سبک های فرزندپروری والدین بر اضطراب ریاضی دانش آموزان دبیرستانی شهر کرمانشاه انجام شد جامعه آماری شامل ۲۷۹۸۴ نفر از دانش آموزان مقطع دبیرستان شهر کرمانشاه بود که ۳۷۰ نفر به صورت تصادفی تعیین گردید. روش پژوهش توصیفی و ابزار جمع آوری داده ها دو پرسش نامه استاندارد سبک های فرزندپروری بامریند (۱۹۷۳) و اضطراب ریاضی شکرانی (۱۳۸۱) و پرسش نامه آموزش فوق برنامه محقق ساخته می باشد که روایی آن مورد تأیید متخصصان قرار گرفت. به منظور تحلیل داده ها با استفاده از نرم افزار SPSS از آزمون T مستقل، تحلیل واریانس یک راهه و دو راهه استفاده شد. نتایج حاصل از پژوهش نشان داد که افرادی که از آموزش های فوق برنامه استفاده کرده اند اضطراب ریاضی کمتری را تجربه کرده اند و همچنین اثر سبک فرزندپروری نیز بر اضطراب ریاضی دانش آموزان معنادار بود.

**کلمات کلیدی:** آموزش فوق برنامه، اضطراب ریاضی، سبک های فرزند پروری

## ۱. مقدمه

از گذشته های نه چندان دور پدیده ای به نام آموزش های فوق برنامه در نظام آموزش و پرورش کشور به طور شتابان شکل گرفت آن چنان که دیگر والدین دانش آموزان به آموزش در مدرسه و کلاس درس اکتفا نکردند و اوقات فراغت پس از مدرسه نیز به ساعات آموزشی اضافه شد. با وجود این تعداد کمی از برنامه ریزان و سیاست گذاران در مورد تدریس خصوصی تکمیلی اطلاعات کافی دارند و به طور کلی، آثار تدریس خصوصی بر نظام های آموزشی و بر تغییرات اجتماعی ناچیز انگاشته شده و به خوبی درک نشده است (Bary, 2009). سبک های فرزندپروری، به رفتارهای معینی از والدین اشاره دارد که به طور منفرد و در ارتباط با یکدیگر بر پیامدهای تحولی کودک اثر می گذارند و در برگیرنده میزان پاسخگو بودن و مطالبه گر بودن والدین است که اصولاً به سه شیوه فرزندپروری سهل گیر (Permissive)، مقتدر (Authoritative) و مستبد (Authoritarian) است. در روش سهل گیر، والدین بسیار کم با فرزندان خود درگیر هستند و از آنها بسیار کم تقاضا دارند و کنترل کمی بر آنها دارند، و به آنها اجازه می دهند هر آنچه می خواهند انجام دهند و فرزندان هرگز کنترل رفتار خود را نمی آموزند،

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

والدین مقتدر فرزندان خود را به مستقل بودن تشویق می کنند، ولی رفتار آنها را کنترل می کنند و محدودیت هایی را قائل می شوند. والدین مستبد، دارای روش محدود سازنده و تنبیه کننده هستند، فرزندان خود را بسیار محدود و کنترل می کنند و هیچگونه گفتگویی در رابطه با دستورات خود انجام نمی دهند (Broke, 2005). اضطراب ریاضی می تواند نوعی نگرش نسبت به ریاضی و تا حدود زیادی یک امر درونی نیز به حساب آید (Arem, 2010). تحقیقات نشان می دهد دانش آموزانی که از اضطراب ریاضی رنج می برند، عوامل انگیزشی و عاطفی شناخته شده ای دارند که می توان از آنها به عنوان عوامل پیش بینی کننده اضطراب ریاضی استفاده کرد (Jain & Dowson, 2009). آموزش مهارت های حل مسأله، اضطراب ریاضی دانش آموزان را کاهش داده است (Imani, 2015) اضطراب ریاضی در واقع، وضعیتی روانی است که به هنگام رویارویی با محتوای ریاضی، موقعیت یاددهی - یادگیری، حل مسئله و امتحان در افراد پدید می آید این وضعیت معمولاً توأم با نگرانی زیاد، اختلال و نابسامانی فکری، افکار تحمیلی و تنش روانی است (Almalhoda, 2011) اضطراب یک علامت هشداردهنده است که از خطری قریب الوقوع خبر می دهد و شخص را برای مقابله آماده می سازد (Coplan & Sadok, 2010). بنا براین با توجه به مطالب پیش گفته مسئله اصلی این پژوهش این است که بفهمیم آیا آموزش های فوق برنامه و سبک های فرزند پروری بر اضطراب ریاضی تأثیر می گذارد یا خیر و در صورت تأثیر میزان و جهت چگونه است؟ روش تحقیق این پژوهش، از نوع توصیفی بوده است جامعه آماری این پژوهش را کلیه دانش آموزان مقطع دبیرستان شهر کرمانشاه در سال تحصیلی ۹۴-۹۳ تشکیل دادند نمونه گیری در این پژوهش، به صورت طبقه ای - تصادفی انجام گرفت و به تناسب تعداد آنان در نمونه مشخص شد. در پژوهش حاضر برای جمع آوری داده ها از ابزارهای زیر استفاده شد. پرسشنامه آموزش فوق برنامه که به صورت محقق ساخته برگرفته از مبانی نظری طراحی شد و شامل ۲۰ سؤال بود که از مقیاس ۵ درجه ای لیکرت تبعیت می کرد. برای سنجش روایی و پایایی آن از روایی صوری و محتوایی و برای بررسی اعتبار پرسش نامه از ضریب آلفای کرونباخ (۰/۷۲) استفاده شد. پرسش نامه استاندارد شیوه های فرزند پروری دیانا بامریند (Diana Baumrind) که شامل ۳۰ پرسش است. ۱۰ پرسش شیوه مقتدرانه، ۱۰ پرسش، شیوه مستبدانه و ۱۰ پرسش شیوه سهل گیرانه. که اعتبار و روایی آن در حد مطلوبی گزارش شده است. پرسش نامه اضطراب ریاضی (MARS) شکرانی (Shokrani, 2002) دارای دو عامل اضطراب امتحان ریاضی (MTA) و اضطراب ماهیت ریاضی (MNA) است برای سنجش پایایی این مقیاس از دو روش بازآزمایی و همسانی درونی (آلفای کرونباخ) استفاده می شود. ضریب آلفای کرونباخ برای کل آزمودنیها ۰/۹۲ به دست آمده است. به منظور ارزیابی روایی MARS ضریب همبستگی این آزمون با مقیاس اضطراب کتل به دست آمده است که برابر با ۰/۵۴ است. داده های جمع آوری شده با آزمون T مستقل و تحلیل واریانس یک راهه و دو راهه از طریق نرم افزار SPSS تجزیه و تحلیل شدند.

## ۲. نتایج اصلی

جدول ۱. میانگین و انحراف استاندارد اضطراب ریاضی شرکت کنندگان در پژوهش با توجه به سبک فرزندپروری و شرکت یا عدم شرکت در برنامه های آموزش فوق برنامه



| متغیر                        | سبک فرزندپروری | میانگین | انحراف استاندارد |
|------------------------------|----------------|---------|------------------|
| عدم شرکت در آموزش فوق برنامه | مقتدر          | ۲۵/۱۷   | ۹/۲۷             |
|                              | سهل گیر        | ۲۷/۶۸   | ۶/۷۰             |
|                              | مستبد          | ۲۹/۲۲   | ۶/۸۴             |
|                              | کل             | ۲۷/۶۴   | ۷/۴۲             |
| شرکت در آموزش فوق برنامه     | مقتدر          | ۱۸/۸۷   | ۷/۸۰             |
|                              | سهل گیر        | ۲۴/۲۸   | ۹/۲۵             |
|                              | مستبد          | ۲۵/۷۰   | ۸/۳۰             |
|                              | کل             | ۲۲/۸۵   | ۷/۷۸             |

جدول ۲ نتیجه تحلیل واریانس دوره سبک فرزندپروری و آموزش فوق برنامه بر اضطراب ریاضی شرکت کنندگان پژوهش

| متغیر                                | مجموع مجزورات | df  | میانگین مجزورات | F     | سطح معناداری | مجزوراتا |
|--------------------------------------|---------------|-----|-----------------|-------|--------------|----------|
| اثر گروه (آموزش فوق برنامه)          | ۲۰۸۱/۵۹       | ۱   | ۲۰۸۱/۵۹         | ۲۷/۸۶ | ۰/۰۰۱        | ۰/۰۵۴    |
| اثر گروه (سبک فرزندپروری)            | ۲۳۸۰/۳۵       | ۲   | ۱۱۸۱/۱۹         | ۱۴/۷۵ | ۰/۰۰۱        | ۰/۰۶۰    |
| اثر آموزش فوق برنامه* سبک فرزندپروری | ۱۵۹/۸۲        | ۲   | ۸۲/۴۵           | ۱/۱۰  | ۰/۳۲۸        | ۰/۰۰۴    |
| خطا                                  | ۳۵۶۳۷/۵۴      | ۴۹۴ | ۷۳/۷۸           | -     | -            | -        |
| کل                                   | ۳۷۶۴۱۰/۵۱     | ۵۰۰ | -               | -     | -            | -        |

جدول شماره ۲ نتیجه تحلیل واریانس دوره سبک فرزندپروری و آموزش فوق برنامه بر اضطراب ریاضی شرکت کنندگان پژوهش را نشان می دهد همانطور که نشان داده شده است اثر اصلی آموزش فوق برنامه بر اضطراب ریاضی کمتری تجربه کرده اند همچنین اثر اصلی سبک فرزند پروری [F(2,494)=14/75,p<0/001] نیز معنادار بود. نتایج تحلیل واریانس دو راهه بین گروهی نشان داد که رابطه معناداری بین عامل آموزش فوق برنامه و سبک فرزند پروری با میزان اضطراب ریاضی [F(2,494)=1/10,P>0/001] وجود ندارد.

جدول ۳ نتیجه آزمون T مستقل برای مقایسه معناداری اضطراب ریاضی در دانش آموزان دختر و پسر مقطع دبیرستان

| متغیر        | T    | df  | سطح معناداری |
|--------------|------|-----|--------------|
| اضطراب ریاضی | ۴/۲۴ | ۴۹۸ | ۰/۰۰۱        |

با توجه به جدول شماره ۳ مشاهده می شود که در نتایج آزمون T مستقل بین دو گروه تفاوت معناداری (P<۰/۰۰۱) وجود دارد.

جدول ۴ نتیجه تحلیل واریانس یک راهه برای آزمون اضطراب ریاضی بین گروههای مورد مطالعه به تفکیک رشته تحصیلی

| متغیر | مجموع مجزورات | درجات آزادی | میانگین مجزورات | F | Sig |
|-------|---------------|-------------|-----------------|---|-----|
|-------|---------------|-------------|-----------------|---|-----|

|       |      |        |     |         |                    |
|-------|------|--------|-----|---------|--------------------|
| ۰/۱۶۸ | ۱/۷۲ | ۱۴۹/۲۳ | ۳   | ۴۸۸/۱۲  | تغییرات بین گروهی  |
|       |      | ۹۳/۸۴  | ۴۹۳ | ۴۸۵۱/۸۴ | تغییرات درون گروهی |

با توجه به جدول شماره ۴ مشاهده می شود که بین گروههای مورد مطالعه در اضطراب ریاضی  $F_{(3,493)}=1/72, P>0/05$  تفاوت معنادار وجود ندارد.

#### ۴. نتیجه گیری

پژوهش حاضر با هدف بررسی تأثیر آموزش های فوق برنامه و سبک های فرزند پروری بر اضطراب ریاضی دانش آموزان انجام شد یافته ها نشان داد که بین آموزش های فوق برنامه و اضطراب ریاضی دانش آموزان رابطه منفی و معنادار وجود دارد و بین سبک فرزند پروری سهل گیر و مستبد با اضطراب ریاضی رابطه مثبت و معنادار وجود دارد و سبک مقتدر بهترین پیامدها را در زمینه اضطراب برای دانش آموزان به همراه دارد.

**سپاسگزاری:** از تمام عزیزانی که مرا در انجام این پژوهش یاری کردند کمال تشکر و قدردانی دارم.

#### منابع

- [1]Arem,C.(2010).Conquering Math Anxiety ,3 thed, Brook/Cole,Cengage Larning
- [2]Almalhoda,S.H.(2004).Students Mathematics Anxiety.Quarterly Journal of Psychology and Education.5(1),26-41(Persian)
- [3]Bray,M.(2009).Effects.shadow education,Resa publis her.(Persian)
- [4]Broke,M.(2005).The relationship among parenting practices parenting styles and adolescennt school achievement. Education psychology review,17(2),125-146
- [5]Coplan,H.& Sadok,B. (2010).Briefly Psychology Behavior Science, Shahrab publisher.(Persian).
- [6]Imani,S. Veisi kahreh,S.Kordnoghabi,R. Veispour,M. Tahmasian,H.& Rabie,M.(2015).The effectiveness of problem solving training on reduction of math anxiety amongst the students with field – dependennt cognitive style in academic year 1391-1392.Research in Curriculum planning a Quarterly Journal of Science and Research Islamic Azad university – khorasgan(Isfhan) Branch.12(19),47-54.[persian]

## ارزیابی مدل های ریاضی در تحلیل مدیریت منطقه بندی کاربری اراضی شهری

دکتر رضا لحمیان

(دانشیار، عضو هیئت علمی گروه جغرافیا، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران)

[r\\_lahmian@pnu.ac.ir](mailto:r_lahmian@pnu.ac.ir)

### چکیده:

برنامه ریزی کاربری اراضی شهری، به ویژه فرآیند منطقه بندی، یکی از ارکان اصلی توسعه پایدار شهری و مدیریت فضا به شمار می رود. با توجه به پیچیدگی و پویایی سیستم های شهری، استفاده از مدل های ریاضی و کمی برای تحلیل، پیش بینی و بهینه سازی توزیع فضایی کاربری ها ضروری است. روش های سنتی منطقه بندی اغلب بر معیارهای توصیفی و استاتیک متکی هستند، در حالی که مدل های ریاضی مانند مدل های برنامه ریزی خطی، ابزارهای تحلیلی قدرتمندی برای در نظر گرفتن همزمان عوامل اقتصادی، اجتماعی، زیست محیطی و زیرساختی ارائه می دهند که نتیجه آن به حداقل رسیدن مشکلات کاربری های شهری است. لذا هدف این پژوهش، ارزیابی اقسام مدل های ریاضی در تحلیل مدیریت منطقه بندی کاربری اراضی شهری است تا بدین واسطه بتواند در بهبود تصمیم گیری ها و کاهش ناسازگاری های کاربری اراضی در محیط های شهری مفید باشد. این تحقیق از لحاظ ماهیت و روش، توصیفی-تحلیلی با هدف کاربردی به روش کتابخانه ای و اسنادی است. از نتایج این پژوهش، استفاده موثر متخصصان حوزه شهری از مدل های ریاضی در تصمیم گیری مباحث منطقه بندی کاربری های شهری است تا با کاهش نارسایی ها مدیریت بهینه در سطح شهر و منطقه بوجود آید و بازخورد آن ارتقای سیستم های شهری و رضایتمندی شهروندان باشد.

واژگان کلیدی: مدل های ریاضی و کمی، منطقه بندی شهری، کاربری اراضی شهری

### مقدمه:

کاربرد اصلی مبحث منطقه بندی شهری (Urban Zoning)، که با نام هایی مانند زونینگ یا حوزه بندی نیز شناخته می شود، ابزاری قانونی و برنامه ریزی برای نظم دهی به نحوه استفاده از زمین در شهرها است. هدف نهایی آن دستیابی به یک الگوی کاربری زمین متعادل، پایدار و مطابق با اهداف طرح جامع شهر است (پورمحمدی، ۱۳۹۵). به طور خلاصه، مهم ترین کاربردهای منطقه بندی شهری عبارتند از:

#### ۱. جلوگیری از تداخل و تعارض کاربری ها

- تفکیک کاربری های ناسازگار: این مهم ترین کارکرد است. منطقه بندی، کاربری هایی که می توانند بر یکدیگر تأثیر منفی بگذارند را از هم جدا می کند.

#### ۲. کنترل توسعه کالبدی و مدیریت تراکم

- تعیین تراکم و ارتفاع: منطقه بندی، ضوابطی را برای حداکثر تراکم ساختمانی (تعداد واحدها یا سطح زیربنای مجاز در یک قطعه زمین) و حداکثر ارتفاع ساختمان ها در هر منطقه تعیین می کند. این کار به منظور:
  - کنترل جمعیت پذیری: مدیریت تعداد ساکنان و بارگذاری بر زیرساخت های شهری (آب، برق، فاضلاب).

- حفظ منظر شهری: ایجاد هماهنگی در ارتفاع ساختمان‌ها و جلوگیری از ایجاد توده‌های نامتجانس.
- استانداردهای عقب‌نشینی‌ها و فضاهای باز: تعیین میزان عقب‌نشینی ساختمان از معابر و مرزهای ملک، و همچنین سهم فضای باز (مانند حیاط و بالکن) برای بهبود دسترسی، نورگیری و کیفیت زندگی (حکمت نیا، ۱۳۸۵).

### ۳. تأمین رفاه عمومی و خدمات شهری

- تخصیص زمین برای خدمات: منطقه‌بندی اطمینان می‌دهد که زمین‌های کافی برای کاربری‌های ضروری عمومی مانند مدارس، بیمارستان‌ها، پارک‌ها، و آتش‌نشانی در دسترس و به طور مناسب توزیع شده باشند تا شعاع دسترسی استاندارد رعایت شود.
- حفاظت از منابع: تخصیص کاربری‌های خاص برای حفاظت از مناطق طبیعی، مناطق سیلابی، میراث فرهنگی و ...

به عبارت دیگر، منطقه‌بندی شهری یک قرارداد اجتماعی-قانونی برای سازماندهی فضا است تا شهر به طور کارآمد، ایمن، و عادلانه توسعه یابد (لحمیان و دیگران، ۱۳۹۷).

مدل‌های ریاضی که در مباحث منطقه‌بندی کاربری‌های شهری:

مدل‌های ریاضی متعددی در مباحث منطقه‌بندی کاربری‌های شهری استفاده می‌شوند که هدف آن‌ها بهینه‌سازی توزیع فضایی کاربری‌های مختلف (مانند مسکونی، تجاری، صنعتی، خدماتی) و پیش‌بینی تغییرات آتی کاربری زمین است. این مدل‌ها به طور کلی می‌توانند به چند دسته اصلی تقسیم شوند (Li, 2020):

#### ۱. مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی (Mathematical Programming Models)

این مدل‌ها بر اساس تکنیک‌های بهینه‌سازی، بنا شده‌اند و به دنبال یافتن بهترین تخصیص کاربری‌ها به قطعات زمین با توجه به یک یا چند هدف و محدودیت از پیش تعیین شده هستند.

- برنامه‌ریزی خطی (Linear Programming - LP): اغلب برای حل مسائل تخصیص کاربری زمین (Land Use Allocation - LUA) با متغیرهای پیوسته استفاده می‌شوند.
- برنامه‌ریزی عدد صحیح (Integer Programming): در این مدل‌ها، متغیرها معمولاً دوگانه (صفر یا یک) هستند و نشان می‌دهند که آیا یک فعالیت خاص به یک قطعه زمین مشخص تخصیص داده شود یا خیر.
- مدل‌های چندهدفه (Multi-objective Models): این مدل‌ها سعی می‌کنند چندین هدف متضاد (مانند به حداکثر رساندن سود اقتصادی و به حداقل رساندن تأثیرات محیط زیستی) را به طور همزمان بهینه کنند.
- برنامه‌ریزی احتمالی و فازی (Probabilistic and Fuzzy Programming): برای مدیریت عدم قطعیت‌ها در داده‌ها و محدودیت‌ها استفاده می‌شوند.

#### ۲. مدل‌های شبیه‌سازی فضایی (Spatial Simulation Models)

این مدل‌ها برای پیش‌بینی و شبیه‌سازی تغییرات دینامیک کاربری زمین و الگوهای توسعه شهری در طول زمان به کار می‌روند (حسینعلی، ۱۳۹۸):

- اتوماتای سلولی (Cellular Automata - CA): یکی از رایج‌ترین مدل‌ها برای شبیه‌سازی تغییرات کاربری زمین است. شهر به یک شبکه سلولی تقسیم می‌شود و وضعیت هر سلول (نوع کاربری) در گام زمانی بعدی بر اساس قوانین انتقال، وضعیت سلول در حال حاضر و وضعیت همسایگی آن تعیین می‌شود.

- رگرسیون لجستیک فضایی (Spatial Logistic Regression): برای مدل‌سازی احتمال وقوع یک تغییر کاربری خاص (مانند تبدیل زمین کشاورزی به مسکونی) بر اساس عوامل محرک مختلف (مانند دسترسی به جاده، شیب، فاصله از مراکز شهر) استفاده می‌شود.
- مدل‌های زنجیره مارکوف (Markov Chain Analysis - MCA): این مدل‌ها بر اساس احتمالات گذار بین حالت‌های مختلف کاربری زمین (مثلاً احتمال تغییر از مسکونی به تجاری) در طول زمان، تغییرات آتی را پیش‌بینی می‌کنند. اغلب با مدل‌های CA ترکیب می‌شوند.
- مدل‌سازی مبتنی بر عامل (Agent-Based Modeling - ABM): این رویکرد، رفتار تصمیم‌گیرندگان فردی (عامل‌ها) مانند خانوارها، توسعه‌دهندگان، یا مؤسسات را در انتخاب مکان و تغییر کاربری زمین شبیه‌سازی می‌کند و در نتیجه الگوهای کلان شهری را تولید می‌کند.

### ۳. مدل‌های یادگیری ماشین (Machine Learning - ML)

با توسعه داده‌های بزرگ (Big Data) و سنسجش از دور (Remote Sensing)، الگوریتم‌های یادگیری ماشین برای طبقه‌بندی کاربری‌های زمین موجود، تحلیل الگوها و پیش‌بینی استفاده می‌شوند (Gül, 2018):

- جنگل تصادفی (Random Forest - RF)
- ماشین‌های بردار پشتیبان (Support Vector Machine - SVM)
- شبکه‌های عصبی عمیق (Deep Learning - DL) مانند شبکه‌های عصبی پیچشی (Convolutional Neural Network - CNN)

### نتیجه‌گیری:

این الگوریتم‌ها می‌توانند الگوهای پیچیده و غیرخطی تغییر کاربری زمین را با دقت بالا تشخیص دهند و در فرآیند تصمیم‌گیری برای منطقه‌بندی به برنامه‌ریزان کمک کنند. در جدول زیر برای استفاده راحت‌تر کاربران، چهار مدل ریاضی که در منطقه بندی کاربری اراضی شهری به کار می‌رود، به صورت نقاط قوت و ضعف با مثال ارائه شده است.

| مدل ریاضی              | نقاط قوت (مزایا)  | نقاط ضعف (معایب)   | مثال کاربردی  |
|------------------------|---|--|---|
| ۱. برنامه‌ریزی ریاضی   | بهینه‌سازی: توانایی یافتن راه‌حل‌های بهینه برای تخصیص کاربری زمین بر اساس اهداف و محدودیت‌های کمی (مثلاً حداکثر کردن سود، حداقل کردن هزینه).<br>وضوح و ساختار: بسیار شفاف و منطقی برای تحلیل تصمیمات. | سکون (Static): معمولاً تغییرات و پویایی‌های زمانی توسعه شهری را در نظر نمی‌گیرند.<br>سادگی بیش از حد: دشواری در مدل‌سازی روابط پیچیده، غیرخطی و کیفی بین کاربری‌ها و محیط. | تعیین تخصیص بهینه سطوح کاربری (مسکونی، تجاری، فضای سبز) در یک منطقه جدید به منظور حداکثرسازی تراکم مجاز و رعایت سهم‌های خدماتی (برنامه‌ریزی خطی چندهدفه). |
| ۲. اتوماتای سلولی (CA) | پویایی (Dynamic): توانایی شبیه‌سازی تغییرات فضایی-زمانی کاربری زمین. سادگی ساختار: مفهوم ساده و قابل فهم که تعاملات محلی  | وابستگی به قوانین محلی: تمرکز زیاد بر تعاملات محلی و دشواری در مدل‌سازی نیروهای کلان شهری (Macro-scale)  | شبیه‌سازی گسترش آبی شهر (Urban Sprawl) در حاشیه بافت موجود بر اساس تأثیر نزدیکی به جاده‌ها و کاربری‌های موجود.  |

| مدل ریاضی                       | نقاط قوت (مزایا)  | نقاط ضعف (معایب)   | مثال کاربردی  |
|---------------------------------|---|--|---|
|                                 | (همسایگی) را به خوبی مدل می‌کند.  | forces) مانند سیاست‌های منطقه‌ای یا اقتصاد ملی. کالیراسیون دشوار: تعیین دقیق قوانین و پارامترهای انتقال (Transition Rules) می‌تواند چالش برانگیز باشد.   |   |
| ۳. مدل‌سازی مبتنی بر عامل (ABM) | واقع‌گرایی رفتاری: توانایی مدل‌سازی تصمیم‌گیرندگان (خانوارها، توسعه‌دهندگان) و تعاملات آن‌ها که منجر به ظهور الگوهای کلان می‌شود. انعطاف‌پذیری بالا: مناسب برای مدل‌سازی سیاست‌های شهری و سناریوهای مختلف دخالت‌ها. (Interventions) | پیچیدگی بالا: طراحی و اجرای مدل‌های ABM بسیار پیچیده و زمان‌بر است. دشواری در اعتبارسنجی: اعتبارسنجی و تأیید رفتار عوامل در مقیاس بزرگ دشوار است.  | شبیه‌سازی نحوه تأثیر تصمیمات توسعه‌دهندگان مسکن بر انتخاب محل ساخت در مناطق مختلف با توجه به قیمت زمین و تقاضای خانوار.   |
| ۴. یادگیری ماشین (ML)           | دقت پیش‌بینی: توانایی عالی در شناسایی الگوهای پیچیده و غیرخطی از داده‌های بزرگ و پیش‌بینی کاربردی‌های آینده با دقت بالا. کارایی در داده‌های مکانی-زمانی: مناسب برای تحلیل داده‌های سنجش از دور و GIS چندگانه.                       | "جمعیه سیاه" (Black Box): اغلب مدل‌ها، به ویژه شبکه‌های عصبی، تفسیر دلایل پشت پیش‌بینی‌ها را دشوار می‌کنند (کاهش شفافیت). نیاز به داده‌های حجیم و با کیفیت: عملکرد به شدت وابسته به حجم و کیفیت داده‌های آموزشی (Training Data) است. | نقشه‌برداری خودکار مناطق عملکردی (مسکونی، تجاری، صنعتی) در یک شهر بزرگ با استفاده از ترکیب داده‌های تصاویر ماهواره‌ای، نقاط مورد علاقه (POI) و داده‌های مکانی تلفن همراه. |

#### منابع:

۱. پور محمدی، محمدرضا (۱۳۹۵). برنامه‌ریزی کاربردی اراضی شهری. چاپ دوازدهم. انتشارات سمت
۲. حسینعلی، فرهاد (۱۳۹۸). مقاله شبیه‌سازی تغییرات پوشش کاربردی اراضی کشاورزی با استفاده از سامانه‌های چندعامله مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی (MP-MAS) در شهرستان بابلسر. منتشر شده در مجله تحقیقات اقتصاد کشاورزی
۳. حکمت‌نیا، حسن (۱۳۸۵). کاربرد مدل در جغرافیا با تأکید بر برنامه‌ریزی شهری و ناحیه‌ای. چاپ اول. انتشارات علم نوین
۴. لحمیان، رضا. فیروزمند، مارال (۱۳۹۷). فضای شهری و رفاه اجتماعی. چاپ اول. انتشارات دانشگاه گرمسار
5. Gül, M., & Akbulut, O. (2018). "Optimal land-use allocation with environmental and socio-economic considerations using multi-objective programming." Applied Mathematical Modelling.
6. Li, X., & Yeh, A. G. O. (2020). "Some developments in urban land use modeling and simulation." Environment and Planning B: Planning and Design.

## حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات درون صفحه نانو حلقه ها بر پایه تئوری الاستیسیته ناموضعی

رضا حسینی آراء<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶،

تهران، ایران [HosseiniAra@pnu.ac.ir](mailto:HosseiniAra@pnu.ac.ir)

چکیده: فناوری نانو یکی از دستاوردهای نوینی است که در بیشتر گرایش‌های علمی راه یافته و با سرعت بسیار زیاد در حال توسعه می‌باشد. تحلیل ارتعاشی نانو حلقه ها به عنوان جزء اصلی تشکیل دهنده بسیاری سازه ها از اهمیت ویژه ای برخوردار است. هدف اصلی در این پژوهش، تحلیل دقیق‌تر ارتعاشات مکانیکی نانو حلقه ها با استفاده از تئوری ناموضعی ارینگن است. برای این منظور، معادلات دیفرانسیلی حاکم بر ارتعاشات نانو حلقه با در نظر گرفتن پارامترهای مؤثر بر فرکانس‌های طبیعی نانو حلقه مورد بررسی و حل دقیق قرار گرفت. نتیجه بررسی ها نشان می‌دهد که با افزایش شعاع نانو حلقه، تأثیر مقیاس کوچک کاهش یافته است و پارامتر ناموضعی اهمیت خود را از دست می‌دهد اما هرچه شعاع نانو حلقه کوچک‌تر می‌شود با توجه به تأثیر پارامتر ناموضعی، معادلات پاسخ دقیق‌تری خواهند داشت.

کلمات کلیدی: تئوری الاستیسیته ناموضعی، معادلات دیفرانسیل، تحلیل ارتعاشی، نانو حلقه

### ۱. مقدمه

فناوری نانو نگرشی تازه به کلیه فناوری های موجود است و روش های مبتنی بر آن در اصل همان فناوری های قبل هستند که در مقیاس نانو ارائه می‌شوند [۱]. تأثیر اندازه در رفتار مکانیکی این ساختارها که ابعادشان بسیار کوچک و قابل قیاس با فواصل مولکولی است، حائز اهمیت است. با توجه به اینکه تئوری های کلاسیک توانایی پذیرش تأثیر اندازه های کوچک را ندارند، از تئوری الاستیسیته ناموضعی ارینگن برای منظور نمودن این اثر استفاده می‌شود. در این تئوری فرض می‌شود که تنش در یک نقطه تابعی از کرنش همه نقاط محیط است و در نتیجه توانایی پیش بینی رفتار نانوسازه ها در ابعاد بزرگ نیز وجود دارد [۲]. در این پژوهش با استفاده از حل معادلات دیفرانسیل تئوری ناموضعی و تئوری صفحات حلقوی تغییر شکل پذیر، تحلیل ارتعاشات آزاد در صفحه برای نانو حلقه ها مورد بررسی قرار خواهد گرفت. معادلات حرکت نانو حلقه با در نظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک به دست می‌آید و

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

راه حل‌های تحلیلی برای فرکانس‌های طبیعی نانوحلقه‌ها ارائه می‌شود. همچنین اثرات مقیاس کوچک بر فرکانس‌های طبیعی با توجه به پارامترهای مختلف مانند شعاع نانو حلقه‌ها و عدد مودهای ارتعاشی بررسی می‌شود.

### ۱-۱. تئوری الاستیسیته ناموضعی

تئوری الاستیسیته ناموضعی توسط ارینگن در سال ۱۹۸۳ ارائه و در آن معادلات ساختاری از طریق اعمال تأثیر نقاط مادی دور از هم برای تئوری‌های محیط پیوسته کلاسیک تعمیم داده شد [۲]. طبق این تئوری، تانسور تنش تابع تانسور کرنش همه نقاط مادی جسم خواهد بود که معادله ساختاری آن به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij}^{n2}(x) = \int_V (|x' - x|) \sigma_{ij}(x') dV(x') \quad (1)$$

در این رابطه،  $x$  نقطه مرجع مورد نظر در جسم،  $\alpha(|x' - x|)$  تابع کرنل ناموضعی و  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش موضعی براساس تئوری الاستیسیته کلاسیک در هر نقطه  $x'$  در جسم است که از معادله ساختاری (۲) پیروی می‌کند:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{kl} + u_{L,k}) \quad (2)$$

در این صورت تانسور تنش طبق معادله (۳) به صورت غیرمستقیم با تانسور کرنش در ارتباط خواهد بود.

$$\sigma_{ij} = (1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij}^{nl} \quad (3)$$

در معادله (۳)،  $\mu$  پارامتر ناموضعی ابعاد کوچک است که اثر نیروهای بین اتمی و بین مولکولی را در رابطه ساختاری وارد می‌کند. این پارامتر به گونه‌ای انتخاب می‌شود که نتایج تئوری ارینگن با نتایج آزمایشگاهی انطباق مناسبی داشته باشند [۳].

### ۲. نتایج اصلی

با توجه به این‌که برای حلقه کامل باید جابجایی و مشتقات آن پررودیک باشند، بنابراین جواب معادله (۳) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$v_0(\theta, t) = C(\theta) e^{i\omega_n t} \quad (4)$$

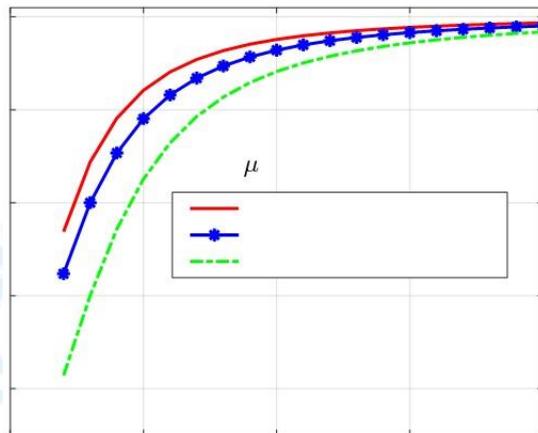
که در آن  $\omega$  فرکانس طبیعی،  $C(\theta)$  شکل مود و همچنین  $i = \sqrt{-1}$  می‌باشد. معادله ارتعاشی نانوحلقه با استفاده از رابطه (۴) به صورت زیر ساده می‌شود:



$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \omega^4 \mu_1^2 \frac{\rho^2 R^4}{E k_s G} - \omega^2 \mu_1 \left( \frac{\rho R^2}{E} + \frac{\rho R^2}{k_s G} \right) \right] \frac{d^6 C}{d^6 \theta} + [2 + \omega^4 (-\mu_1 (2 + \mu_1))] \frac{\rho^2 R^4}{E k_s G} \\ & + \omega^2 \left( (1 + 2\mu_1) \frac{\rho R^2}{E} + (1 + \mu_1) \frac{\rho R^2}{k_s G} + \mu_1 \frac{\rho A R^4}{E I_1} \right) \frac{d^4 C}{d^4 \theta} + [1 \\ & - \omega^4 \left( (-2 + \mu_1) \frac{\rho R^2}{E} + \frac{\rho R^2}{k_s G} + (1 + \mu_1) \frac{\rho A R^4}{E I_1} \right) \\ & + \omega^4 (1 + 2 + \mu_1) \frac{\rho^2 R^4}{E k_s G}] \frac{d^2 C}{d^2 \theta} + [\omega^2 \frac{\rho R^2}{E} + \frac{\rho A R^4}{E I_1}] - \omega^4 \frac{\rho^2 R^4}{E k_s G} C(\theta) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

### ۳. نتایج عددی

تغییرات نسبت فرکانسی با شعاع نانو حلقه در مود دوم برای ارتعاشات درون صفحه‌ای و مقایسه آن با مراجع مختلف [۴،۵] در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل (۱) - مقادیر نسبت فرکانسی در برابر تغییرات شعاع نانو حلقه برای ارتعاشات درون صفحه‌ای و مقایسه آن با مراجع [۴،۵]

### ۴. نتیجه‌گیری

همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش شعاع نانو حلقه، نسبت فرکانسی به یک میل می‌کند و اختلاف مقدار کلاسیک و ناموضعی کاهش می‌یابد. در مورد این نتیجه می‌توان گفت با افزایش شعاع، اهمیت پارامتر ناموضعی به تدریج کاهش می‌یابد. همچنین به منظور سلامت‌سنجی نتایج و با مقایسه صورت گرفته مشخص می‌شود که پاسخ‌های به دست آمده در این پژوهش با توجه به شکل (۱) مشابه نتایج به دست آمده در مراجع [۴،۵] است.

### منابع

1. Hosseini-Ara, R., Kashi, M., Toghraie, D. (2021) Lateral buckling analysis of nanotubes and nanorings under uniform external pressure: a closed-form nonlocal solution, J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., 43(3), 128.



2. Eringen, A.C. (1983) On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *J. Appl. Phys.*, 54, 4703-4710.
3. Hosseini-Ara, R. (2018) Nano-scale effects on nonlocal boundary conditions for exact buckling analysis of nano-beams with different end conditions, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 40, 144.
4. Rao, S.S., Sundararajan, V. (1969) In-Plane Flexural Vibrations of Circular Rings, *J. Appl. Mech.*, 36(3), 620-625.
5. Wang C.M., Duan W.H. (2008) Free vibration of nanorings/arches based on nonlocal elasticity, *J. Appl. Phys.*, 104, 014303.



# بررسی اثر ناموضعی در حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات نانوحلقه‌ها

رضا حسینی آراء<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶،

تهران، ایران [HosseiniAra@pnu.ac.ir](mailto:HosseiniAra@pnu.ac.ir)

چکیده: حل دقیق معادلات دیفرانسیلی حاکم بر ارتعاشات نانو حلقه‌ها به عنوان جز اصلی تشکیل دهنده بسیاری از نانوسازه‌های پیشرفته دارای اهمیت ویژه‌ای است. لذا در این پژوهش به بررسی ریاضیاتی اثر اندازه‌های کوچک در ارتعاشات مکانیکی نانو حلقه‌ها با استفاده از تئوری ناموضعی ارینگن پرداخته شد. برای این منظور، ارتعاشات نانو حلقه با در نظر گرفتن پارامتر ناموضعی اندازه‌های کوچک مورد بررسی قرار گرفت. نتیجه بررسی‌ها نشان داد که تأثیر اندازه در ارتعاشات مکانیکی نانوسازه‌ها که ابعادشان قابل قیاس با فواصل مولکولی است، دارای اهمیت بسیار زیادی می‌باشد و قابل چشم‌پوشی نیست.

**کلمات کلیدی:** معادلات دیفرانسیل، ارتعاشات درون صفحه، پارامتر ناموضعی، نانوحلقه، تئوری ناموضعی

## ۱. مقدمه

در حال حاضر نانو فناوری یک تکنولوژی توانمند است که پتانسیل تبدیل به یک فناوری جایگزین را دارد [۱]. با توجه به اینکه تأثیر اندازه‌های کوچک در مقیاس نانو در رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها بسیار پر اهمیت است و تئوری‌های کلاسیک قادر به محاسبه این اثر نیستند، از تئوری الاستیسیته ناموضعی ارینگن برای این منظور استفاده می‌شود. در این تئوری فرض می‌شود که تنش در یک نقطه تابعی از کرنش همه نقاط جسم است [۲]. در این تحقیق با استفاده از تئوری ناموضعی و تئوری صفحات حلقوی تغییر شکل پذیر، اثر پارامتر ناموضعی بر پاسخ‌های ارتعاشات آزاد در صفحه برای نانو حلقه‌ها مورد بررسی قرار خواهد گرفت. برای این منظور معادلات دیفرانسیلی حاکم بر حرکت نانو حلقه با در نظر گرفتن اثرات اندازه‌های کوچک به دست می‌آید و سپس پاسخ‌های تحلیلی برای فرکانس‌های طبیعی نانوحلقه‌ها ارائه می‌گردد.

### ۱-۱. تئوری الاستیسیته ناموضعی

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

در تئوری ناموضعی ارینگن معادله تانسور تنش بصورت غیرمستقیم و با معادله (۳) با تانسور کرنش در ارتباط خواهد بود [۲]:

$$\sigma_{ij} = (1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij}^{nl} \quad (1)$$

که در این معادله،  $\mu$  پارامتر مقیاس است که اثر نیروهای بین اتمی و بین مولکولی را در رابطه ساختاری وارد می کند. این پارامتر به گونه ای انتخاب می شود که نتایج تئوری ارینگن با نتایج آزمایشگاهی انطباق مناسبی داشته باشد [۱].

## ۲. نتایج اصلی

با در نظر گرفتن معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات نانوحلقه با استفاده از رابطه (۱) به صورت زیر ساده می شود:

$$\left[ 1 + \omega^4 \mu_1^2 \frac{\rho^2 R^4}{E k_s G} - \omega^2 \mu_1 \left( \frac{\rho R^2}{E} + \frac{\rho R^2}{k_s G} \right) \right] \frac{d^6 C}{d\theta^6} + [2 + \omega^4 (-\mu_1 (2 + \mu_1)) \frac{\rho^2 R^4}{E k_s G} + \omega^2 \left( (1 + 2\mu_1) \frac{\rho R^2}{E} + (1 + \mu_1) \frac{\rho R^2}{k_s G} + \mu_1 \frac{\rho A R^4}{E I_1} \right) \frac{d^4 C}{d\theta^4} + [1 - \omega^4 \left( (-2 + \mu_1) \frac{\rho R^2}{E} + \frac{\rho R^2}{k_s G} + (1 + \mu_1) \frac{\rho A R^4}{E I_1} \right) + \omega^4 (1 + 2 + \mu_1) \frac{\rho^2 R^4}{E k_s G}] \frac{d^2 C}{d\theta^2} + [\omega^2 \frac{\rho R^2}{E} + \frac{\rho A R^4}{E I_1}] - \omega^4 \frac{\rho^2 R^4}{E k_s G} C(\theta) = 0 \quad (2)$$

که در آن  $\omega$  فرکانس طبیعی و  $C(\theta)$  به شکل مود اشاره دارد و  $i = \sqrt{-1}$  است. برای معادله (۲) جوابی به فرم زیر در نظر گرفته شده است:

$$C(\theta) = C_0 \sin(n\theta + \varphi_0) \quad (3)$$

که در رابطه (۳)،  $C_0$ ،  $\varphi_0$  اعداد ثابتی هستند و  $n$  عدد صحیح بزرگتر از یک می باشد.

## ۳. نتایج عددی

بر اساس این پژوهش، برای بررسی معادلات حاکم بر ارتعاشات نانو حلقه دایره ای در جدول (۱) محاسبه و با نتایج پژوهش وانگ [۳] مقایسه شده است.

جدول (۱) - مقایسه ی نتایج مرجع [۳] و تئوری ارائه شده در این تحقیق برای ارتعاشات درون صفحه ای یک نانوحلقه

| عدد<br>مود | $\mu = 0$ |              | $\mu = 2$ |              | $\mu = 4$ |              |
|------------|-----------|--------------|-----------|--------------|-----------|--------------|
|            | وانگ [۳]  | این<br>پژوهش | وانگ [۳]  | این<br>پژوهش | وانگ [۳]  | این<br>پژوهش |
| 2          | 2.6833    | 2.6830       | 2.4914    | 2.4911       | 2.0953    | 2.0950       |
| 3          | 7.5895    | 7.5871       | 6.5079    | 6.5056       | 4.8587    | 4.8567       |
| 4          | 14.5521   | 14.5429      | 11.3633   | 11.3553      | 7.7126    | 7.7067       |
| 5          | 23.5339   | 23.5089      | 16.6410   | 16.6217      | 10.5247   | 10.5119      |

#### ۴. نتیجه‌گیری

مشاهده می‌شود که تاثیر اثر ناموضعی مربوط به اندازه‌های کوچک در رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها که ابعادشان بسیار کوچک و قابل قیاس با فواصل اتمی است، دارای اهمیت زیادی می‌باشد و چشم‌پوشی از این اثر باعث ایجاد خطا در پاسخ‌های نهایی می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که طبق جدول (۱) با افزایش پارامتر ناموضعی، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین مقدار پارامتر ناموضعی بین ۰ تا ۲ نانومتر انتخاب شد که تطابق خوبی با نتایج ارائه شده توسط وانگ در مرجع [۳] و مقایسه با شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی و نتایج تجربی ارائه می‌کند.

#### منابع

- Hosseini-Ara, R. (2018) Nano-scale effects on nonlocal boundary conditions for exact buckling analysis of nano-beams with different end conditions, J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., 40, 144.
- Eringen, A.C. (1983) On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, J. Appl. Phys., 54, 4703-4710.
- Wang C. M., Duan W.H. (2008) Free vibration of nanorings/arches based on nonlocal elasticity, J. Appl. Phys., 104, 014303.

# پاسخ ارتعاشات عرضی نانو حلقه ها به کمک حل معادلات دیفرانسیل حاکم

رضا حسینی آراء<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶،

تهران، ایران [HosseiniAra@pnu.ac.ir](mailto:HosseiniAra@pnu.ac.ir)

چکیده: کاربرد ریاضیات در محاسبات پیچیده سازه‌ها در مقیاس نانو، می‌تواند منجر به پیشرفت‌های گسترده‌ای در سایر علوم مهندسی شود. یکی از این موضوعات، به دست آوردن فرکانس ارتعاشات عرضی نانو حلقه ها به عنوان جز اصلی تشکیل دهنده بسیاری از نانو سازه ها است. هدف اصلی در این پژوهش، حل دقیق‌تر ارتعاشات مکانیکی نانو حلقه ها با استفاده از تئوری ناموضعی ارینگن است. برای این منظور، معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات نانو حلقه با در نظر گرفتن پارامترهای مؤثر بر فرکانس‌های طبیعی آن مورد بررسی قرار گرفت. نتیجه بررسی‌ها نشان می‌دهد که با افزایش شعاع نانوحلقه، تأثیر مقیاس کوچک کاهش یافته است و پارامتر ناموضعی اهمیت خود را از دست می‌دهد.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل، ارتعاش عرضی، نانوحلقه، الاستیسیته ناموضعی ارینگن

## ۱. مقدمه

علم نانو مواد، توجه دانشمندان و مهندسان را در سال‌های اخیر به خود جلب کرده است. در ابعاد نانو، طراحی و ایجاد مواد جدید با انعطاف‌پذیری و پیشرفت‌های زیادی در خواص فیزیکی آن‌ها همراه است. لذا ارائه یک مدل مناسب که رفتار نانوحلقه ها را با دقت قابل قبولی نشان دهد و همچنین استفاده از آن توجیه اقتصادی داشته باشد نیز یک عامل بسیار مهم در این زمینه است [۱]. مدل‌های قدیمی با توجه به عدم پوشش شرایط ناپوستگی‌های اتمی در مقیاس نانو امکان ارائه پاسخ‌های دقیق‌تر را ندارند. لذا تئوری الاستیسیته ناموضعی ارینگن با جبران نقایص مربوط به تئوری‌های سنتی در این زمینه می‌تواند به طور گسترده‌ای استفاده شود [۲].

### ۱-۱. تئوری الاستیسیته ناموضعی

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

کاربرد تئوری الاستیسیته ناموضعی ارینگن [۳] برای تحلیل نانوساختارهایی است که امکان بیان از طریق تئوری های مکانیک محیط های پیوسته را ندارند. در واقع این تئوری بر خلاف حالت های کلاسیک و قدیمی، تانسور تنش در هر نقطه از جسم را تابعی از تانسور کرنش همه نقاط مادی جسم در نظر می گیرد:

$$\sigma_{ij}^{n2}(x) = \int_V (|x' - x|) \sigma_{ij}(x') dV(x') \quad (1)$$

که در آن  $x$  نقطه مرجع مورد نظر در جسم،  $\alpha(|x' - x|)$  تابع کرنل ناموضعی  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش کلاسیک در هر نقطه  $x'$  از جسم است:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{kl} + u_{L,k}) \quad (2)$$

در این صورت تانسور تنش بصورت غیرمستقیم و با معادله (۳) با تانسور کرنش در ارتباط خواهد بود:

$$\sigma_{ij} = (1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij}^{nl} \quad (3)$$

در معادله (۳)،  $\mu$  پارامتر مقیاس است که اثر نیروهای بین اتمی و بین مولکولی را در رابطه ساختاری وارد می کند. این پارامتر به گونه ای انتخاب می شود که نتایج تئوری ارینگن با نتایج آزمایشگاهی انطباق مناسبی داشته باشد [۲].

## ۲. نتایج اصلی

با در نظر گرفتن این شرط اساسی که برای حلقه کامل باید جابجایی و مشتقات آن به صورت تناوبی باشند، بنابراین رابطه تغییر مکان به صورت زیر خواهد بود:

$$w_0 = (\theta, t) = c_0 \sin(n\theta + \varphi_0) e^{i\omega t} \quad (4)$$

که در آن  $\omega$  فرکانس طبیعی و  $C(\theta)$  به شکل مود اشاره دارد و  $i = \sqrt{-1}$  است. همچنین برای معادله (۴) جوابی به فرم زیر در نظر گرفته شده است:

$$C(\theta) = C_0 \sin(n\theta + \varphi_0) \quad (5)$$

که در رابطه (۵)،  $C_0, \varphi_0$  اعداد ثابتی هستند و  $n$  عدد صحیح است ( $n > 1$ ).

## ۳. نتایج عددی

تغییرات فرکانس طبیعی بدون بعد نانو حلقه در مودهای مختلف برای ارتعاشات درون صفحه ای و مقایسه آن با مراجع مختلف در جدول (۱) نشان داده شده است.

جدول (۱) - مقایسه ی نتایج رانو [۴] برای فرکانس طبیعی بی بعد و تئوری ارائه شده در این تحقیق برای ارتعاشات عرضی

| عدد<br>مود | رانو [۴] | نتایج این پژوهش |             |             |             |           |           |           |
|------------|----------|-----------------|-------------|-------------|-------------|-----------|-----------|-----------|
|            |          | $\mu = 0$       | $\mu = 0.1$ | $\mu = 0.2$ | $\mu = 0.5$ | $\mu = 1$ | $\mu = 2$ | $\mu = 3$ |
| 2          | 1.898    | 1.898           | 1.780       | 1.682       | 1.463       | 1.235     | 0.985     | 0.844     |
| 3          | 4.339    | 4.339           | 3.770       | 3.388       | 2.705       | 2.142     | 1.623     | 1.359     |
| 4          | 6.886    | 6.885           | 5.419       | 4.654       | 3.507       | 2.684     | 1.988     | 1.651     |
| 5          | 9.431    | 9.431           | 6.665       | 5.532       | 4.016       | 3.016     | 2.208     | 1.826     |
| 6          | 11.946   | 11.945          | 7.596       | 6.147       | 4.352       | 3.230     | 2.349     | 1.937     |

#### ۴. نتیجه گیری

همان طور که مشاهده می شود در تئوری کلاسیک که نمودار آن معادل صفر بودن پارامتر ناموضعی  $\mu$  است، نتایج مقادیر بزرگتری را برای فرکانسها تخمین می زند، در حالی که تئوری ناموضعی با احتساب اثر اندازه کوچک، مقادیر کوچکتر و معتبرتری به فرکانسها اختصاص می دهد. همچنین در این تئوری محدوده وسیعی از نیروهای بین اتمی و ابعاد طولی داخلی در روابط ساختاری مواد همسانگرد و همگن به عنوان پارامترهای ماده مطرح می شوند که علاوه بر اجتناب از حل معادلات پیچیده، توانایی پیش بینی رفتار نانوسازه ها در ابعاد بزرگ را نیز دارد. نکته ی قابل توجه دیگر، انطباق نتایج تئوری های کلاسیک و ناموضعی در مودهای پایین تر است. اختلاف بین دو تئوری با افزایش عدد مود، افزایش می یابد. می توان گفت اختلاف میان نتایج تحقیقات رانو و نتایج این پژوهش به دلیل اعمال تاثیر اندازه کوچک در معادلات است که در پژوهش رانو [۴] نیز این اختلاف قابل مشاهده است.

#### منابع

1. Moosavi, H., Mohammadi, M., Farajpour, A., Shahidi, S.H. (2011) Vibration analysis of nano rings using nonlocal continuum mechanics and shear deformable ring theory, Physica, E, Low-dimens. syst. nanostruct., 44,1, 135-140.
2. Hosseini-Ara, R. (2018) Nano-scale effects on nonlocal boundary conditions for exact buckling analysis of nano-beams with different end conditions, J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., 40, 144.
3. Eringen, A.C. (1983) On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, J. Appl. Phys., 54, 4703-4710.
4. Rao, S.S. (1971) Effects of transverse shear and rotary inertia on the coupled twist-bending vibrations of circular rings, J. Sound Vib., 16 (4), 551-566.

# تأثیر روش تدریس مشارکتی بر پیشرفت تحصیلی درس ریاضی دانش آموزان

ویدا رستم آبادی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه علوم تربیتی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران،

ایران [Vida.rostamabadi57@pnu.ac.ir](mailto:Vida.rostamabadi57@pnu.ac.ir)

**چکیده:** هدف این مطالعه بررسی تأثیر روش تدریس مشارکتی بر پیشرفت تحصیلی درس ریاضی دانش آموزان پایه پنجم ابتدایی شهرستان کنگاور است. بدین منظور با روش تصادفی ۱۰۰ دانش آموز دختر و پسر از دو مدرسه در دو گروه آزمایش و کنترل قرار گرفتند، که گروه کنترل به شیوه سنتی و گروه آزمایش در معرض روش تدریس مشارکتی قرار گرفتند. از هر دو گروه پیش آزمون و پس آزمون گرفته شد. پس از اجرای متغیر مستقل یعنی اعمال روش تدریس مشارکتی، پس آزمون پیشرفت تحصیلی به وسیله فرم همتای پیش آزمون نسبت به درس ریاضی اجرا گردید. به منظور تحلیل داده ها با استفاده از نرم افزار SPSS از تحلیل واریانس دو راهه استفاده شد. نتایج نشان داد که میانگین نمرات دانش آموزان گروه آزمایش به طور معناداری بیش از میانگین نمرات دانش آموزان گروه کنترل است.

**کلمات کلیدی:** روش تدریس، مشارکتی، پیشرفت تحصیلی

## ۱. مقدمه

روشهای تدریس اگر متناسب با شرایط و نیاز فراگیران و جامعه نباشد قادر نخواهد بود رسالت خویش را انجام دهد. واقعیت امر این است که روشهای تدریس سنتی به دلایل مختلف جوابگوی تغییرات معطوف به هدف در راستای تربیت منابع انسانی مورد نیاز جامعه امروز نیست و ضرورت دارد روشهای تدریس نوین و تحول گرا جایگزین آنها شود. انتخاب الگوی تدریس بستگی به نوع آگاهی معلم از فلسفه و نگرش های او به تعلیم و تربیت خواهد داشت (شعبانی، ۱۳۸۲). ایوآسی و گلدنبرگ معتقدند روش تدریس در موفقیت فرایندهای آموزشی بسیار اهمیت دارد با وجود این هیچ روشی نمی تواند همیشه و در همه شرایط نتیجه بخش باشد (دایر و آزیورن، ۱۹۹۹). به طور کلی روشهای دانشجو مدار از روشهای استاندارد مدار مؤثرترند، محیط آرام و به دور از استرس و اضطراب، شرکت همه دانشجویان در بحث، طرح سؤال، تولید دانش و زایش اطلاعات جدید از مواردی است که به عنوان پیامدهای مثبت روشهای فعال مورد تأکید قرار گرفته است (ایوآسی و گلدنبرگ، ۱۹۹۳). یادگیری حل مسأله، یکی از هدفهای مهم در یادگیری ریاضیات است (کلایبر ۲۰۰۷، به نقل از دارش و همکاران، ۱۳۹۷). ریاضیات نقش مهمی در پیشرفت علم و فناوری ایفا می کند و ابزار مهمی برای حل مسأله تلقی میشود (رهايو و هیدایتی، ۲۰۱۸ به نقل از دارش و همکاران، ۱۳۹۷). متخصصان آموزش ریاضی بیان کرده اند دانش آموزان برای

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

استفاده از مفاهیم ریاضی آموخته شده در زمینه های مختلف به تجربه و فرصت هایی نیاز دارند تا بتوانند این مفاهیم را برای حل مسأله در موقعیت های مختلف و در دنیای واقعی به کار گیرند (اوجوس، ۲۰۱۱). از این رو لازم است در برنامه ریزیهای کلان آموزشی، با تدوین یک مدل یاددهی - یادگیری، متفاوت از دیدگاه سنتی آموزش ریاضی ارتباط دانش آموزان با دنیای واقعی مورد توجه قرار گیرد (دجیدو و همکاران، ۲۰۱۸). در واقع فعالیت های تحقیقی به دانشجویان این فرصت را می دهد که به صورت گروهی همکاری کنند، ایده های خویش را بیان نموده، سؤال بپرسند و درک خود را از مطلب ارتقاء دهند و به درک عمیق تری از مفاهیم درس آمار نایل شوند (Roseth, 2008). به عقیده نورگیانتورو (۲۰۱۳) آموزش مطالب چیزی است که برای هدف و ابزار ارزیابی پا در میانی می کند، یادگیری مطالب وسیله ای برای دستیابی به اهداف و در عین حال منبع آماده سازی ابزارهای ارزیابی است. فرضیه این پژوهش عبارت است از روش تدریس مشارکتی به طور معناداری بر پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی دانش آموزان پایه پنجم ابتدائی تأثیر مثبت دارد. با توجه به ماهیت موضوع و مسأله پژوهش از روش "تحقیق آزمایش حقیقی" و "طرح آزمایشی" پیش آزمون و پس آزمون با گروه کنترل و گزینش تصادفی استفاده شده است. جامعه آماری عبارت است از همه دانش آموزان پسر و دختر پایه پنجم ابتدائی شهرستان کنگاور که در سال تحصیلی ۱۴۰۳-۴۰۴ مشغول به تحصیل بوده اند. و روش انتخاب نمونه تصادفی می باشد. ابزار پژوهش آزمون پیشرفت تحصیلی است، به منظور سنجش میزان پیشرفت تحصیلی دانش آموزان در ارتباط با محیط و مساحت دایره آزمون بر اساس محتوای آموزشی کتاب ریاضی پنجم دبستان ساخته شد. اهداف آموزشی سؤالات آزمون معطوف به طبقات شش گانه حیطه شناختی و تکیه غالب بر شناسایی و درک مفاهیم و کاربرد حل مسأله بود این آزمون شامل ۳۰ سؤال که به عنوان آزمون پیشرفت تحصیلی ساخته شد و معادل این ۳۰ سؤال فرم آزمون همتایی ساخته شد که از نظر اندازه گیری طبقات شش گانه حیطه شناختی و تمام خصیصه های مورد نظر، سطح دشواری و تمیز، تعداد سؤالات و ... با ۳۰ سؤال نخست یکسان و معادل بود. این دو فرم (الف و ب) سؤال همتا، به عنوان پیش آزمون و پس آزمون ابزار سنجش میزان پیشرفت تحصیلی قرار گرفت رویی محتوایی آزمون توسط معلمان مجرب و راهنمایان تعلیماتی تأیید شد. و برای پایائی آزمون از فرم های موازی استفاده شد.

## ۲. نتایج اصلی

به منظور بررسی فرضیه اول تحقیق مبنی بر وجود یا عدم وجود تفاوت معنی دار بین میانگین نمرات پیشرفت تحصیلی و عملکرد دانش آموزان در گروههای کنترل و آزمایش با عنایت به اینکه طرح آزمایش به صورت پیش آزمون و پس آزمون بود، ابتدا گروههای کنترل و آزمایش در پیش آزمون های پیشرفت تحصیلی (قبل از اجرای متغیر مستقل = روش مشارکتی) با استفاده از تحلیل واریانس دو طرفه مورد ارزیابی قرار گرفتند و به دنبال آن مقایسه ای بین میانگین نمرات گروههای کنترل و آزمایش در پس آزمون (پس از اجرای متغیر مستقل = اعمال روش تدریس مشارکتی) از طریق تحلیل واریانس دو طرفه صورت گرفت، نتایج طبق جدول نشان داده میشود.

جدول ۱: توزیع میانگین نمرات دانش آموزان دختر و پسر در گروههای کنترل و آزمایش در پیش آزمون پیشرفت تحصیلی



| جنسیت گروهها | دختر<br>تعداد | مجموع |               | پسر<br>تعداد | دختر<br>تعداد | میانگین نمرات |
|--------------|---------------|-------|---------------|--------------|---------------|---------------|
|              |               | تعداد | میانگین نمرات |              |               |               |
| کنترل        | ۲۵            | ۴/۵۳  | ۴/۴۹          | ۲۵           | ۴/۵۸          | ۴/۵۳          |
| آزمایش       | ۲۵            | ۳/۸۸  | ۳/۷۶          | ۲۵           | ۴/۰۴          | ۳/۸۸          |
| مجموع        | ۵۰            | ۴/۱۸  | ۴/۱           | ۵۰           | ۴/۲۹          | ۴/۱۸          |

جدول ۲: تحلیل واریانس گروههای کنترل و آزمایش در پیش آزمون پیشرفت تحصیلی

| متغیرها گروهها         | درجه آزادی | میانگین مربعات | نسبت F | سطح معنی داری |
|------------------------|------------|----------------|--------|---------------|
| جنسیت                  | ۱          | ۰/۷۹۹          | ۰/۲۳۷  | ۰/۶۲۷         |
| گروههای کنترل و آزمایش | ۱          | ۹/۸۵۶          | ۰/۰۹۵  | ۰/۰۹۵         |
| تعامل بین گروهها و     | ۱          | ۰/۲۴۴          | ۰/۷۸۸  | ۰/۷۸۸         |
| جنسیت<br>خطا           | ۹۹         | ۳/۳۷           |        |               |

ملاحظه میشود بر طبق داده های جدول یک و دو در مرحله پیش آزمون (قبل از اجرای متغیر مستقل = روش تدریس مشارکتی) و در مقایسه بین میانگین نمرات گروههای کنترل (میانگین = ۴/۵۳) و گروههای آزمایش (میانگین = ۳/۸۸) تفاوت معنی داری در عملکرد پیشرفت تحصیلی در مرحله پیش آزمون مشاهده نمی شود. ولی پس از اعمال متغیر مستقل و اجرای پس آزمون و استخراج میانگین نمرات گروههای کنترل و آزمایش و تحلیل واریانس آنها، طبق جدول ۳ نتایج متفاوتی مشاهده می شود.

جدول ۳: توزیع میانگین نمرات دانش آموزان دختر و پسر در گروههای کنترل و آزمایش در پس آزمون پیشرفت تحصیلی

| جنسیت گروهها | دختر<br>تعداد | مجموع |               | پسر<br>تعداد | دختر<br>تعداد | میانگین نمرات |
|--------------|---------------|-------|---------------|--------------|---------------|---------------|
|              |               | تعداد | میانگین نمرات |              |               |               |
| کنترل        | ۲۵            | ۱۱/۲۹ | ۱۱/۷۴         | ۲۵           | ۱۰/۵۸         | ۱۱/۲۹         |
| آزمایش       | ۲۵            | ۱۴/۳۰ | ۱۴/۸۰         | ۲۵           | ۱۳/۵۶         | ۱۴/۳۰         |
| مجموع        | ۵۰            | ۱۲/۸۶ | ۱۳/۳۲         | ۵۰           | ۱۲/۱۸         | ۱۲/۸۶         |

چنانچه ملاحظه میشود با مقایسه میانگین نمرات گروههای کنترل و آزمایش، دادهها حاکی از این است که میانگین نمرات دانش آموزان گروه آزمایش در جدول ۳ (میانگین = ۱۴/۳۰) به طور معنی داری بیشتر از میانگین دانش آموزان گروه کنترل در همان جدول (میانگین = ۱۱/۲۹) می باشد. این نتیجه تایید کننده فرضیه تحقیق است. به عبارتی ساده دانش آموزان گروه آزمایش به طور معنی داری عملکرد بهتری در آزمون پیشرفت تحصیلی در درس ریاضی نسبت به دانش آموزان گروه کنترل از خود نشان دادند.

## ۴. نتیجه گیری

با توجه به نتایج داده های تحقیق که در جدول ۱ تا ۳ مندرج است، مشاهده میشود با وجود آنکه تا قبل از اجرای متغیر مستقل یعنی اعمال روش تدریس (مشارکتی) تفاوت معنی داری بین میانگین نمرات گروههای کنترل و

آزمایش وجود نداشت، ولی پس از اعمال متغیر مستقل و اجرای پس آزمون، تفاوت معنی داری بوجود آمده است نتیجه مؤید تحقیقاتی است که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است.

**سپاسگزاری:** از تمام عزیزانی که مرا در انجام این پژوهش یاری دادند کمال تشکر و قدردانی دارم.

## منابع

[1] دارش، نسرين، شاهی، سکینه و رضوی، سید عباس (۱۳۹۷). تأثیر آموزش ریاضی به روش جورج پولیا بر مهارت حل مسأله و پیشرفت تحصیلی ریاضی دانش آموزان. دستاوردهای روان شناختی ( علوم تربیتی و روان شناختی)، 25(2) 181-200. <http://sid.ir/paper/186581/fa>.

[2] شعبانی، ح. (۱۳۸۲). روش تدریس پیشرفته و آموزش مهارت ها و راهبردهای تفکر، تهران، سمت

[3] Dyer, J. E., Osborne, E. W. (1999). Effects of student learning styles short and retention of subject matter using various approaches, *Journal of Agriculture Education*, 40, 11-18

[4] Djid, H., & Retnawati, H. (2018). Cultural values-integrated mathematical learning model to develop HOTS and character values in E. Retnowati, A Ghufon, Marzuki, Kasiyan, A. C. Pierawan, Ashadi (Eds). *Character education for 21<sup>st</sup> century global citizens* (pp. 363-370). Routledge. <http://doi.org/10.1201/97813/510.4188-46>

[5] Nurgiyantoro, Burhan. 2013. *Penilaian pembelajaran Bahasa Berbasis Kompe* Yogyakarta: BPFE.

[6] Ojose, B. (2011). Mathematics literacy: Are we able to put the mathematics we learn in to everyday use. *Journal of mathematics Education*, 4(1), 89-100. <http://education literacy>  
 Are we able to put the mathematics we learn in to Everyday use pdf

[7] Roseth .C.J. Garfield. J.B and Ben-Zvi. D. (2008). collaboration in learning and teaching statistics *Journal statistics Education*. 16(1). <http://amastat.Org/publications/js/7/6n1/rosth.html> (acc-es-ssed 16 february 2010).

[8] Saye, J. W. AND brush T, A. (2004). scaffolding problem-based teaching in traditional social studies classroom theory and Research in social Education 32(3), 349-378

## مدل سازی و تحلیل ماتریسی انتشار ویژگی ها در شبکه های عصبی گراف ناهمگون برای سیستم های توصیه گر

حسین حق شناس<sup>\*</sup>، دانشجوی کارشناسی ارشد گروه مهندسی کامپیوتر، دانشگاه میبد، یزد، ایران

haghshenas3c@gmail.com

دکتر حسین قانعی بافقی، استادیار گروه مهندسی کامپیوتر، دانشگاه میبد، یزد، ایران

h.ghaneai@meybod.ac.ir

دکتر فاطمه زارع مهرجردی، استادیار گروه مهندسی کامپیوتر، دانشگاه میبد، یزد، ایران

fzare@meybod.ac.ir

دکتر محسن سرداری زارچی، دانشیار گروه مهندسی کامپیوتر، دانشگاه میبد، یزد، ایران

sardari@meybod.ac.ir

**چکیده:** این مقاله با هدف غلبه بر چالش های پراکندگی داده و مدل سازی روابط پیچیده در سیستم های توصیه گر، یک چهارچوب مبتنی بر تحلیل ماتریسی برای فرآیند انتشار ویژگی در شبکه های عصبی گراف ناهمگون<sup>۱</sup> ارائه می دهد. در این چهارچوب، عملیات کانولوشن گرافی به مجموعه ای از تبدیلات ماتریسی تجزیه شده و به صورت ریاضی نشان داده می شود که این فرآیند چگونه روابط ساختاری مرتبه بالا را برای تولید نمایش های برداری غنی از موجودیت ها ثبت می کند. اعتبارسنجی این مدل روی داده های واقعی، بهبود معنادار دقت توصیه ها نسبت به روش های پایه و همگرایی الگوریتم بهینه سازی را به اثبات می رساند.

**کلمات کلیدی:** شبکه های عصبی گراف، سیستم توصیه گر، گراف ناهمگون، تحلیل ماتریسی، انتشار ویژگی

### ۱ مقدمه

سیستم های توصیه گر با دو چالش اساسی مواجه هستند: پراکندگی داده و پیچیدگی روابط کاربر-آیتم [؟]. کاربران معمولاً تنها با بخش کوچکی از آیتم ها تعامل دارند که به ماتریس تعاملات ناقص منجر می شود [؟]. شبکه های عصبی گراف ناهمگون با مدل سازی صریح انواع مختلف گره و یال، امکان استخراج الگوهای ارتباطی مرتبه بالا را فراهم می آورند [؟]. با این حال، مکانیسم های زیربنایی انتشار ویژگی اغلب مبهم هستند.

<sup>\*</sup> نویسنده مسئول

<sup>۱</sup>HGNNs: Heterogeneous Graph Neural Networks

این مقاله یک چهارچوب تحلیلی مبتنی بر ماتریس برای مدل‌سازی انتشار ویژگی معرفی می‌کند. با تبدیل عملیات گذردهی پیام به ضرب‌های ماتریسی ساختاریافته، یک لنز ریاضی دقیق برای بررسی جریان اطلاعات فراهم می‌شود. نوآوری اصلی، تجزیه عملیات کانولوشن گرافی ناهمگون به تبدیلات ماتریسی است که نشان می‌دهد چگونه وابستگی‌های ساختاری در نمایش‌های برداری نهایی استخراج می‌شوند.

## ۲ فرمول‌بندی ریاضی مسئله

**تعریف گراف ناهمگون:** یک گراف ناهمگون را به صورت  $G = (V, E, \phi, \psi)$  تعریف می‌کنیم که در آن  $V$  و  $E$  به ترتیب مجموعه گره‌ها و یال‌ها هستند و  $\phi: V \rightarrow T_V$  و  $\psi: E \rightarrow T_E$  توابع نوع‌بندی گره‌ها و یال‌ها می‌باشند [؟]. در اینجا،  $T_E$  و  $T_V$  به ترتیب مجموعه انواع گره‌ها و یال‌ها هستند. برای هر رابطه  $r \in T_E$ ، یک ماتریس مجاورت  $A_r \in \mathbb{R}^{|V_{\text{source}(r)}| \times |V_{\text{target}(r)}|}$  تعریف می‌شود که در آن  $\text{source}(r)$  و  $\text{target}(r)$  به ترتیب نوع گره مبدأ و مقصد رابطه  $r$  هستند.

**هدف یادگیری:** هدف، یادگیری نمایش‌های برداری  $h_v \in \mathbb{R}^d$  برای گره‌ها است به طوری که برای کاربر  $u$  و آیت  $i$ ، امتیاز تعامل  $\hat{y}_{ui} = f(h_u^{(L)}, h_i^{(L)})$  نزدیک به برچسب واقعی  $y_{ui}$  باشد، که در آن  $L$  تعداد لایه‌های شبکه  $d$  بعد نمایش برداری است [؟].

## ۳ روش پیشنهادی: تحلیل ماتریسی انتشار ویژگی

عملیات انتشار ویژگی در HGNN را به عنوان یک فرآیند ماتریسی چندلایه مدل می‌کنیم که در آن اطلاعات ساختاری از طریق تبدیلات خطی و تجمیع پیام‌ها منتشر می‌شود.

### ۱.۳ اپراتور انتشار تک‌لایه

انتشار ویژگی در گراف‌های همگون در لایه  $l$  با اپراتور  $\mathcal{P}(H) = \hat{A}HW^{(l)}$  تعریف می‌شود که در آن  $\hat{A}$  ماتریس مجاورت نرمال‌شده،  $H$  ماتریس نمایش‌های ویژگی و  $W^{(l)}$  ماتریس وزن قابل یادگیری است. این اپراتور را برای محیط ناهمگون تعمیم می‌دهیم [؟]. برای هر رابطه  $r \in T_E$  که گره‌های نوع  $\text{source}(r)$  را به نوع  $\text{target}(r)$  متصل می‌کند، یک اپراتور انتشار تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{P}_r(H, W) = \hat{A}_r HW_r^{(l)} \quad (1)$$

که در آن  $\hat{A}_r$  ماتریس مجاورت نرمال‌شده برای رابطه  $r$  است. نمایش جدید گره‌های نوع  $\tau$  از تجمیع پیام‌های دریافتی از تمام روابط ورودی به دست می‌آید:

$$H_\tau^{(l+1)} = \sigma \left( \sum_{r \in \mathcal{R}_\tau} \mathcal{P}_r(H_{\text{source}(r)}^{(l)}, W_r^{(l)}) \right) \quad (2)$$

که در آن  $\mathcal{R}_\tau = \{r \in T_E \mid \text{target}(r) = \tau\}$  مجموعه روابطی است که به گره‌های نوع  $\tau$  ختم می‌شوند و  $\sigma$  تابع فعال‌سازی غیرخطی مانند  $\text{ReLU}^2$  است. این فرمول‌بندی، فرآیند گذردهی پیام ناهمگون را به صورت مجموعه‌ای از تبدیلات خطی وزن‌دار مدل می‌کند که پایه‌ای برای تحلیل‌های عمیق‌تر فراهم می‌آورد.

<sup>2</sup>ReLU: Rectified Linear Unit

## ۲.۳ تحلیل انتشار چندلایه و روابط مرتبه بالا

با بسط بازگشتی معادله (۲؟) برای دو لایه و با فرض خطی بودن  $(\sigma(x) = x)$ ، نمایش گره‌های نوع  $\tau$  به صورت زیر درمی‌آید:

$$H_{\tau}^{(2)} = \sum_{r_1 \in \mathcal{R}_{\tau}} \sum_{r_2 \in \mathcal{R}_{\text{source}(r_1)}} (\hat{A}_{r_1} \hat{A}_{r_2}) H_{\text{source}(r_2)}^{(0)} (W_{r_2}^{(0)} W_{r_1}^{(1)}) \quad (۳)$$

جمله  $\hat{A}_{r_1} \hat{A}_{r_2}$  در این معادله به طور مستقیم مسیرهای به طول 2 در گراف را نمایش می‌دهد. این تحلیل ماتریسی به وضوح نشان می‌دهد که چگونه انتشار چندلایه، اطلاعات ساختاری و روابط مرتبه بالا را در نمایش‌های برداری نهایی گره‌ها استخراج می‌کند [۲؟]. به طور کلی، برای  $L$  لایه، نمایش نهایی شامل مسیرهای به طول  $L$  در گراف ناهمگون خواهد بود.

## ۳.۳ تولید توصیه و بهینه‌سازی

پس از  $L$  لایه انتشار، امتیاز تعامل کاربر  $u$  و آیت  $i$  از طریق ضرب داخلی نمایش‌های نهایی آن‌ها محاسبه می‌شود:

$$\hat{y}_{ui} = (h_u^{(L)})^T h_i^{(L)} \quad (۴)$$

برای بهینه‌سازی پارامترهای مدل  $(\Theta = \{W_r^{(l)} \mid r \in \mathcal{T}_E, l = 0, \dots, L-1\})$ ، از تابع زیان BPR<sup>۳</sup> استفاده می‌کنیم:

$$\mathcal{L}_{BPR} = \sum_{(u,i,j) \in \mathcal{D}} -\ln \sigma(\hat{y}_{ui} - \hat{y}_{uj}) + \lambda \|\Theta\|_2^2 \quad (۵)$$

که در آن  $\mathcal{D}$  مجموعه نمونه‌های آموزشی،  $i$  یک آیت مثبت و  $j$  یک آیت منفی برای کاربر  $u$  است و  $\lambda$  ضریب منظم‌سازی می‌باشد [۲؟].

## ۴ ارزیابی تجربی و نتایج

برای ارزیابی، مدلی بر اساس چهارچوب تحلیلی پیشنهادی پیاده‌سازی کردیم و آن را با مدل‌های پایه MF<sup>۴</sup>، NGCF<sup>۵</sup> و LightGCN [۲؟] بر روی دو مجموعه داده MovieLens-1M و Yelp مقایسه نمودیم.

**تنظیمات پیاده‌سازی:** مدل با  $L = 3$  لایه، بعد نمایش برداری  $d = 64$ ، نرخ یادگیری  $0.001$ ، و ضریب منظم‌سازی  $\lambda = 10^{-5}$  آموزش داده شد. برای هر کاربر، 4 آیت منفی نمونه برداری شده و بهینه‌سازی با الگوریتم Adam انجام شد. نتایج با معیارهای Recall@20 و NDCG@20<sup>۶</sup> به همراه میانگین و انحراف معیار در 5 اجرا، در جدول ۲؟ ارائه شده است.

نتایج نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی به طور مداوم عملکرد بهتری نسبت به روش‌های پایه دارد. بهبودها در مجموعه داده MovieLens-1M حدود 4.4% در Recall@20 و 4.6% در NDCG@20 نسبت به بهترین روش پایه است. این نتایج مؤید این فرضیه است که مدل‌سازی صریح و تحلیلی روابط ناهمگون و استخراج اطلاعات از مسیرهای چندگانه در گراف، به یادگیری نمایش‌های برداری مؤثرتر و در نتیجه دقت بالاتر در پیش‌بینی تعاملات کاربر-آیت منجر می‌شود.

<sup>۳</sup>BPR: Bayesian Personalized Ranking

<sup>۴</sup>MF: Matrix Factorization

<sup>۵</sup>NGCF: Neural Graph Collaborative Filtering

<sup>۶</sup>NDCG: Normalized Discounted Cumulative Gain

جدول ۱: مقایسه عملکرد مدل‌ها بر روی دو مجموعه داده (بهترین نتایج به صورت بولد نمایش داده شده‌اند)

| Dataset      | Metric    | MF    | NGCF  | LightGCN | MatrixHGNN           |
|--------------|-----------|-------|-------|----------|----------------------|
| MovieLens-1M | Recall@20 | 0.218 | 0.243 | 0.250    | <b>0.261 ± 0.003</b> |
|              | NDCG@20   | 0.211 | 0.233 | 0.241    | <b>0.252 ± 0.004</b> |
| Yelp         | Recall@20 | 0.051 | 0.057 | 0.064    | <b>0.069 ± 0.002</b> |
|              | NDCG@20   | 0.042 | 0.047 | 0.053    | <b>0.058 ± 0.002</b> |

## ۵ نتیجه‌گیری

این مقاله یک چهارچوب تحلیلی مبتنی بر ماتریس برای مدل‌سازی فرآیند انتشار ویژگی در شبکه‌های عصبی گراف ناهمگون برای سیستم‌های توصیه‌گر ارائه کرد. با تجزیه عملیات کانولوشن گرافی به تبدیلات ماتریسی ساختاریافته، نشان دادیم که چگونه روابط ساختاری مرتبه بالا در نمایش‌های برداری موجودیت‌ها استخراج می‌شوند. ارزیابی تجربی بر روی داده‌های واقعی، برتری این رویکرد را نسبت به روش‌های پایه تأیید کرد. کارهای آینده شامل بررسی معماری‌های عمیق‌تر و ترکیب با مکانیسم‌های توجه می‌باشد.

## مراجع

- [1] S. Forouzandeh, P. Moradi, and M. Jalili, SHARP-Distill: A  $68\times$  Faster Recommender System with Hypergraph Neural Networks and Language Models, in *Proc. 42nd Int. Conf. Machine Learning*, PMLR 267 (2025).
- [2] X. He, K. Deng, X. Wang, Y. Li, Y. Zhang, and M. Wang, LightGCN: Simplifying and Powering Graph Convolution Network for Recommendation, in *Proc. 43rd Int. ACM SIGIR Conf. Research and Development in Information Retrieval*, (2020), 639–648.
- [3] M. K. Najafabadi, R. Chen, J. Rezazadeh, A. Beheshti, and N. Shabani, From theory to practice: The evolution and comparative analysis of homogeneous vs. heterogeneous Graph Neural Networks in recommender systems, *Neurocomputing*, 624 (2025), 129446.
- [4] D. Pu, Y. Zhang, Z. Qian, G. Xie, and D. Pu, A graph neural network recommendation algorithm based on multi-scale attention and contrastive learning, *Scientific Reports*, 15 (2025), 32207.
- [5] X. Wang, X. He, M. Wang, F. Feng, and T. S. Chua, Neural Graph Collaborative Filtering, in *Proc. 42nd Int. ACM SIGIR Conf. Research and Development in Information Retrieval*, (2019), 165–174.
- [6] X. Yang, W. Yang, X. Wang, M. Gao, and L. Zhang, Spatio-Temporal Meta-Graph Learning for Recommendation on Heterogeneous Graphs, *IEEE Access*, 13 (2025).

# کاربرد مدل‌های بهینه‌یابی پویایی تصادفی در تعیین مسیر

## بهینه‌یابی قیمت سهام

یعقوب محمودیان<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه اقتصاد، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران  
 mahmodian@pnu.ac.ir

فاطمه قره باغی، فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مدیریت بازرگانی دانشگاه پیام نور مرکز کرمانشاه

**چکیده:** این مطالعه با هدف تعیین مسیر بهینه قیمت صنایع ترکیبی پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از مدل‌های بهینه‌یابی پویایی تصادفی انجام شده است. پژوهش حاضر از نظر هدف در حیطه تحقیقات کاربردی است. همچنین پژوهش حاضر بر اساس ماهیت و روش، یک پژوهش مبتنی بر مدل سازی عددی است که از لحاظ زمانی به شکل مقطعی در شرکت پتروشیمی زاگرس انجام شده است. با توجه به ماهیت ریاضی تحقیق و با عنایت به این که این تحقیق تنها در شرکت زاگرس انجام شده، روش نمونه گیری انجام نشده است. داده‌های آماری مرتبط با فرضیه‌های تحقیق با استفاده از روش سایت‌های مربوطه از صورت‌های مالی شرکت پتروشیمی زاگرس استخراج و با توجه به فرضیه‌های تحقیق، داده‌های متغیرها از اطلاعات بدست آمده محاسبه شده است. برای دستیابی به داده‌های مربوط به سایت‌های مرتبط برای استخراج قیمت سهام و همچنین داده‌های گزارش شده توسط اداره کل آمار ایران گردآوری شده است. به منظور محاسبه مسیر قیمتی سهام زاگرس این تحقیق با روش مدل‌های بهینه‌یابی پویایی تصادفی و استفاده از نرم افزار متلب انجام شده است. بر اساس یافته‌های تحقیق مسیر بهینه قیمت سهام زاگرس از طریق شبیه سازی بدست آمد.

**کلمات کلیدی:** بازار سهام، مسیر بهینه قیمت سهام، بهینه‌یابی پویایی تصادفی

### ۱. مقدمه

بازار سهام نقش مهمی را در اقتصاد کشورهای مختلف بازی می‌کند. در سالهای اخیر، بازار بورس و سهام در ایران از اهمیت بسیار زیادی برخوردار شده و بسیاری از افراد در این بازار سرمایه‌گذاری کرده‌اند. در این راستا، پیش بینی قیمت سهام یکی از عوامل موثر در تصمیم‌های سرمایه‌گذاری به شمار می‌رود (مشاری و همکاران، ۱۳۹۸). روشهای مختلفی برای پیش بینی قیمت سهام وجود دارد. در نظریه کنترل بهینه، مسئله بهینه‌یابی بجای دو متغیر، دارای سه نوع متغیر است. یعنی علاوه بر متغیر زمان  $t$  و متغیر وضعیت  $x(t)$  متغیر کنترل  $u(t)$  نیز مورد توجه قرار گرفته است. (هانسن<sup>۲</sup>، ۲۰۰۷).

مدل های بهینه یابی پویای تصادفی، یک روش شناسی مدرن از تحلیل اقتصاد کلان می‌باشد. این مدل ها با ویژگی پویایی قابلیت تحلیل تعادلی متغیرهای کلان اقتصادی را فراهم می‌سازند. این مدل ها در تلاش برای تبیین پدیده های اقتصاد کلان همچون رشد اقتصادی، چرخه های تجاری، اثرات سیاست های پولی و مالی بر روی متغیرهای

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

<sup>۲</sup> Hanson

کلان و رفاه خانوارها هستند. مدل هایی که بدور از جهت گیری های مکتبی اقتصاد کلان از ابزارهای نیرومند ریاضیاتی چون نظریه کنترل بهینه و برنامه ریزی پویا به منظور ارائه تحلیل پویا و تعادلی از یک اقتصاد بکارگرفته می شوند. ویژگی بسیار مهم این مدل ها این است که واکنش متغیرهای اساسی کلان اقتصادی را در مقابل تغییر پارامترهای سیاستی را می توانند نشان دهند (کوانگ، ۲۰۱۹).

پیش بینی قیمت سهام در بورس اوراق بهادار از اهمیت خاصی برخوردار است، زیرا نشان دهنده وضعیت کلی مطلوب یا نامطلوب سرمایه گذاری برای سهامداران و سرمایه گذاران است. به طور خاص شرکت های پتروشیمی یکی از مهمترین شرکتها در بازار سهام به شمار می روند. مدل های بهینه یابی پویای تصادفی از جمله روش های بسیار موثر برای پیش بینی قیمت سهام هستند؛ با این حال بررسی ادبیات داخلی نشان می دهد که تاکنون استفاده زیادی از این مدل ها در خصوص پیش بینی قیمت سهام شرکت های پتروشیمی نشده است و از این لحاظ یک شکاف تحقیقاتی وجود دارد. مطالعه حاضر با هدف برطرف کردن این شکاف تحقیقاتی انجام می شود.

## ۲. تصریح مدل پویای تصادفی تعیین مسیر بهینه قیمتی سهم زاگرس

با بررسی مدل های موجود در مورد مدل های تعیین قیمت ترکیبی و مبانی نظری مدل های تصادفی پویا، روش مورد استفاده مرتون (۲۰۰۸) در تعیین قیمت اختیارت در حالت سبد دارای سه دارایی، را مبنای تعیین مسیر قیمت قرار دادیم. این روش مورد استفاده مرتون نوع خاصی از روش کلی بلک شولز می باشد که مبنای محاسبات بسیاری از مطالعات مرتبط قرار گرفته است. مدلی که در ادامه به بیان آن می پردازیم تاکنون در ادبیات داخلی مطرح نشده و دارای نوآوری های مخصوص به خود می باشد به نحوی که قابلیت تبیین مسیر قیمتی سهام ترکیبی و صندوق های سرمایه گذاری را با حداکثر دقت داشته باشد.

### ۲-۱. تبیین مدل پیشنهادی مسیر قیمت ترکیبی سهام

**فرض اول:** با توجه به غیر معین بودن قیمت سهام مبین به عنوان تامین کننده مواد اولیه محصولات شرکت زاگرس در هر لحظه از زمان، تغییرات قیمت سهام مبین، از یک فرایند تصادفی تبعیت می کند. اگر  $Mo(t)$  قیمت سهم مبین باشد، می توانیم تغییرات آن را بصورت زیر بیان نماییم:

$$dMo(t)/Mo(t) = \mu_{Mo}(t)dt + \sigma_{Mo}(t)dw_{Mo}(t)$$

**فرض دوم:** اگر  $Er(t)$  نرخ ارز در هر لحظه از زمان باشد، می توانیم تغییرات آن را بصورت زیر بیان نماییم:

$$dEr(t)/Er(t) = \mu_{Er}(t)dt + \sigma_{Er}(t)dw_{Er}(t)$$

**فرض سوم:** بین نوسانات قیمت سهام مبین و نرخ ارز یعنی  $Mo(t)$  و  $Er(t)$  همبستگی وجود دارد اما تنها در زمان های یکسان، نه در زمانهای متفاوت. به بیان دیگر بین این دو، همبستگی سریالی<sup>۳</sup> وجود ندارد این فرض با فرضیه عمومی کارایی بازار فاما (۱۹۶۵) و ساموئلسون (۱۹۶۵) سازگاری دارد (مرتون، ۱۹۹۲: ۲۲۰).

**فرض چهارم:** قیمت سهام شرکت زاگرس  $Za(t)$  تابعی از قیمت سهام شرکت مبین  $Mo(t)$  و نرخ ارز  $Er(t)$  است. به نحوی که در زمان  $t$  برای قیمت سهام شرکت زاگرس داریم:

$$Za(t) = F(t, Mo(t), Er(t))$$

در نتیجه براساس دیفرانسیل گیری تصادفی کلی و قضیه ایتو خواهیم داشت:

$$dZa(t) = dF(t, Mo(t), Er(t))$$

$$= F_t dt + F_{Mo} dMo + F_{Er} dEr + \frac{1}{2} (F_{MoMo} (dMo)^2 + 2F_{MoEr} dMo dEr + F_{ErEr} (dEr)^2)$$

<sup>۳</sup> . serially correlation



در نتیجه فرم ژنومتریک فرایند براونی مسیر قیمتی سهام زاگرس  $Za(t)$  بصورت زیر می باشد:

$$dZa(t) = Za(t)(\mu_{Za}(t)dt + \sigma_{ZaMo}(t)dw_{Mo}(t) + \sigma_{ZaEr}(t)dw_{Er}(t))$$

در معادله دیفرانسیلی فوق ضرایب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \mu_{Za}(t) &= F_t + \mu_{Mo}MoF_{Mo} + \mu_{Er}ErF_{Er} + \frac{1}{2}(\sigma_{Mo}^2Mo^2F_{MoMo} + 2\rho_{MoEr}\sigma_{Mo}\sigma_{Er}MoErF_{MoEr} + \sigma_{Er}^2Er^2F_{ErEr}) \\ \sigma_{ZaMo}(t) &= \sigma_{Mo}MoF_{Mo} \\ \sigma_{ZaEr}(t) &= \sigma_{Er}ErF_{Er} \end{aligned}$$

فرض پنجم: براساس تخمین سنجی صورت گرفته، رابطه تابعی قیمت سهام زاگرس با قیمت سهام مبین و نرخ ارز بصورت زیر تعیین شده است:

$$Za = 4.1 * Mo + .17 * Er$$

## ۱-۲. معادلات نهایی دیفرانسیل تصادفی متغیرهای تحقیق

اکنون می توانیم با استفاده از این معادلات تبیین شده در بخش قبل، معادله نهایی دیفرانسیل تصادفی قیمت سهام زاگرس  $dZa(t)$  را بازنویسی نماییم.

$$\begin{aligned} dZa(t) &= (4.1\mu_{Mo}Mo + .17\mu_{Er}Er)dt + 4.1\sigma_{Mo}Modw_{Mo}(t) + .17\sigma_{Er}Er dw_{Er}(t) \\ dMo(t) &= \mu_{Mo}(t)Mo(t)dt + \sigma_{Mo}(t)Mo(t)dw_{Mo}(t) \\ dEr(t) &= \mu_{Er}(t)Er(t)dt + \sigma_{Er}(t)Er(t)dw_{Er}(t) \end{aligned}$$

با جایگذاری مقادیر پارامترهای محاسبه شده این روابط بصورت زیر قابل بیان هستند:

$$\begin{aligned} dZa(t) &= (.028579Mo + .00064Er)dt + .124Modw_{Mo}(t) + .003Er dw_{Er}(t) \\ dMo(t) &= .00697Mo(t)dt + .03026Mo(t)dw_{Mo}(t) \\ dEr(t) &= .00378Er(t)dt + .01786Er(t)dw_{Er}(t) \end{aligned}$$

## ۳- شبیه سازی معادله بهینه حرکت

به منظور بدست آوردن مسیر زمانی بهینه  $Za^*$  بصورت عددی می توان از روش شبیه سازی اولر- مارویاما<sup>۴</sup> استفاده نمود. اگر صورت کلی معادله دیفرانسیل تصادفی به شکل زیر را در نظر بگیریم:

$$dx = \alpha(t, y, z)dt + \sigma(t, y, z)dw$$

متغیر  $x$  به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(t_k, y_k, z_k)\Delta t + \sigma(t_k, y_k, z_k)\Delta w_k$$

با توجه به رابطه دیفرانسیلی قیمت سهام زاگرس  $dZa(t)$ ، رابطه فوق را می توان بصورت زیر بنویسیم:

$$Za_{k+1} = Za_k + \alpha(t_k, Mo_k, Er_k)\Delta t + \sigma_1(t_k, Mo_k, Er_k)\Delta w_k + \sigma_2(t_k, Mo_k, Er_k)\Delta w_k$$

که مقادیر معادل  $\alpha$ ،  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  و مسیر بهینه قیمت سهام زاگرس به شرح زیر خواهند بود:

$$\sigma_1 = .124Mo \quad \alpha = (.028579Mo + .00064Er) \quad \sigma_2 = .003Er$$

در نتیجه مسیر بهینه قیمت سهام زاگرس بصورت زیر خواهد بود:

$$dZa(t) = (.028579Mo + .00064Er)dt + .124Modw_{Mo}(t) + .003Er dw_{Er}(t)$$

تمام شبیه سازی های انجام شده در تحقیق با استفاده از نرم افزار Matlab صورت گرفته است که کد آن جهت استفاده محققان در پیوست ۱ آمده است.

<sup>۴</sup> . Euler-Maruyama (EM) Simulations method



### ۳-۱. مسیر زمانی بهینه تصادفی قیمت سهام زاگرس



این مسیر زمانی هم در طول یک دوره ۸ ماهه و با ترکیب  $4096$  نقطه تصادفی استخراج شده است.

### ۴. نتیجه‌گیری

در این تحقیق مدل جدیدی برای تعیین مسیر بهینه قیمت صنایع ترکیبی در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از مدل‌های بهینه‌یابی پویایی تصادفی ارائه شده است. همانطور که قابل ملاحظه است قیمت بهینه سهام زاگرس در انتهای دوره حدود ۸۶ هزار ریال باشد که با عدد محقق شده حدود ۱۹۰ هزار ریال فاصله زیادی دارد و این نشان از رشد غیر طبیعی و غیر معمول قیمت این سهم دارد که بدلیل تاثیر عوامل غیر اقتصادی در آن رخ داده است.

### منابع

ابتدا منابع فارسی قید شود بعد منابع لاتین:

- ۱- مشاری، محمد، حسین دیده‌خانی، کاوه خلیلی دامغانی، ابراهیم عباسی. ۱۳۹۸. طراحی مدل هوشمند ترکیبی جهت پیش‌بینی نقاط طلایی قیمت سهام. دانش سرمایه‌گذاری. ۶۵-۴
۲. Göçken, M., Özçalıcı, M., Boru, A., & Dosdoğru, A. T. (۲۰۱۹). Stock price prediction using hybrid soft computing models incorporating parameter tuning and input variable selection. *Neural Computing and Applications*, ۳۱(۲), ۵۷۷-۵۹۲.
۳. Hanson, F. B. (۲۰۰۷). *Applied stochastic processes and control for jump-diffusions: modeling, analysis and computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
۴. Sedighi, M., Jahangirnia, H., Gharakhani, M., & Farahani Fard, S. (۲۰۱۹). A Novel Hybrid Model for Stock Price Forecasting Based on Metaheuristics and Support Vector Machine. *Data*, ۴(۲), ۷۵.
۵. Sharma, A., Bhuriya, D., & Singh, U. (۲۰۱۷, April). Survey of stock market prediction using machine learning approach. In *۲۰۱۷ International conference of Electronics, Communication and Aerospace Technology (ICECA)* (Vol. ۲, pp. ۵۰۶-۵۰۹). IEEE.
۶. Yadav, A., Jha, C. K., & Sharan, A. (۲۰۲۰). Optimizing LSTM for time series prediction in Indian stock market. *Procedia Computer Science*, ۱۶۷, ۲۰۹۱-۲۱۰۰.



## پیوست ۱: کد متلب مسیر زمانی قیمت بهینه تصادفی سهام شرکت زاگرس

```
randn('state',5)
>> m0 = 10115; e0 = 113460; z0 = 75396; t0 = 0; tf = 8; Nt = 2^12; DT = tf/Nt; sqrtt =
sqrt(DT);
>> Mo(1) = m0; Er(1) = e0; Za(1) = z0; t = [t0:DT:tf];
>> DW1 = randn(1,Nt)*sqrtt; % Simulate DW1 as sqrt(DT)*randn;
>> W1 = cumsum(DW1); % Omits initial zero value;
>> DW2 = randn(1,Nt)*sqrtt; % Simulate DW2 as sqrt(DT)*randn;
>> W2 = cumsum(DW2); % Omits initial zero value;
>> L = 2^2; NL = Nt/L; KL = [0:L:Nt]; DTL = L*DT; tL = [t0:DTL:tf];
>> for k = 1:NL % Euler formula to lumped, coarse precision:
DWL1 = sum(DW1(1,KL(k)+1:KL(k+1)));
DWL2 = sum(DW2(1,KL(k)+1:KL(k+1)));
Mo(k+1)=Mo(k)+.00697*Mo(k)*DTL+.03026*Mo(k)*DWL1;
Er(k+1)=Er(k)+.00378*Er(k)*DTL+.01786*Er(k)*DWL2;
Za(k+1)=Za(k)+(.028079*Mo(k)+.00064*Er(k))*DTL+.124*Mo(k)*DWL1+.003*Er(k)*DW
L2;
end
plot(tL,Za,'r'); hold on
title('Optimal amount of Zagros price');
xlabel('t,Time'); ylabel('Za');
grid
legend('Mo: (zagros price)', 'location','best')
```

# تحلیل کمی ریخت‌شناسی فرکتالی آنالسیم‌های ثانویه در سنگ‌های آذرین شمال اردبیل با استفاده از پردازش تصویر

محمد فدائیان<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه زمین‌شناسی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران،

ایران [m\\_fadaeyan@pnu.ac.ir](mailto:m_fadaeyan@pnu.ac.ir)

## چکیده:

آنالسیم یک کانی آلومینوسیلیکات سدیم آبدار در سنگ‌های آذرین قلیایی منطقه شمال اردبیل شمال غرب ایران، به صورت درشت بلور دیده می‌شود. بررسی شیمی کانی و بافت‌شناسی نشان می‌دهد که آنالسیم‌ها منشأ ثانویه داشته و اغلب در نتیجه فرایند جایگزینی سدیم به جای پتاسیم در کانی لوسیت اولیه در فاز ماگمایی متأخر یا گرمابی با دمای پایین، تشکیل شده‌اند. این جایگزینی، منجر به ایجاد ساختارهای بافتی پیچیده، شامل شکستگی‌های حجمی، مرزهای نامنظم، و گاهی ساختار ساعت شنی، در بلورهای آنالسیم شده است. در این پژوهش، از تحلیل کمی ریخت‌شناسی فرکتالی به همراه پردازش تصویر، به منظور اندازه‌گیری میزان پیچیدگی مورفولوژیکی بعد فرکتالی، مرزها و ساختارهای داخلی بلورهای آنالسیم استفاده شد. تصاویر میکروسکوپی بلورهای آنالسیم، به منظور استخراج مرزهای بلوری و سطوح زونینگ داخلی، تحت فرایند بخش‌بندی و دودویی‌سازی قرار گرفتند. نتایج حاصل از اندازه‌گیری  $D_f$  با روش جعبه‌شماری نشان داد که مرزهای بلورهای آنالسیم دارای بعد فرکتالی بالایی هستند که به طور کمی، نظم پایین‌ینو پیچیدگی بالای شکل بلور را تأیید می‌کند. این مقادیر بالا به عنوان امضای ریخت‌شناسی فرآیندهای واکنشی-جایگزینی تفسیر می‌شوند و فرضیه منشأ ثانویه آنالسیم از دگرسانی لوسیت را که بر اساس شواهد بافت‌شناسی و شیمیایی را با ابزار کمی تقویت می‌نماید.

کلمات کلیدی: آنالسیم، ریخت‌شناسی فرکتالی، بُعد فرکتالی.

## ۱. مقدمه

آنالسیم ( $\text{NaAlSi}_2\text{O}_6 \cdot \text{H}_2\text{O}$ ) یکی از کانی‌های مهم گروه زئولیت‌ها و نیز فلدسپاتوئیدها است که منشأ آن همواره در سنگ‌های آذرین قلیایی موضوع بحث بوده است (O'Brien et al., 1988; Luher & Kyser, 1989; Yücel et al., 2014). منشأ آن می‌تواند اولیه (تبلور مستقیم از ماگما) یا ثانویه (تبدیل کانی‌های اولیه مانند لوسیت یا نفوذ گرمابی).

<sup>۱</sup> . محمد فدائیان

در شیشه‌های آتشفشانی) باشد (Luher & Kyser, 1989). بررسی‌های پتروگرافی نشان داده است که بلورهای آنالسیم در این سنگ‌ها عمدتاً به صورت بلورهای درشت ۱ تا ۳ سانتی‌متر، شکل‌دار تا نیمه‌شکل‌دار با بافت‌های پیچیده مشاهده می‌شوند. شواهد شیمیایی و بافت‌شناسی قویاً منشأ ثانویه آنالسیم را از طریق دگرسانی لوسیت اولیه در فاز ماگمایی متأخر و شرایط ساب-سالدوس تأیید می‌کنند. توصیفات پتروگرافی سنتی، اساساً کیفی هستند. با این حال، شکل کانی‌ها، به ویژه در فرآیندهای پیچیده واکنشی-جایگزینی، حاوی اطلاعات کمی ارزشمندی درباره فرآیندهای رشد و انحلال است. هندسه فرکتالی و بُعد فرکتالی ( $D_f$ )، ابزاری قدرتمند برای کمی‌سازی میزان بی‌نظمی و پیچیدگی اشکال طبیعی هستند. انتظار می‌رود بلورهایی که طی فرآیندهای سریع یا پیچیده جایگزینی تشکیل شده‌اند، دارای مرزهای بلوری با  $D_f$  بالاتری نسبت به بلورهای ایده‌آل و اولیه (Euhedral) باشند. هدف اصلی این تحقیق، کمی‌سازی پیچیدگی ریخت‌شناسی آنالسیم‌های منطقه اردبیل با استفاده از بُعد فرکتالی است. ارائه شواهد کمی برای تأیید فرضیه منشأ ثانویه (جایگزینی لوسیت) آنالسیم‌ها در این منطقه، از طریق ارتباط  $D_f$  بالا با بافت‌های واکنشی-جایگزینی. توصیفات پتروگرافی سنتی، اساساً کیفی هستند. با این حال، شکل (مورفولوژی) کانی‌ها، به ویژه در فرآیندهای پیچیده واکنشی-جایگزینی، حاوی اطلاعات کمی ارزشمندی درباره سرعت‌های رشد، انحلال و میزان تفاوت انرژی سطحی در مراحل مختلف تبلور است. (شکل ۱)

## روش تحقیق

نمونه‌ها از سنگ‌های تفریتی، فونولیتی و آنالسیم تفریت حاوی بلورهای درشت آنالسیم منطقه اردبیل انتخاب شدند. مقاطع نازک به منظور بررسی پتروگرافی، مطابق با روش‌های استاندارد تهیه شدند. از بلورهای آنالسیم دارای بافت‌های پیچیده (زونینگ، مرزهای نامنظم، شکستگی) در زیر میکروسکوپ پولاریزان (XPL/PPL) عکس‌های با وضوح بالا تهیه شد. تصاویر دیجیتال به منظور استخراج مرز بلور و سطوح داخلی (مانند مرزهای زونینگ) در نرم‌افزارهای پردازش تصویر (مانند ImageJ یا متلب) تحت فرآیندهای زیر قرار گرفتند: پیش‌پردازش (Pre-processing)، بخش‌بندی (Segmentation)، دودویی‌سازی (Binarization)، استخراج مرز (Edge Detection)

## ۲. نتایج اصلی

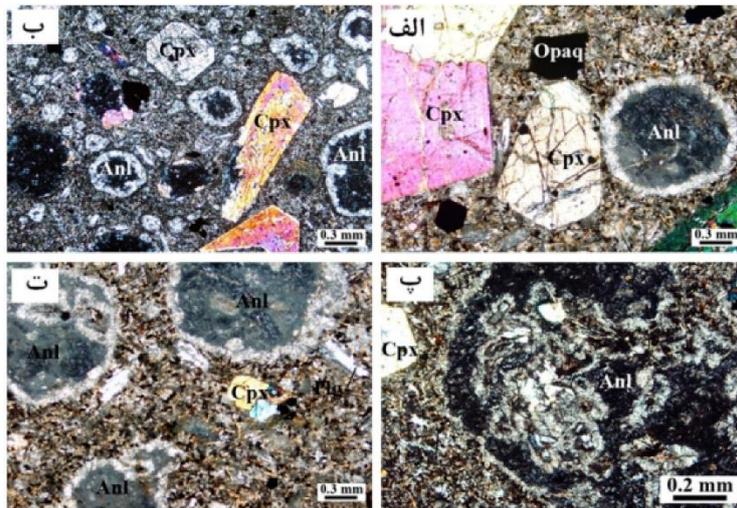
### ۲-۳. محاسبه بُعد فرکتالی

بعد فرکتالی با استفاده از روش جعبه‌شماری (Box-Counting Method) محاسبه شد. در این روش، تصویر مرز استخراج شده با شبکه‌ای از جعبه‌های هم‌اندازه با مقیاس‌های متفاوت ( $r$ ) پوشانده می‌شود. بعد فرکتالی از طریق شیب خط رگرسیون نمودار لگاریتمی تعداد جعبه‌های غیر تهی ( $N(r)$ ) بر حسب لگاریتم مقیاس جعبه‌ها ( $r$ ) به دست می‌آید:

$$D_f = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)}$$

### ۲-۴. پیچیدگی مورفولوژیکی بلورها

مقادیر بُعد فرکتالی مرزهای خارجی آنالسیم‌های منطقه اردبیل (به ویژه در سنگ‌های تفریت آنالسیم‌دار) در گستره داده‌های واقعی محاسبه شد. این مقادیر به طور قابل ملاحظه‌ای بالاتر از بُعد فرکتالی اشکال ایده‌آل هندسی و بلورهای کاملاً یوهدرال (نزدیک به ۱/۰ - ۱/۱) هستند که نشان‌دهنده تبلور در شرایط عدم تعادل یا جایگزینی است.



شکل ۱- بلورهای آنالسیم حاصل جانشینی کانی لوسیت

### ۳-۴. ارتباط ( $D_f$ ) با بافت‌های جایگزینی

بالاترین مقادیر ( $D_f$ ) مربوط به مرز بلورها و ساختارهای داخلی آنالسیم‌هایی بود که به وضوح آثار شکستگی‌های عرضی، زونینگ نامنظم و میانبرهای باقی‌مانده لوسیت را نشان می‌دادند. این پیچیدگی کمی، بازتاب‌دهنده نامنظمی سطح واکنش و عدم تعادل در حین فرآیند آنالسیمی شدن (جایگزینی لوسیت:  $Na-Anl \rightarrow K-Lct$ ) است که با افزایش حجم (حدود ۱۰ درصد) همراه بوده و منجر به ایجاد شکستگی و مرزهای واکنشی شده است (Putnis et al., 2007; Prelević et al., 2004).

### ۴. نتیجه‌گیری

تحلیل کمی ریخت‌شناسی با استفاده از بُعد فرکتالی، یک ابزار قدرتمند برای تمایز فرآیندهای تبلور است. مقادیر بالای  $D_f$  در آنالسیم‌های شمال اردبیل، به طور کمی، فرضیه منشأ ثانویه این کانی‌ها را که بر اساس داده‌های پتروگرافی و شیمیایی به ویژه نسبت‌های K/Na پایین و شباهت به آنالسیم‌های نوع S و H را تقویت می‌کند (Luher & Kyser, 2014). اشکال پیچیده و مرزهای فرکتالی، ویژگی بارز بلورهایی هستند که تحت کنترل فرآیندهای جایگزینی فاز جامد-جامد و برهم‌کنش مایع-جامد با سیالات سدیم‌دار، در دماهای پایین (ساب-سالیدوس) تشکیل می‌شوند. پیوند شیمیایی و مورفولوژی: پیچیدگی ریخت‌شناسی  $D_f$  با پیچیدگی شیمیایی نمودار خطی زونینگ Na-K (شکل ۱۰) و عدم تقارن بلوری (همبستگی دارد. این نشان می‌دهد که فازهای واکنشی مانند حاشیه بلور که از لوسیت اولیه-K دار به آنالسیم-Na دار تبدیل شده (دارای بالاترین بُعد فرکتالی هستند، چرا که محل اصلی وقوع فرآیندهای پیچیده انحلال و تبلور مجدد ناهمگن بوده‌اند. در نتیجه، کاربرد موفقیت‌آمیز تحلیل فرکتالی در این پژوهش، روشی کمی برای تفسیر فرآیندهای کانی‌سازی در زمینه‌هایی است که شواهد سنتی (پتروگرافی و شیمی کانی) صرفاً به صورت کیفی، دلالت بر منشأ ثانویه دارند. این رویکرد، در مطالعات بعدی بر روی سایر کانی‌های فلدسپاتوئیدی جایگزین شده، مانند نفلین یا سودالیت، می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.



## منابع

- Luher, J. F., & Kyser, T. K. (1989). Primary igneous analcime: The Colima minettes. *American Mineralogist*, 74(1-2), 216-223.
- Luth, R. W., & Bowerman, M. (2004). Microtextural and powder-diffraction study of analcime phenocrysts in volcanic rocks of the Crowsnest Formation, southern Alberta, Canada. *The Canadian Mineralogist*, 42(3), 897-903.
- Moradian, A. (2008). A contribution to the genesis of analcime after leucite in potassic volcanic rocks of the Nadik area, Kerman, Iran. *Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran*, 19(1), 31-48.
- Nezafati, N. (2006). *Au-Sn-W-Cu-Mineralization in the Astaneh-Sarband Area, West Central Iran: including a comparison of the ores with ancient bronze artifacts from Western Asia* (PhD dissertation). Universität Tübingen.
- Passaglia, E., & Sheppard, R. A. (2001). The crystal chemistry of zeolites. *Reviews in mineralogy and geochemistry*, 45(1), 69-116.
- Prelević, D., Foley, S. F., Cvetković, V., & Romer, R. L. (2004). The analcime problem and its impact on the geochemistry of ultrapotassic rocks from Serbia. *Mineralogical Magazine*, 68(4), 633-648.
- Putnis, C. V., Geisler, T., Schmid-Beurmann, P., Stephan, T., & Giampaolo, C. (2007). An experimental study of the replacement of leucite by analcime. *American Mineralogist*, 92(1), 19-26.



## ارزیابی کارایی فرایندهای پروفایلی خطی ساده با استفاده از شاخص کارایی تابعی بر مبنای منطق فازی

روشنک زمان\* عضو هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۶-۳۶۹۷، تهران، ایران

rzaman@pnu.ac.ir

زینب عباسی گنجی، مرکز تحقیقات و آموزش کشاورزی و منابع طبیعی خراسان رضوی، سازمان تحقیقات، آموزش و ترویج، مشهد، ایران

z.ganji@areeo.ac.ir

(استادیار، فارغ التحصیل دکتری)

چکیده: کیفیت فرایندهایی که براساس رابطه بین متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل تعریف می‌شود، پروفایل نام دارد. اگر این رابطه به صورت تابع خطی از یک متغیر مستقل باشد، پروفایل خطی ساده نامیده می‌شود. در این پژوهش، با استفاده از منطق فازی یک شاخص کارایی تابعی برای پروفایل‌های خطی ساده پیشنهاد می‌شود و با کمک مثال، عملکرد آن نسبت به برخی شاخص‌های تابعی موجود مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهد که شاخص جدید در بیان کارایی فرایند بهتر از شاخص‌های موجود عمل می‌کند. کلمات کلیدی: شاخص‌های کارایی تابعی، اعداد فازی، پروفایل خطی ساده

### ۱ مقدمه

شاخص‌های کارایی فرایند معیارهای عددی هستند که میزان انطباق محصولات را با مشخصات ازپیش‌تعیین‌شده توسط تولیدکننده یا مصرف‌کننده نشان می‌دهند. در برخی فرایندها، کیفیت محصول یا فرایند از طریق یک رابطه تابعی بین متغیر پاسخ (وابسته) و یک یا چند متغیر مستقل (توضیحی) تعریف می‌شود. این رابطه تابعی، پروفایل نام دارد. پروفایل‌ها را می‌توان بر اساس توابع مختلف، اعم از خطی و غیرخطی، تعریف نمود. تاکنون تمرکز اصلی تحقیقات انجام‌شده در این حوزه، بر روی پروفایل خطی ساده بوده است که در آن یک متغیر پاسخ به صورت خطی به یک متغیر مستقل وابسته است.

در زمینه شاخص‌های کارایی برای پروفایل خطی ساده مطالعاتی صورت گرفته است که از آن جمله می‌توان به تحقیقات [۵]، [۳] و [۴] اشاره نمود. نعمتی کشتلی و همکاران [۶] با معرفی دو شاخص کارایی با رویکرد تابعی، گامی نوین در اندازه‌گیری کارایی پروفایل خطی ساده برداشتند. شاخص‌های پیشنهادی آنان از تمام دامنه متغیر مستقل، از کمترین تا بیشترین مقدار، با به‌کارگیری مفهوم انتگرال بهره می‌برد. در ادامه، پاکزاد و همکاران [۸] با تعمیم این دو شاخص، دو شاخص کارایی جدید مبتنی بر منطق فازی ارائه نمودند. این مقاله با الهام از پژوهش اخیر، به معرفی یک شاخص کارایی تابعی می‌پردازد. در ادامه، شاخص‌های کارایی تابعی موجود معرفی خواهند شد. در بخش سوم،



یک شاخص کارایی تابعی جدید بر مبنای منطق فازی معرفی می‌شود. در بخش چهارم، کاربرد عملی شاخص جدید بر روی یک مجموعه داده واقعی ارائه می‌شود و سرانجام، در بخش پایانی نتایج آمده است.

## ۲ شاخص‌های کارایی تابعی موجود برای پروفایل خطی ساده

در این بخش، به معرفی شاخص‌های کارایی تابعی موجود برای پروفایل خطی ساده می‌پردازیم. فرض بر این است که کیفیت محصولات یک فرایند، بر اساس یک رابطه‌ی خطی ساده بین متغیر پاسخ (وابسته) و متغیر مستقل (توضیحی) مدل‌سازی می‌شود. بنابراین، ارتباط بین این دو متغیر مشابه مدل رگرسیون خطی ساده در نظر گرفته می‌شود.

متغیر مستقل  $X$  در  $k$  سطح ثابت  $x_1, x_2, \dots, x_k$  اندازه‌گیری می‌شود. در هر سطح  $x_i$  از متغیر مستقل، یک نمونه‌ی تصادفی به حجم  $n$  جمع‌آوری شده و مقدار متغیر وابسته  $Y$  ثبت می‌گردد. به بیان دیگر، برای هر سطح  $i$  (که شرایط تحت کنترل آماری، رابطه‌ی بین متغیرها به صورت زیر مدل می‌شود:

$$Y_{ij} = A_0 + A_1 X_i + \epsilon_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

که در آن  $\epsilon_{ij}$  جمله‌های خطای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$  هستند.  $A_0$  و  $A_1$  پارامترهای مدل (به ترتیب عرض از مبدأ و شیب) هستند که بر اساس داده‌های نمونه برآورد می‌شوند. پارامترهای مدل برای فرایند تحت کنترل، با استفاده از روابط استاندارد برآورد می‌شوند. برآوردگر  $\hat{A}_0$  و  $\hat{A}_1$  به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\hat{A}_0 = a_0 = \frac{\sum_{j=1}^n a_{0,j}}{n}, \quad \hat{A}_1 = a_1 = \frac{\sum_{j=1}^n a_{1,j}}{n}, \quad (2)$$

که در آن  $S_{xx} = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$  و  $\bar{y}_{.j} = \frac{\sum_{i=1}^k y_{ij}}{k}$ ،  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k}$ ،  $S_{xy(j)} = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})y_{ij}$  و  $a_{0,j} = \bar{y}_{.j} - a_{1j}\bar{x}$ ،  $a_{1,j} = \frac{S_{xy(j)}}{S_{xx}}$ ،  $\hat{Y}_{ij} = a_{0,j} + a_{1,j}x_i$  بنابراین، مقدار برآورد شده‌ی متغیر پاسخ در سطح  $x_i$  برای نمونه‌ی  $j$ ام به صورت  $\hat{Y}_{ij} = a_{0,j} + a_{1,j}x_i$  خواهد بود. برآورد واریانس خطا ( $\sigma^2$ ) نیز از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\sigma}^2 = MSE = \frac{\sum_{j=1}^n MSE_j}{n}, \quad (3)$$

که در آن  $MSE_j = \frac{\sum_{i=1}^k e_{ij}^2}{k-2}$  و  $e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij}$  باقیمانده‌های زامین نمونه هستند. برای اطلاعات بیشتر به [۱] و [۲] رجوع شود. پاکزاد و همکاران [۸] با توسعه‌ی رویکرد تابعی، دو شاخص کارایی معرفی کردند که در این پژوهش یک شاخص مد نظر ماست و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{pm}(profile) = \begin{cases} \frac{\int_{x_1}^{x_k} [USL_Y(X) - LSL_Y(X)] dX}{\int_{x_1}^{x_k} \sqrt{\sigma^2 + (\mu_Y(X) - T_Y(X))^2} dX}, & T_Y(X) = M_Y(X), \\ \frac{\int_{x_1}^{x_k} d^*(X) dX}{\int_{x_1}^{x_k} \sqrt{\sigma^2 + (\mu_Y(X) - T_Y(X))^2} dX}, & T_Y(X) \neq M_Y(X), \end{cases} \quad (4)$$

که در آن  $M_Y(X) = \frac{LSL_Y(X) + USL_Y(X)}{2}$ ،  $d_Y^*(X) = \min \{ (T_Y(X) - LSL_Y(X)), (USL_Y(X) - T_Y(X)) \}$

## ۳ شاخص کارایی تابعی جدید مبتنی بر منطق فازی

همان‌طور که در بخش قبل اشاره شد، شاخص‌های موجود از تمام مقادیر متغیر مستقل در بازه‌ی  $[x_1, x_k]$  با وزن یکسان استفاده می‌کنند. این در حالی است که در دنیای واقعی، اندازه‌گیری‌ها همواره با عدم قطعیت همراه هستند. به‌ویژه زمانی که مقادیر متغیر مستقل به صورت «تقریباً  $x_1$ »، «تقریباً  $x_2$ » و ... بیان می‌شوند، استفاده از اعداد قطعی نمی‌تواند



این ابهام ذاتی را مدل سازی کند. ایده‌ی اصلی در تعریف شاخص جدید، در نظر گرفتن ماهیت فازی مقادیر متغیر مستقل است. در این رویکرد، به جای اختصاص وزن یکسان به تمام نقاط در بازه‌ی  $[x_1, x_k]$ ، به هر مقدار از این متغیر، وزنی متناسب با درجه عضویت آن در مجموعه‌ی فازی سطوح اندازه‌گیری اختصاص داده می‌شود. این کار منجر به مدل سازی واقعی‌تر و در نتیجه، برآورد دقیق‌تر کارایی فرایند می‌گردد. در این مقاله، مقادیر متغیر مستقل  $X$  در  $k$  سطح مربوط به سطوح متغیر مستقل، ابتدا پارامترهای  $a_i$  و  $b_i$  برای  $i = 2, 3, \dots, k-1$  به صورت  $a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$ ،  $b_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$  محاسبه می‌شوند. سپس، توابع عضویت برای سطوح مختلف به شرح زیر تعریف می‌گردند:

$$\tilde{x}_1(x) = \begin{cases} \frac{x_1 + b_1 - x}{b_1}, & x_1 \leq x < x_1 + b_1, \\ 0, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \quad \tilde{x}_k(x) = \begin{cases} \frac{x - x_k + a_k}{a_k}, & x_k - a_k < x \leq x_k, \\ 0, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \quad (5)$$

اعداد فازی سایر سطوح به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{x}_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_i + a_i}{a_i}, & x_i - a_i \leq x < x_i, \\ \frac{x_i + b_i - x}{b_i}, & x_i \leq x < x_i + b_i, \\ 0, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \quad (6)$$

با الهام از شاخص ارائه شده در رابطه (۴) و با جایگزینی انتگرال‌گیری ساده با انتگرال‌گیری وزن دار بر اساس توابع عضویت فازی، شاخص کارایی تابعی جدید به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{pm,g}(profile) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^k \int \tilde{x}_i(x) [USL_Y(x) - LSL_Y(x)] dx}{\sum_{i=1}^k \int \tilde{x}_i(x) \sqrt{\sigma^2 + (\mu_Y(x) - T_Y(x))^2} dx}, & T_Y(x) = M_Y(x), \\ \frac{\sum_{i=1}^k \int \tilde{x}_i(x) d^*(x) dx}{\sum_{i=1}^k \int \tilde{x}_i(x) \sqrt{\sigma^2 + (\mu_Y(x) - T_Y(x))^2} dx}, & T_Y(x) \neq M_Y(x), \end{cases} \quad (7)$$

پس از جمع‌آوری نمونه‌ی تصادفی از فرایند تحت کنترل، ابتدا کلیه پارامترهای مدل و توابع عضویت فازی برآورد می‌شوند. سپس مقدار عددی شاخص جدید  $C_{pm,g}$  محاسبه می‌گردد. این شاخص‌ها بر خلاف مقادیر فازی، اعدادی حقیقی هستند که امکان مقایسه و تصمیم‌گیری مستقیم را فراهم می‌کنند. مبنای قضاوت در مورد کارایی فرایند، مشابه شاخص‌های مرسوم، مقایسه‌ی مقدار شاخص با عدد ۱ است. اگر مقدار شاخص محاسبه شده بیشتر از ۱ باشد، فرایند کارا است. استفاده از این شاخص جدید، با در نظر گرفتن عدم قطعیت ذاتی در اندازه‌گیری سطوح متغیر مستقل، منجر به ارزیابی واقع‌بینانه‌تر و قوی‌تری از عملکرد فرایند می‌شود.

#### ۴ مثال واقعی

در این بخش، برای نمایش کاربردی شاخص پیشنهادی، از داده‌های مربوط به پژوهش شی و همکاران [۷] استفاده می‌شود. مورد مطالعه، بررسی عملکرد فنر بر اساس رابطه‌ی بین کشش و طول آن است. مطابق قانون هوک<sup>۱</sup>، هنگامی که یک فنر در حالت تعادل قرار می‌گیرد، رابطه‌ی بین کشش اعمال شده و تغییرات طول آن از یک پروفایل خطی ساده تبعیت می‌کند. بنابراین، در راستای بهبود کیفیت و کنترل فرایند تولید، پایش کشش فنر در طول‌های مختلف از اهمیت بالایی برخوردار است. داده‌های مربوط به اندازه‌گیری کشش ۹ فنر مختلف (بر حسب نیوتن) در طول‌های مشخص ۱۱، ۱۲/۵، ۱۳/۵، ۱۵، ۱۶ و ۱۷ سانتی‌متر، در جدول ۱ ارائه شده است. همچنین، حدود مشخصات فنی (کران بالا و پایین) برای کشش فنر در هر یک از این سطوح طولی، در جدول ۲ درج گردیده است. به منظور اطمینان از برقراری مفروضات مدل، آزمون نرمال اندرسون-دارلینگ بر روی خطاها انجام شد. مقدار آماره این آزمون ۰/۷۸۷



محاسبه گردید که با توجه به سطح معناداری، دلیلی برای رد فرض نرمال بودن خطاها وجود ندارد. با به کارگیری روش کمترین مربعات، واریانس خطای مدل  $\sigma^2 = 0.00019637$  برآورد شد. معادله خط پروفایل برازش شده به صورت  $Y_{ij} = 5.2340 - 0.2952X_i + \epsilon_{ij}$  حاصل گردید. همچنین، معادلات خطی حدود مشخصات فنی بالا و پایین و نیز هدف تابعی، به ترتیب برابر  $LSL_Y(X) = 5.5773 - 0.13223X$ ،  $USL_Y(X) = 4.8190 - 0.2464X$ ،  $T_Y(X) = 5.1784 - 0.2843X$  به دست آمدند. نمودار این خطوط در شکل ۱ نشان داده شده است. طول‌های فنر در اندازه‌های تقریباً ۱۱، تقریباً ۱۲.۵، تقریباً ۱۳.۵، تقریباً ۱۵، تقریباً ۱۶ و تقریباً ۱۷ سانتی‌متر با توابع عضویت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

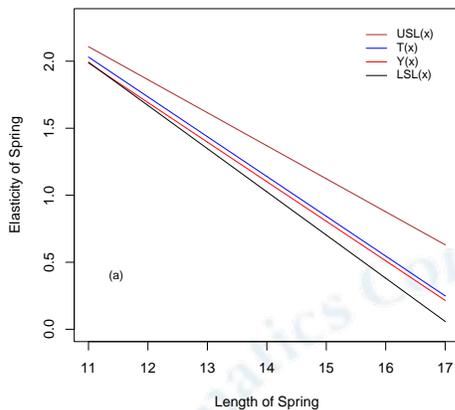
$$\tilde{x}_1(x) = \begin{cases} \frac{11.10-x}{0.10}, & 11 \leq x < 11.10, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \tilde{x}_2(x) = \begin{cases} \frac{x-16.90}{0.10}, & 16.90 < x \leq 17, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \tilde{x}_3(x) = \begin{cases} \frac{x-11.90}{0.10}, & 11.90 \leq x < 12, \\ \frac{13-x}{1.0}, & 12 \leq x < 13, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$\tilde{x}_4(x) = \begin{cases} \frac{x-12}{0.10}, & 12 \leq x < 12.10, \\ \frac{15.10-x}{3.0}, & 12.10 \leq x < 15.10, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \tilde{x}_5(x) = \begin{cases} \frac{x-12.90}{2.10}, & 12.90 \leq x < 15, \\ \frac{15.10-x}{0.10}, & 15 \leq x < 15.10, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \tilde{x}_6(x) = \begin{cases} \frac{x-15.90}{0.10}, & 15.90 \leq x < 16, \\ \frac{16.10-x}{0.10}, & 16 \leq x < 16.10, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین، مقدار برآورد شده شاخص کارایی تابعی جدید برابر  $\tilde{C}_{pm.g}(profile) = 0.6548$  به دست آمد. بر اساس این شاخص نتیجه می‌شود که فرایند ناکارا است.

جدول ۱: میزان کشش فنر (نیوتن) در طول‌های مختلف

| نمونه | کشش فنر در طول‌های مختلف (سانتی‌متر) |         |        |        |        |        |
|-------|--------------------------------------|---------|--------|--------|--------|--------|
|       | ۱۷                                   | ۱۶      | ۱۵     | ۵.۱۳   | ۵.۱۲   | ۱۱     |
| ۱     | ۷/۲۶۷                                | ۱/۶۶۷   | ۳/۱۶۳۳ | ۸/۶۰۰  | ۰/۵۰۰۷ | ۲/۴۶۷  |
| ۲     | ۰/۲۵۳۳                               | ۱/۵۷۶۷  | ۲/۱۴۶۷ | ۷/۰۶۷  | ٪۴۰۹   | ٪۰۱۲   |
| ۳     | ۹/۱۵۶۷                               | ۱/۵۰۰۳  | ۳/۳۳۳۲ | ٪۰۱۸   | ٪۵۳۶۷  | ۲/۰۶۰۰ |
| ۴     | ۰/۲۴۰۴                               | ۱/۵۶۳۳  | ۲/۱۶۰۰ | ٪۰۹۷   | ٪۴۰۸   | ٪۰۹۱   |
| ۵     | ٪۰۳۸                                 | ۱/۴۴۴۶۷ | ٪۰۰۲   | ٪۰۰۸   | ٪۵۵۶۷  | ٪۰۸۲   |
| ۶     | ۷/۹۱۶۷                               | ۱/۵۰۰۳  | ۲/۲۱۶۷ | ۷/۰۶۳۳ | ٪۴۶۶۷  | ۳/۳۳۸۱ |
| ۷     | ۹/۰۲۶۷                               | ۱/۶۳۳۳  | ۳/۳۳۳۳ | ۲/۸۰۰  | ٪۵۳۶۷  | ۲/۰۴۶۷ |
| ۸     | ٪۰۹۹                                 | ۱/۵۰۰۳  | ٪۰۲۲   | ۷/۰۴۳۳ | ٪۴۰۶۷  | ۱/۰۴۳۳ |
| ۹     | ۹/۷۱۶۷                               | ۱/۴۰۰۱  | ۳/۳۳۸۱ | ۳/۳۳۸۷ | ٪۵۳۶۷  | ۲/۰۶۰۰ |



شکل ۱: نمودار خطوط مشخصات فنی و هدف تابعی و پروفایل در فرایند مربوط به فنر

جدول ۲: حدود مشخصات فنی کشش فنر در هر سطح

| شماره سطح (i) | طول فنر (x <sub>i</sub> ) (سانتی متر) | USL <sub>i</sub> | LSL <sub>i</sub> |
|---------------|---------------------------------------|------------------|------------------|
| ۱             | ۱۱                                    | ۰.۶۲۰۳۰          | ۱/۳۲۹۹           |
| ۲             | ۱۲/۵                                  | ۰.۶۶۰۳۰          | ۱/۱۵۹۸           |
| ۳             | ۱۳/۵                                  | ۰.۹۳۷۰           | ۱/۱۴۲۹           |
| ۴             | ۱۵                                    | ۰.۸۰۱۰           | ۱/۲۶۶            |
| ۵             | ۱۶                                    | ۰.۸۰۱۰           | ۱/۲۶۷            |
| ۶             | ۱۷                                    | ۰.۸۰۱۰           | ۱/۲۶۶            |

## ۵ نتایج

در این مقاله، شاخص کارایی تابعی جدید برای پروفایل خطی ساده مبتنی بر منطق فازی ارائه شد. رویکرد پیشنهادی با در نظر گرفتن ماهیت فازی مقادیر متغیر مستقل و اختصاص وزنهای متفاوت بر اساس درجه عضویت، ارزیابی واقعی تری از کارایی فرایند ارائه می دهد. کاربرد این شاخص روی داده های واقعی مربوط به فنر، توانایی آن در ارزیابی دقیق کارایی فرایند را تأیید کرد. از مزایای شاخص پیشنهادی می توان به قابلیت مدلسازی عدم قطعیت در اندازه گیری متغیر مستقل، انعطاف پذیری در استفاده از انواع توابع عضویت، و سادگی تفسیر نتایج اشاره کرد.

## مراجع

- [۱] Abbasi Ganji, Z. (۲۰۲۵). Fuzzy-based functional capability indices for simple linear profile. Journal of Mahani Mathematical Research, (۲)۱۴. ۴۰۲-۳۷۳
- [۲] Draper, N. R. and Smith, H. Applied Regression Analysis. Third Edition. John Wiley & Sons, Inc: ۲۰۱۱
- [۳] Ebadi, M., and Amiri, A. Evaluation of process capability in multivariate simple linear profiles. Scientia Iranica. Transactions E: Industrial Engineering :۲۰۱۲ ۱۹:(۶) - ۱۹۶۰. ۱۹۶۸
- [۴] Ebadi, M. and Shahriari, H. A process capability index for simple linear profile. International Journal of Advanced Manufacturing Technology :۲۰۱۳: ۶۴. ۸۶۵-۸۵۷
- [۵] Hosseinifard, S. Z. and Abbasi, B. Process capability analysis in non normal linear regression profiles. Communication in Statistics - Simulation and Computation ۲۰۱۲b: ۴۱:(۱۰). ۱۷۸۴-۱۷۶۱



- [۶] Nemati Keshteli, R., Baradaran Kazemzadeh, R., Amiri, A., and Noorossana, R. Developing functional process capability indices for simple linear profile, *Scientia Iranica* :۲۰۱۴ ۲۱:(۳) .۱۰۵۰-۱۰۴۴
- [۷] Shi, L., Chen, W., and Lu, L. F. (۲۰۱۴) An approach for simple linear profile gauge R and R studies. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, (۱)۲۰۱۴ .۸۱۶۹۸۰
- [۸] Pakzad, A., Razavi, H., and Sadeghpour Gildh, B. Developing loss-based functional process capability indices for simple linear profile, *Journal of Statistical Computation and Simulation* :۲۰۲۲ ۹۲:(۱) .۱۴۴-۱۱۵





## از شخصیت تا همکاری: بررسی تأثیر تیپ‌های شخصیتی بر همتاسنجی در محیطی مبتنی بر تئوری بازی‌ها

سیده فاطمه نورانی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه فنی و مهندسی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶،

تهران، ایران [sf.noorani@pnu.ac.ir](mailto:sf.noorani@pnu.ac.ir)

شیرین میرعابدینی، عضو هیئت علمی گروه فنی و مهندسی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶،

تهران، ایران [Sh\\_Mirabedini@pnu.ac.ir](mailto:Sh_Mirabedini@pnu.ac.ir)

**چکیده:** همتاسنجی یکی از روش‌های مؤثر در بهبود کیفیت یادگیری، تقویت تعامل میان دانشجویان و کاهش بار آموزشی اساتید به شمار می‌رود. با این حال، چالش‌هایی نظیر نبود اعتماد، بازخوردهای سطحی و انگیزه‌ی پایین، مانع از تحقق کامل کارایی این روش شده‌اند. پژوهش حاضر با هدف بررسی تأثیر تیپ‌های شخصیتی بر کیفیت و رفتار همتاسنجی، مدلی آموزشی مبتنی بر تئوری بازی‌ها طراحی و اجرا کرده است. در این مدل، با الهام از معمای زندانیان، محیطی شبیه‌سازی شد که در آن تعامل، همکاری و صداقت در ارائه بازخورد تقویت می‌شود. برای تحلیل داده‌ها، ابعاد شخصیتی دانشجویان با شاخص‌های حاصل از همتاسنجی مورد مقایسه قرار گرفت.

**کلمات کلیدی:** تئوری بازی، تیپ شخصیتی، همتاسنجی

### ۱. مقدمه

در دهه‌های اخیر، آموزش عالی دستخوش تحولاتی چشمگیر در شیوه‌های یاددهی و یادگیری شده است (Serdyukov, 2017). در این میان، رویکردهای یادگیری فعال و تعاملی به دلیل تأکید بر مشارکت، مسئولیت‌پذیری و بازخورد، اهمیت فزاینده‌ای یافته‌اند. یکی از مؤثرترین این رویکردها، همتاسنجی (Peer Assessment) است؛ فرایندی که در آن دانشجویان عملکرد یکدیگر را بر اساس معیارهای مشخص ارزیابی می‌کنند. پژوهش‌ها نشان داده‌اند که این روش علاوه بر تقویت مهارت‌های تفکر انتقادی و ارتباطی، موجب بهبود کیفیت یادگیری و تعامل میان دانشجویان می‌شود (Culver, 2023; Van Helden et al., 2023).

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول



با این حال، همتاسنجی با چالش‌هایی همچون بی‌اعتمادی، سوگیری و انگیزش پایین در ارائه بازخورد دقیق روبه‌روست؛ عواملی که می‌توانند از تفاوت‌های شخصیتی ناشی شوند. بر اساس مدل پنج‌عاملی شخصیت (NEO-FFI)، ویژگی‌هایی مانند برون‌گرایی، توافق‌پذیری و وظیفه‌شناسی بر نحوه داوری و همکاری افراد اثر می‌گذارد (Barile et al., 2024). از سوی دیگر، نظریه بازی‌ها چارچوبی تحلیلی برای درک تعاملات انسانی و تصمیم‌گیری در موقعیت‌های وابسته به رفتار دیگران فراهم می‌کند. این نظریه در آموزش می‌تواند به تحلیل رفتارهای همکاری‌جویانه، اعتماد و انگیزش کمک کند (Zuo et al., 2025). در این پژوهش، با بهره‌گیری از معمای زندانیان، مکانیزمی طراحی شد که همکاری، صداقت و اعتماد متقابل را در فرایند همتاسنجی پاداش می‌دهد. ترکیب تیپ‌های شخصیتی با این سازوکار رفتاری، امکان بررسی دقیق‌تر انگیزه‌ها و تصمیم‌گیری‌های دانشجویان را فراهم می‌سازد و می‌تواند به طراحی نظام‌های آموزشی منصفانه‌تر و انگیزه‌بخش‌تر منتج شود.

## ۱-۱. مکانیزم همتاسنجی و پرکردن پرسشنامه شخصیت

در این پژوهش، پس از هر جلسه تدریس، استاد کوئیزی کوتاه طراحی و بین دانشجویان توزیع کرد. هر دانشجو ابتدا به‌طور مستقل پاسخ داد، سپس برگه‌های دو دانشجوی دیگر را به‌صورت تصادفی ارزیابی کرد. دقت ارزیابی با مقایسه نمره ارزیاب و نمره استاد سنجیده شد. برای افزایش انگیزه و دقت، از مکانیزم بازی تکراری معمای زندانیان استفاده شد؛ به‌گونه‌ای که هر دو ارزیاب نقش بازیکنان بازی را داشتند و امتیاز نهایی آن‌ها بر اساس دقت خود و همتای‌شان تعیین می‌شد. این طراحی همکاری دقیق و صادقانه را پاداش می‌داد و عدم همکاری را برای فرد خطاکار پرهزینه‌تر می‌کرد. همچنین، نامشخص بودن تعداد جلسات، اثر تداوم بازی و انگیزه همکاری بلندمدت را تقویت کرد.

پس از ارزیابی هر دو دانشجو، استاد درس نیز کوئیز دانشجویان را ارزیابی می‌کنند.  $Diff_{AC}$  به اختلاف ارزیابی انجام شده توسط A از C و ارزیابی انجام شده توسط استاد از C اشاره می‌کند. در واقع هر چه این مقدار کمتر باشد، اعتبار همتاسنجی بیشتر است. ماکزیمم نمره هر کوئیز ۱ در نظر گرفته شده بود و برای تبدیل این تابع، به تابع ماکزیمم، ما از  $|1-Diff|$  استفاده می‌کنیم. بنابراین هر چه  $|1-Diff|$  بیشتر باشد، ارزیابی دقیق‌تر بود است. به عنوان مثال اگر دانشجوی A، دانشجوی C را به اندازه ۱ ارزیابی کرده باشد و استاد دانشجوی C را به اندازه ۰/۷۵، مقدار  $Diff_{AC}$  برابر  $Diff_{AC} = 0/25$  است. امتیاز نهایی که به دو بازیکن A و B داده خواهد شد، برابر است با:

$$\frac{(|1 - Diff_{AC}| + |1 - Diff_{BC}|)}{2} \times 1/2 \quad (1)$$

از آنجا که نمره هر کوئیز ۱ است، عدد  $1/2$  (و هر عدد بزرگتر از ۱) باعث خواهد شد که شرایط امتیاز دهی، شرایط بازی معمای زندانی را داشته باشد. به عنوان مثال، اگر  $|1-Diff_{BC}|=1$ ،  $|1-Diff_{AC}|=0$ ؛ یعنی دانشجوی A ارزیابی کاملاً دقیق از C داشته و دانشجوی B ارزیابی کاملاً اشتباه داشته است و مثلاً استاد نمره ۱ به دانشجوی C داده، اما دانشجوی B در همتاسنجی، نمره ۰ به دانشجوی C داده است. در این حالت امتیاز ارزیابی اختصاص داده شده به هر دو دانشجوی A و B برابر  $0/6 = 1/2 \times \frac{1+0}{2}$  است. در تئوری بازی، پیامد برابر نتیجه منهای زحمت است. در این حالت، بازیکن A ارزیابی کاملاً دقیق داشته و امتیازی که به دست آورده برای  $0/6$  است. در این حالت پیامد بازیکن A برابر  $0/6 - 1 = -0/4$  و پیامد بازیکن B برابر  $0/6 - 0 = 0/6$  است. شکل ۱، جدول پیامد دو بازیکن در نقاطی که ارزیابی کاملاً دقیق و کاملاً اشتباه انجام داده‌اند، را نشان می‌دهد. این شرایط معمای زندانی‌ها است که همکاری هر دو امتیاز بیشتری در مقابل عدم همکاری هر دو دارد. و اگر یکی همکاری کند و دیگری همکاری نکند، بازیکنی که همکاری نکرده، پیامد بیشتری دریافت می‌کند.



دانشجوی B (بازیکن دوم)

|                        |                   |                   |                   |
|------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
|                        |                   | $ 1-Diff_{BC} =0$ | $ 1-Diff_{BC} =1$ |
| دانشجوی A (بازیکن اول) | $ 1-Diff_{AC} =0$ | 0 , 0             | 0/6 , -0/4        |
|                        | $ 1-Diff_{AC} =1$ | -0.4 , 0/6        | 0.2 , 0.2         |

شکل ۱: پیامد بازیکنان به ازای ارزیابی دقیق و اشتباه

همزمان با فعالیت‌های هم‌تاسنجی، دانشجویان پرسشنامه NEO-FFI را تکمیل کردند تا تیپ شخصیتی آن‌ها بر اساس پنج عامل بزرگ شخصیت تعیین شود. این مدل شامل پنج بُعد اصلی زیر است:

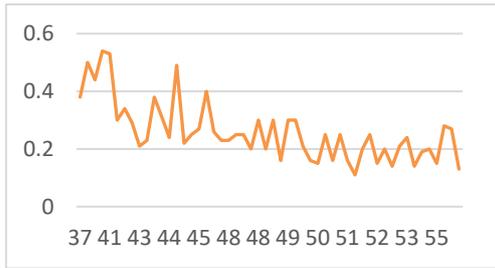
- برون‌گرایی (Extraversion) میزان اجتماعی بودن، انرژی و ابراز هیجان فرد
- توافق‌پذیری (Agreeableness) تمایل به همکاری، همدلی و سازگاری با دیگران
- وظیفه‌شناسی (Conscientiousness) دقت، نظم، مسئولیت‌پذیری و خودکنترلی
- روان‌نژندی (Neuroticism) حساسیت هیجانی، اضطراب، نوسانات خلقی
- گشودگی نسبت به تجربه (Openness) کنجکاوی، خلاقیت و تمایل به تجربیات جدید

## ۲. نتایج اصلی

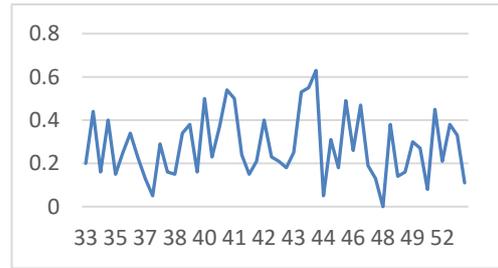
در این پژوهش، ویژگی‌های NEO گردآوری شد که نمراتی بین ۰ تا ۶۰ بودند. نمودارهای الف تا ه شکل ۲، همبستگی هر ویژگی شخصیتی با دقت ارزیابی دانشجویان را نشان می‌دهند؛ به طوری که محور افقی نمرات شخصیت و محور عمودی میانگین اختلاف ارزیابی دانشجویان و استاد را نمایش می‌دهد. تحلیل همبستگی نشان داد که:

- مسئولیت‌پذیری بیشترین همبستگی مثبت را با دقت ارزیابی دارد؛ دانشجویانی که در این مؤلفه نمره بالاتری دارند، رفتار دقیق‌تر و منسجم‌تری در ارزیابی‌ها از خود نشان دادند.
- روان‌نژندی رابطه معکوس با دقت ارزیابی دارد؛ دانشجویانی با سطوح بالاتر روان‌نژندی به طور معمول ارزیابی‌های کمتر دقیقی ارائه دادند.
- توافق‌پذیری، اشتیاق به تجارب تازه و برون‌گرایی همبستگی پایداری با دقت ارزیابی نشان ندادند و نمودارهای مربوطه فراز و فرودهای متعددی داشتند، که نشان‌دهنده تغییرات غیرخطی دقت ارزیابی در سطوح مختلف این تیپ‌های شخصیتی است.

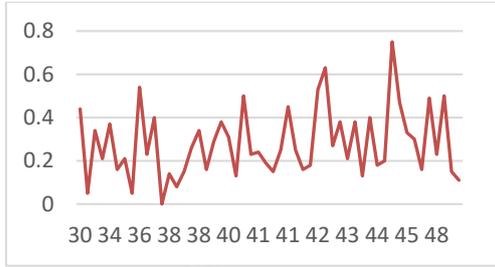
این نتایج بیانگر آن است که رابطه بین تیپ شخصیتی و دقت هم‌تاسنجی خطی و ساده نیست و ویژگی‌های فردی مختلف می‌توانند به شکل متفاوتی بر رفتار ارزیابی تأثیر بگذارند. با این حال، مسئولیت‌پذیری قوی‌ترین شاخص پیش‌بینی‌کننده دقت ارزیابی و روان‌نژندی مهم‌ترین شاخص مرتبط با ارزیابی‌های بی‌دقت شناخته شد. این یافته‌ها با نتایج پژوهش‌های پیشین در حوزه تحلیل رفتار ارزیابان و متغیرهای روان‌شناختی همسو است و می‌تواند راهنمای طراحی مکانیزم‌های هم‌تاسنجی دقیق‌تر و انگیزشی‌تر باشد.



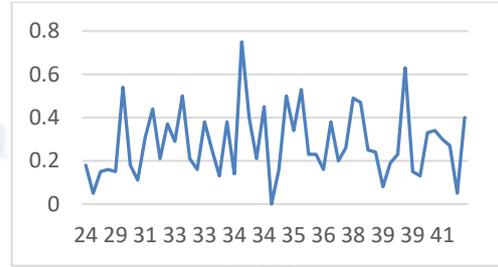
الف) ارتباط مسئولیت پذیری با دقت همتاسنجی



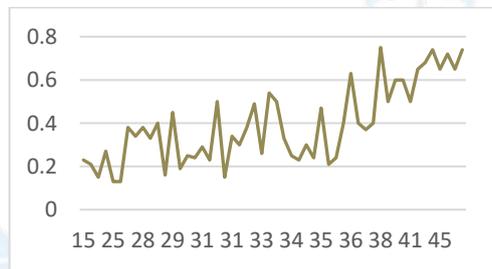
ب) ارتباط توافق پذیری با دقت همتاسنجی



ج) ارتباط اشتیاق به تجارب تازه با دقت همتاسنجی



د) ارتباط برون گرایی با دقت همتاسنجی



ه) ارتباط روان نزدی با دقت همتاسنجی

شکل ۲: ارتباط بین ابعاد شخصیتی و همتاسنجی

## منابع

1. Barile, F., Cau, F. M., & Tintarev, N. (2024). A preliminary analysis on self and peer evaluation of personality models for recommender systems. Adjunct Proceedings of the 32nd ACM Conference on User Modeling, Adaptation and Personalization ,
2. Culver, C .(۲۰۲۳) .Learning as a peer assessor: evaluating peer-assessment strategies. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 48(5), 581-597 .
3. Serdyukov, P. (2017). Innovation in education: what works, what doesn't, and what to do about it? *Journal of research in innovative teaching & learning*, 10(1), 4-33 .
4. Van Helden, G., Van Der Werf, V., Saunders-Smits, G. N., & Specht, M. M. (2023). The Use of digital peer assessment in higher education—An umbrella review of literature. *IEEE Access*, 11, 22948-22960 .
5. Zuo ,H., Zhang, M., & Huang, W. (2025). Lifelong learning in vocational education: A game-theoretical exploration of innovation, entrepreneurial spirit, and strategic challenges. *Journal of Innovation & Knowledge*, 10(3), 100694 .

## بررسی عملکرد جایگاه شش سیگما در بهبود توانایی روند کار در کارخانجات

ساره حسنی سعدی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران -  
 - Sareh\_hasani@pnu.ac.ir

**چکیده:** شش سیگما سیستمی است شامل مجموعه ای از ابزارهای بهبود مستمر برای تمرکز بر روی فرآیندها، تحلیل و مقایسه آنها و تخصیص منابع به فرآیندهایی که نیازمند توجه بیشتر هستند. خرابی های ایجاد شده در فرآیندهای سازمانها باعث دوباره کاری، اتافات، هزینه و نیروی انسانی اضافی می شود. متمرکز کردن عمده تاش ها بر روی کاهش خرابی ها علاوه بر کاهش دوباره کاری، هزینه انجام فرآیندها را نیز کاهش می دهند. در کارخانجات برای ارزیابی درستی و دقت یک کالابر اساس «۶ - زیگما» حدی را تعیین می کنند که آنرا دامنه فرآیند یا Process Range می نامند. اگر تفاوت بین USL-LSL مساوی «۶ - زیگما» باشد این نسبت برابر با یک می شود که بهترین حد ممکن خواهد بود اگر شش سیگما درست صورت پذیرد نتایج زیر را در دنبال دارد: ۱- مدیریت سازمان شما به سمت حقیقت محوری میل خواهد کرد. ۲- شما و دیگران با فرآیند کاری سازمان بیشتر آشنا خواهید شد. ۳- در گروهها، همکاری ایجاد شده. ۴- تمرکز انرژی در یک سازمان شش سیگمایی تغییر خواهد کرد و سازمان شما از یک حالت انفعالی به حالتی فعال گذر خواهد کرد

کلمات کلیدی: DMAIC و Six Sigma و DMADV

### ۱. مقدمه

شش سیگما سیستمی است شامل مجموعه ای از ابزارهای بهبود مستمر برای تمرکز بر روی فرآیندها، تحلیل و مقایسه آنها و تخصیص منابع به فرآیندهایی که نیازمند توجه بیشتر هستند. خرابی های ایجاد شده در فرآیندهای سازمانها باعث دوباره کاری، اتافات، هزینه و نیروی انسانی اضافی می شود. متمرکز کردن عمده تاش ها بر روی کاهش خرابی ها علاوه بر کاهش دوباره کاری، هزینه انجام فرآیندها را نیز کاهش می دهند. شش سیگما با تعریف معیارهایی که نشان دهنده میزان خرابی در فرآیند هستند، امکان مقایسه همزمان وضعیت عملکردی فرآیندهای مختلف را فراهم می آورد و در تصمیم گیری در مورد محل تمرکز منابع برای عملکرد بهتر کمک می کند. متدولوژی شش سیگما یک بینش و فلسفه تجاری است که به شرکت هایی که در سطح کیفیت جهانی فعالیت می کنند و به دنبال بهبود مستمر هستند کمک می کند که به بالاترین سطح رضایت مشتری دست یابند. معیارهایی که در این متدولوژی تعریف می شوند اهداف و ارزش های استراتژیک سازمانی را به نیازها و انتظارات مشتریان مربوط می

<sup>۱</sup> ساره حسنی سعدی

سازند.

۱-۱.

### (DMAIC و DMADV) روش شناسی شش سیگما

همانطور که گفته شد، روش شش سیگما، یک متدولوژی ساختاریافته و داده‌محور است که هدف نهایی این روش نیز شناسایی نقص‌ها و مشکلات با بررسی داده‌های مختلف و بهینه‌سازی تمام فرایندها در سازمان است. این روش هرکدام از این دو مسیر بسته به شرایط، هدف و (DMAIC و DMADV) از دو مسیر اصلی بهره می‌گیرد. نیازهای سازمان، ابزارها و تکنیک‌های خاصی را ارائه می‌دهند.

### ۲-۱ بهینه‌سازی فرآیندهای موجود

مخفف پنج مرحله تعریف، اندازه‌گیری، تحلیل، بهبود و کنترل است. این روش برای بهینه‌سازی DMAIC شامل اقدامات و ابزارهای DMAIC فرآیندهای موجود و رفع مشکلات آن‌ها استفاده می‌شود. هر مرحله از مشخصی است که سازمان‌ها را در دستیابی به نتایج بهتر یاری می‌کند

**تعریف:** در این مرحله، مشکل اصلی و اهداف پروژه به‌طور دقیق مشخص می‌شود. همچنین نیازها و خواسته‌های مشتریان شناسایی شده و به عنوان مبنای کار قرار می‌گیرد

**اندازه‌گیری** در مرحله دوم، داده‌های مربوط به فرآیندهای جاری جمع‌آوری و اندازه‌گیری می‌شوند. این داده‌ها معیاری برای ارزیابی عملکرد فعلی و شناسایی نقاط ضعف ارائه می‌دهند

**تجزیه و تحلیل** داده‌های جمع‌آوری شده به منظور شناسایی علت‌های اصلی مشکلات تحلیل می‌شوند. هدف این مرحله، شفاف‌سازی عوامل مؤثر بر نقص‌ها و ارائه دیدگاهی جامع از فرآیند است

**بهبود** بر اساس نتایج تحلیل، تغییراتی در فرآیندها اعمال می‌شود. این تغییرات ابتدا در محیطی آزمایشی اجرا و تست می‌شوند تا اطمینان حاصل شود که نقص‌ها برطرف شده‌اند

**کنترل** پس از اعمال تغییرات موفق، فرآیند جدید پایدارسازی و نظارت می‌شود تا عملکرد مطلوب حفظ شود. ابزارهایی مانند کنترل آماری فرآیند در این مرحله استفاده می‌شوند

### ۳-۱ انعطاف‌پذیری پاسخگو

انعطاف‌پذیری از مهم‌ترین عواملی است که در روش شش سیگما باید به آن توجه شود. سازمان‌ها باید این قابلیت را داشته باشند که به تغییرات ایجاد شده در فرایندها به سرعت و با انعطاف کامل پاسخ دهند. این اصل شامل آماده‌سازی کارکنان برای پذیرش تغییرات، بهینه‌سازی فرآیندها و تبدیل محیط کاری به محیطی پویا و سازگار با تغییرات است. فرآیندها باید به گونه‌ای طراحی شوند که در صورت بروز مشکل در یک بخش، تنها همان بخش بهینه‌سازی شود و نیازی به تغییر کل فرآیند نباشد



رابطه ۶ سیگما با خطاهای اتفاقی و سیستماتیک:  
ظرفیت پتانسیل (potential capability)

$$Cp = \frac{ucl - lcl}{6\sigma}$$

در کارخانجات برای ارزیابی درستی و دقت یک کالابر اساس «۶ - زیگما» حدی را تعیین می کنند که آنرا دامنه فرآیند و یا Process Range می نامند

این حد معموا برابر با می باشد که تقریبا ۹۹ درصد از محصولات را می پوشاند . این امر در صورتی انجام پذیر است که داده ها از قانون پراکندگی نرمال تبعیت کنند . این حد را که دارای بالاترین حد تغییرات (USL) و پایین ترین حد تغییرات (LSL) می باشد حد ویژگی فرآورده مورد نظر می دانند . مثلا اگر حد ویژگی ساخت حلقه ای با قطر ۷۳ میلی لیتر برابر با  $\pm 0.03$  در نظر گرفته شود مقدار  $74 + 0.03$  حد بای ویژگی و  $74 - 0.03$  حد پایین ویژگی این فرآورده است . با استفاده از این حدود ، ظرفیت پتانسیل یا **Potential Capability** را با فرمول زیر محاسبه می نمایند تا قابلیت و یا ظرفیت فرآیند را نشان دهند .

اگر تفاوت بین USL-LSL مساوی «۶ - زیگما» باشد این نسبت برابر با یک می شود که بهترین حد ممکن خواهد بود ( در صورتیکه  $Bias = 0$  باشد ) . اگر تفاوت بین USL-LSL مساوی «۸ - زیگما» باشد «۴ - زیگما در هر طرف ) این نسبت برابر با  $4:6 = 0.67$  می شود که تعداد نارسایی ها برابر با 64ppm می شود ( در صورتیکه  $Bias = 0$  ) وقتی میانگین در نقطه میانی منحنی پراکندگی قرار می گیرد ( $Bias = 0$ ) که خطای سیستماتیک وجود نداشته باشد . ولی بر اساس تجربه دیده می شود که بر اثر مرور زمان مقدار میانگین به یک طرف شیفت یا تمایل پیدا می کند که آن را Long Term Dynamic Mean Variation می خوانند . این اختلاف معمولابین 1.4 تا 1.6 می باشد که میانگین آن 1.5 می شود . این صحیح است که برنامه اصلی «۶ - زیگما» و رسیدن به آن باید تعداد خطاها 0.002 در میلیون باشد ولی با در نظر گرفتن شیفت  $1.5Sd$  ، خطای 3.4 در میلیون قابل قبول است .

$$C_{pk} = \frac{Tolerance\ Specification - Bias}{3Sd}$$

Bias - مقدار انحراف از میانگین (خطای سیستماتیک) - Sd - انحراف از معیار (خطای اتفاقی)

Tolerance Specification - Ts یا ویژگی تحمل که در واقع نماینده خطای کل قابل قبول می باشد .

اگر این نسبت یا اندکس زیاد باشد ، نماینده آن است که توانایی روند کار بالا بوده و خطا کمتر می باشد و برعکس مقدار خطا بیشتر خواهد بود

$$Cpk = \frac{ATE - Bias}{3Sd} \quad \text{Sigma Metric} = \frac{ATE - Bias}{Sd}$$

$$CPK = \frac{12 - 0}{6} = 2 \quad \text{Sigma Metric} = \frac{12 - 0}{2} = 6 \quad \text{مثال: اگر } ATE = 12\% \text{ و } Sd = 2\% \text{ باشد}$$

این نسبت یا اندکس زیاد بوده ، نماینده آن است که توانایی روند کار بالا بوده است .

## ۲ نتایج اصلی

در نتیجه اگر شش سیگما درست صورت پذیرد نتایج زیر را در دنبال دارد: ۱- مدیریت سازمان شما به سمت حقیقت محوری میل خواهد کرد. ۲- شما و دیگران با فرایند کاری سازمان بیشتر آشنا خواهید شد. ۳- در گروهها، همکاری ایجاد شده. ۴- تمرکز انرژی در یک سازمان شش سیگمایی تغییر خواهد کرد و سازمان شما از یک حالت انفعالی به حالتی فعال گذر خواهد کرد، که در یک کارخانه نماینده آن است که توانایی روند کار بالا بوده است

## منابع

1. Howard Smith and Peter Fingar- The Third Wave of Business Process Management: Digital Six Sigma, Integrating continuous improvement with continuous change and continuous learning-2003
2. BPR.chain.ppt
3. 4sixsigma.ppt-breakthrough strategy
4. ajazhussain\_6SQbd.ppt
5. Microsoft Office Solutions Accelerator for Six Sigma.ppt
  - 1) Harry M, Schroeder R, eds. Six Sigma. The breakthrough management strategy revolutionizing the world's top corporations. 1st ed. New York: Currency; 2000.
  - 2) Brussee W. Statistics for Six Sigma made easy. New York: McGraw-Hill; 2004
  - 3) Nevalainen D, Berte L, Kraft C, Leigh E, Picaso L, Morgan T. Evaluating laboratory performance on quality indicators with the six sigma scale. Arch Pathol Lab Med 2000;124:516-9.
  - 4) Westgard JO, Six Sigma Quality Design and Control, 2nd Edition, Westgard QC, Inc. Madison, WI 2006..
  - 5) Abdurrahman Coskun. Wrong Sigma metric causes chaos. J Med Lab, 2022. <https://doi.org/10.1515/labmed-2022-0003>.
  - 6) Wytze P, Oosterhuis, Abdurrahman Coskun. Sigma metrics in laboratory medicine revisited: We are on the right road with the wrong map. Biochem Med (Zagreb) 2018;28(2). <https://doi.org/10.11613/BM.2018.020503>
  - 7) Abdurrahman Coskun, Mustafa Serteser, Ibrahim Ünsal. Sigma metric revisited: True known mistakes. Biochem Med (Zagreb) 2019;29(1). <https://doi.org/10.11613/BM.2019.010902>



## مدل سازی ریاضی پویایی دفاتر سفارش با معادله دیفرانسیل جزیی تصادفی

جواد عبادپور گلنبر، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

ebadpour.j@gmail.com(ebadpourgolanbar@pnu.ac.ir)

( عضو هیأت علمی، فارغ التحصیل دکتری، )

**چکیده:** در این مقاله یک چارچوب کلی برای مدل سازی پویایی دفاتر سفارش محدود ارائه شده است که بر اساس ترکیبی از دو جزء مدل سازی جریان سفارش و تسویه بازار ساخته شده است و با معرفی نمادهای ریاضی، معادله دیفرانسیلی تصادفی کولوموگروف حاصل از مدل سازی را بیان کرده و جواب و خاصیت های آن را بیان می کنیم. **کلمات کلیدی:** دفتر سفارش محدود، مدل تصادفی، معادله دیفرانسیل جزئی تصادفی، فرآیندهای مارکوف، مدل سازی ریاضی.

### ۱ مقدمه

در دهه های اخیر، بازارهای مالی به پلتفرم های الکترونیکی روی آورده اند که در آن ها، خریداران بازار می توانند سفارش های خرید و فروش را از طریق یک دفتر سفارش محدود متمرکز (LOB) ارسال کنند [۵] سپس این سفارش ها با توجه به قوانین اولویت زمانی و قیمتی، تطبیق داده شده و اجرا می شوند. وضعیت دفتر سفارش محدود، که نشان دهنده سفارش های خرید و فروش معوق است، دائماً از طریق ورود، اجرا و لغو سفارش های خرید و فروش تغییر می کند. مطالعه تجربی پویایی دفتر سفارش محدود در [۲] و [۳] بررسی شده است. مدل های تصادفی زیادی برای پویایی دفتر سفارش محدود در مقالات [۶، ۷، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۳] توسعه داده شده اند. مدل های صف [۷، ۱۰، ۱۲] دفتر سفارش محدود را به عنوان سیستمی از صف های تعاملی نشان می دهند که توسط یک جریان سفارش هدایت می شوند که به عنوان یک فرآیند نقطه ای فضایی توصیف می شود. دسته دیگری از مدل ها، وضعیت دفتر سفارش را به صورت یک (زوج) چگالی، که جواب یک معادله دیفرانسیل جزئی تصادفی (SPDE) است، نشان می دهند [۸، ۱۲]. این دو دسته از مدل ها با محدودیت های مقیاس بندی مانند محدودیت های سیال [۱۱، ۱۲] و محدودیت های انتشار [۶، ۷، ۹] مدل های دفتر سفارش گسسته تحت فرضیات مناسب به هم متصل می شوند. تنوع زیاد مدل های تصادفی برای پویایی دفتر سفارش محدود، انجام یک تحلیل مقایسه ای را دشوار می کند، به خصوص به این دلیل که این مدل ها از نمایش ها و فرضیات مختلفی به عنوان نقاط شروع استفاده می کنند. در کار حاضر، ما

Author Corresponding\*



رویکردی را پیشنهاد می‌کنیم که این مدل‌ها را در یک چارچوب کلی واحد ادغام می‌کند، که می‌تواند برای مقایسه مدل و ساخت مدل، و همچنین برای بررسی رفتار مجانبی تحت فرضیات مختلف مقیاس‌بندی مفید باشد. در زمان  $t$  وضعیت فعلی دفتر سفارش  $X_t$  است که متعلق به یک فضای حالت مناسب  $L$  می‌باشد. یک جریان سفارش  $\Delta X$  پس از زمان  $\Delta t$  وارد دفتر سفارش می‌شود و وضعیت دفتر سفارش را از  $X_t$  به یک حالت میانی  $X_t + \Delta X$  تغییر می‌دهد که عنصری از فضای بزرگتر  $E$  است. خاطرنشان می‌کنیم که جریان سفارش در این چارچوب می‌تواند هر فرآیند تصادفی باشد. از آنجایی که جریان سفارش و فرآیندهای تسویه بازار مستقل هستند، این چارچوب را می‌توان تنها با انتخاب صحیح جریان‌های سفارش و عملگرهای تسویه، برای انواع مختلف بازارها تنظیم کرد. علاوه بر این، این تجزیه، رویکردی مدولار را در شبیه‌سازی LOBها امکان‌پذیر می‌کند که در آن الگوریتم‌های شبیه‌سازی جریان سفارش و عملگر تسویه می‌توانند به طور مستقل توسعه داده شوند.

اگر جریان سفارش یک فرآیند مارکوف فرض شود، از آنجایی که عملگر تسویه بازار و جریان سفارش مستقل هستند، فرآیند دفتر سفارش نیز مارکوفی است. بنابراین، پویایی دفتر سفارش را می‌توان با مولد بی‌نهایت کوچک آن تعریف کرد. چارچوب به ما اجازه می‌دهد تا مولد بی‌نهایت کوچک را به عنوان ترکیب مولد پویایی جریان سفارش بنویسیم که ساده‌تر است و دو عملگر، یکی مربوط به عملگر تسویه و دیگری مربوط به جاسازی فضای حالت  $L$  از LOB در فضای عمومی  $E$  از حالت میانی. در این مقاله شرح ریاضی دقیقی از عملگر آشکار ارائه شده است.

## ۲ نمادها و تعاریف

فرض کنید  $E := N^d \times N^d$  که  $d \in N \setminus \{0\}$  نشان دهنده حداکثر قیمت یک سفارش است. و هر عضو  $X = (X^+, X^-) \in E$  نشان دهنده تنظیمات سفارشات محدود است: برای  $j \in \{1, \dots, d\}$  مقدار  $X_j^+$  نشان دهنده کل حجم سفارشات خرید در قیمت  $j$  است. و  $X_j^-$  کل حجم فروش است. برای هر  $Z \in N^d$  اندازه شمارش روی  $\{1, \dots, d\}$  که به صورت زیر تعریف می‌شود مربوط می‌کنیم

$$v_Z(A) = \sum_{j=1}^d Z_j 1_{j \in A}$$

برای  $X \in E$  فضای حالت LOB به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a(X) := \inf \text{Supp}(X^-), \quad b(X) = \sup \text{Supp}(X^+)$$

که  $a(X)$  قیمت درخواست و  $b(X)$  قیمت پیشنهاد است

و مجموعه تنظیمات دفتر سفارش محدود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L} := \{X = (X^-, X^+) \in E, \quad a(X) > b(X)\}$$

که  $X^-$  بیانگر سفارشات فروش و  $X^+$  نشان دهنده سفارشات خرید است. و  $E$  مجموعه پیکربندی‌های دفتر سفارش فرضی است

## ۳ جریان سفارش

وضعیت دفتر سفارش از طریق ورود، اجرا یا لغو سفارش تغییر می‌کند. بنابراین، ما تکامل آن را با استفاده از یک فرآیند زمان پیوسته  $x(t)$  با مقداری در فضای پیکربندی  $\mathcal{L}$  توصیف می‌کنیم. در این بخش، ابتدا بر ورود سفارش‌ها تمرکز می‌کنیم، چیزی که ما آن را "جریان سفارش" می‌نامیم.

چهار نوع رویداد ورود «ابتدایی» را از هم متمایز می‌کنیم: سفارش‌های خرید و فروش محدود و لغو سفارش‌های خرید و فروش.

سفارش خرید (فروش) محدود، سفارشی برای خرید (فروش) مقدار مشخصی از سهام با قیمت مشخص است و سفارش لغو خرید (فروش) سفارشی برای لغو مقدار مشخصی از سهام خرید (فروش) موجود در یک دفتر سفارش است. هر رویداد با قیمت  $i \in \{1, \dots, d\}$  و اندازه  $z \in \mathcal{N}$  است. فرض کنید

$$e_i := (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \quad (1)$$

که در آن "1" در موقعیت  $i$  ام قرار دارد. در این صورت یک رویداد دفتر سفارش با اندازه  $z$  و قیمت  $i$ ، پیکربندی  $X$  در  $E$  را به پیکربندی جدید  $X + \Delta X \in E$  نگاشت می‌کند. در این صورت  $X \rightarrow X + \Delta X$  به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{limit buy order of size } z \text{ at price } i : (X^+, X^-) \rightarrow (X^+ + ze_i, X^-) \\ \text{limit sell order of size } z \text{ at price } i : (X^+, X^-) \rightarrow (X^+, X^- + ze_i) \\ \text{cancellation of a buy order of size } z \text{ at price } i : (X^+, X^-) \rightarrow (X^+ - ze_i, X^-) \in E \\ \text{cancellation of a sell order of size } z \text{ at price } i : (X^+, X^-) \rightarrow (X^+, X^- - ze_i) \in E \end{array} \right.$$

اگر چندین سفارش به طور همزمان برسند، اثرات آنها افزایشی است. به عنوان مثال، می‌توانیم تغییر قیمت را برای یک سفارش محدود با اندازه  $z$  از  $i$  تا  $i + 1$  به عنوان لغو همزمان اندازه  $z$  با قیمت  $i$  و ارسال یک سفارش جدید با اندازه  $z$  در  $i + 1$  مدل‌سازی کنیم. انواع دیگری از سفارش‌ها نیز وجود دارند، به عنوان مثال، سفارش‌های زمان اجرا، که مشخص می‌کنند یک سفارش قبل از اجرا یا انقضا چقدر فعال خواهد ماند، سفارش‌های تکمیل یا حذف (سفارش یا بلافاصله به طور کامل (در صورت امکان) اجرا می‌شود یا لغو می‌شود)، و سفارش‌های فوری یا لغو (سفارش بلافاصله تا حدی اجرا می‌شود و بخش اجرا نشده باقی مانده لغو می‌شود).

## ۴ معادله دیفرانسیل جزئی

در نظر بگیرید  $f \in B(\mathcal{L})$  و  $T > 0$  و  $X \in \mathcal{L}$  و نیز برای  $t < T$  فرض کنید

$$u(t, X) := E[f(X_T) | X_t = X]$$

در این صورت  $u(t, X)$  جواب معادله کلوموگروف زیر است:

$$\frac{\partial u(t, X)}{\partial t} + Lu(t, X) = 0, \quad u(t, X) = f(X)$$

که جواب این معادله  $u(t, 0) = e^{(T-t)L}u(T, 0)$  می‌باشد. که در زمان گسسته  $\Delta t$  می‌توان رابطه  $u(t + \Delta t, X) = e^{-\Delta t L}u(t, X)$  را بیان کرد که دارای خواص متعددی است.

## ۵ نتایج

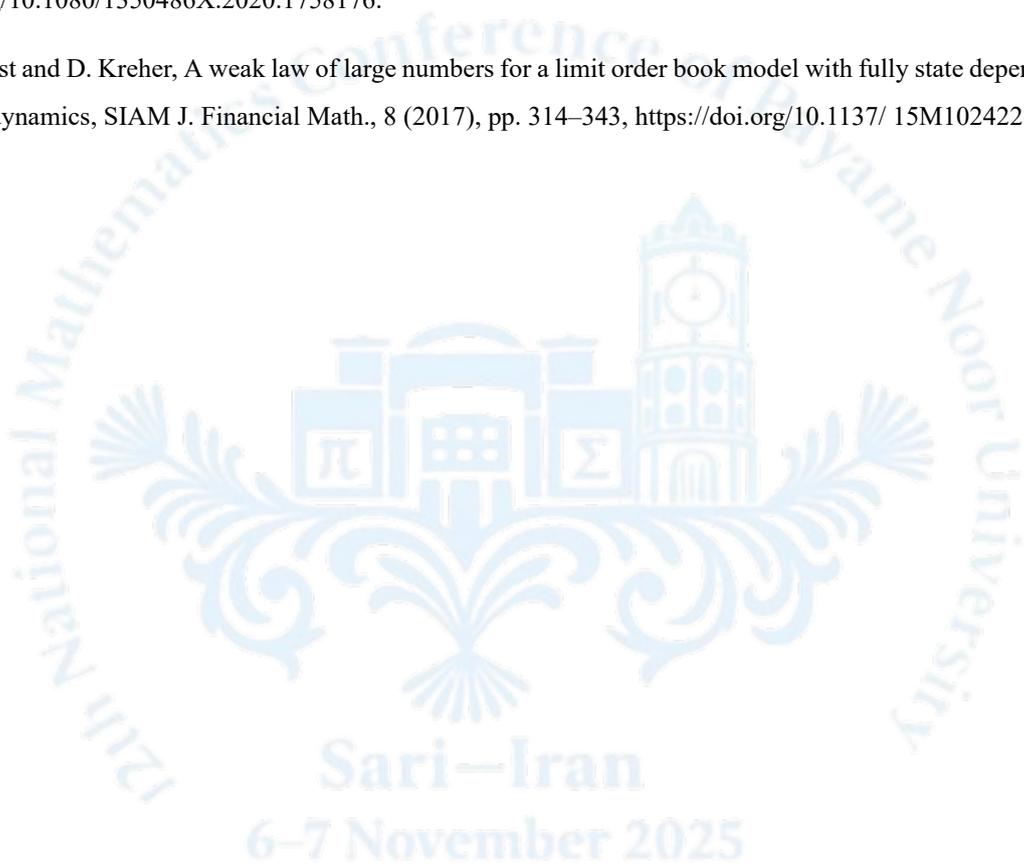
جریان سفارش می‌تواند هر فرآیند تصادفی باشد که امکان اعمال چارچوب ما را به تعداد زیادی از مدل‌های مختلف دفتر سفارش فراهم می‌کند. فرآیندهای تسویه بازار و جریان سفارش مستقل هستند. اگر هر دو فرآیند مارکوف باشند، فرآیند دفتر سفارش نیز یک فرآیند مارکوف است. سپس می‌توان از معادلات مولد بی‌نهایت کوچک و کولموگروف برای توصیف پویایی دفتر سفارش استفاده کرد. در نهایت، شبیه‌سازی‌های عددی با استفاده از روش مونت کارلو و حل مستقیم معادله کولموگروف را می‌توان ارائه داد. یکی دیگر از جهت‌های تحقیقاتی جالب، در نظر گرفتن عملگر تسویه به عنوان یک عملگر انتقال بهینه و استفاده از نظریه انتقال بهینه برای تحلیل پویایی دفتر سفارش است.

## مراجع

- [1] F. Abergel and A. Jedidi, A mathematical approach to order book modeling, *Int. J. Theor. Appl. Finance*, 16 (2013), 1350025, <https://doi.org/10.1142/S0219024913500258>.
- [2] B. Biais, P. Hillion, and C. Spatt, An empirical analysis of the limit order book and the order flow in the Paris Bourse, *J. Finance*, 50 (1995), pp. 1655–1689, <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1995>.
- [3] J.-P. Bouchaud, M. Mézard, and M. Potters, Statistical properties of stock order books: Empirical results and models, *Quant. Finance*, 2 (2002), pp. 251–256, <https://doi.org/10.1088/1469-7688/2/4/301>.
- [4] E. Budish, P. Cramton, and J. Shim, Implementation details for frequent batch auctions: Slowing down markets to the blink of an eye, *Amer. Econ. Rev.*, 104 (2014), pp. 418–424, <https://doi.org/10.1257/aer.104.5.418>.
- [5] R. Cont, Statistical modeling of high-frequency financial data, *IEEE Signal Process. Mag.*, 28 (2011), pp. 16–25, <https://doi.org/10.1109/MSP.2011.941548>.
- [6] R. Cont and A. De Larrard, *Order Book Dynamics in Liquid Markets: Limit Theorems and Diffusion Approximations*, 2012.
- [7] R. Cont and A. de Larrard, Price dynamics in a Markovian limit order market, *SIAM J. Financial Math.*, 4 (2013), pp. 1–25, <https://doi.org/10.1137/110856605>.
- [8] P. Lakner, J. Reed, and S. Stoikov, High frequency asymptotics for the limit order book, *Market Microstructure and Liquidity*, 02 (2016), 1650004, <https://doi.org/10.1142/S2382626616500040>.
- [9] M. Morariu-Patrichi and M. S. Pakkanen, State-dependent Hawkes processes and their application to limit order book modelling, *Quant. Finance*, 22 (2022), pp. 563–583, <https://doi.org/10.1080/14697688.2021.1983199>.
- [10] L. Xuan, *A General Framework for Modelling Limit Order Book Dynamics*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, Imperial College London, 2021.



- [11] X. Gao and S. Deng, Hydrodynamic limit of order-book dynamics, *Probab. Engrg. Inform. Sci.*, 32 (2018), pp. 96–125, <https://doi.org/10.1017/S0269964816000413>.
- [12] B. Hambly, J. Kalsi, and J. Newbury, Limit order books, diffusion approximations and reflected SPDEs: From microscopic to macroscopic models, *Appl. Math. Finance*, 27 (2020), pp. 1–39, <https://doi.org/10.1080/1350486X.2020.1758176>.
- [13] U. Horst and D. Kreher, A weak law of large numbers for a limit order book model with fully state dependent order dynamics, *SIAM J. Financial Math.*, 8 (2017), pp. 314–343, <https://doi.org/10.1137/15M1024226>.



## کاربرد مدل‌های ریاضی در اقتصاد خرد

محمد رضا پور قربان<sup>۱</sup>، استادیار، گروه علمی اقتصاد، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. [m.pourgorban@pnu.ac.ir](mailto:m.pourgorban@pnu.ac.ir)

محمد حسین احسان فر، استادیار، گروه علمی اقتصاد، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران [m.ehsanfar@pnu.ac.ir](mailto:m.ehsanfar@pnu.ac.ir)

**چکیده:** کاربرد ریاضیات در اقتصاد، به عنوان یک ابزار روش‌شناختی قدرتمند، از قرن نوزدهم آغاز شده و در سه مرحله تاریخی تکامل یافته است: از نهایی‌گرایی مبتنی بر حسابان، تا مدل‌های خطی و برنامه‌ریزی، و در نهایت بهره‌گیری از شاخه‌های نوین مانند نظریه بازی‌ها و شبکه‌های عصبی. این تحول، امکان صورتبندی دقیق فرضیه‌ها، تحلیل کمی روابط اقتصادی و تدوین سیاست‌های بهینه را فراهم کرده است. با این حال، این رویکرد با انتقادات جدی مواجه بوده است. مهم‌ترین این انتقادات شامل ساده‌سازی افراطی واقعیت‌های پیچیده، اتکا به فرضیات غیرواقعی، غفلت از ابعاد اخلاقی-توزیعی، و ناتوانی در پیش‌بینی شوک‌های سیستمی مانند بحران‌های مالی است. همچنین، مدل‌های ریاضی غالباً در بازتولید ایدئولوژی‌های خاص و نادیده گرفتن وابستگی‌های اکولوژیکی نقش داشته‌اند. بنابراین، اگرچه ریاضیات برای تحلیل اقتصادی ضروری است، اما بهره‌گیری مؤثر از آن مستلزم شناخت محدودیت‌های ذاتی آن و تلفیق با بینش‌های نهادی، تاریخی و میان‌رشته‌ای برای درک جامع‌تر پدیده‌های اقتصادی است.

کلمات کلیدی: اقتصاد خرد، ریاضیات در اقتصاد، مدل‌سازی اقتصادی،

## ۱. مقدمه

موضوع ریاضیات در علم اقتصاد از قرن نوزدهم به طور جدی مورد توجه قرار گرفته است و به عنوان ابزاری کلیدی برای تجزیه و تحلیل مسائل اقتصادی و توسعه روش‌شناسی‌های مختلف به کار می‌رود. با این حال، یک پرسش اساسی همواره مطرح است: آیا فرمول‌های ریاضی قادرند پیچیدگی‌های اقتصاد واقعی را به درستی نشان دهند؟ امروزه یکی از مهم‌ترین و جدی‌ترین مباحث روش‌شناختی میان مکاتب مختلف اقتصادی به این مسئله اشاره دارد و این بحث تنها محدود به گذشته نیست. در واقع می‌توان گفت که ریاضیات در اقتصاد به عنوان یک چاقوی دولبه عمل می‌کند. از یک سو، مدل‌های ریاضی، دقت و صراحت را به تحلیل‌های اقتصادی می‌آورند و به اقتصاددانان این امکان را می‌دهند که روابط بین متغیرهای اقتصادی را به طور کمی بررسی کنند. از سوی دیگر، ساده‌سازی افراطی واقعیت‌های پیچیده انسانی و اقتصادی، می‌تواند بزرگ‌ترین خطر این رویکرد است.

کاربرد ریاضیات در علم اقتصاد، به عنوان یک ابزار تحلیلی قدرتمند، امکان صورت‌بندی دقیق فرضیه‌ها، استدلال‌های منطقی و آزمون تجربی نظریه‌ها را فراهم می‌کند. این نقش، به ویژه در توسعه مدل‌های کمی، پیش‌بینی روندهای اقتصادی و طراحی سیاست‌های بهینه به وضوح نمایان می‌شود. همانطور که ساموئلسون<sup>۲</sup> (۱۹۸۶) تأکید می‌کند، ریاضیات به اقتصاددانان اجازه داده است تا از «گفتار مبهم» به سمت «استنتاجات صریح و قابل آزمون» حرکت کنند و بدین ترتیب، جایگاه اقتصاد را به عنوان یک علم اجتماعی نظام‌مند، مستحکم سازند (Samuelson, 1986, p. 511). علاوه بر این، در تقسیم‌بندی ارو و اینتریلیگیتور<sup>۳</sup> (۱۹۹۱) کاربرد ریاضیات در اقتصاد در سه مرحله انجام شده است. در مرحله اول نهایی‌گرایی مبتنی بر حساب دیفرانسیل و انتگرال شکل گرفت. پس از انقلاب نهایی‌گرایی، ریاضیات از یک «زبان» به یک «روش تحقیق» تبدیل شد. در این زمینه، نظریات مختلفی از سوی اقتصاددانانی مانند کورنو<sup>۴</sup>، مارشال<sup>۵</sup>، والر<sup>۶</sup> و پارتو<sup>۷</sup> مطرح گردید. این اقتصاددانان با استفاده از روش‌های ریاضی، مفاهیمی چون تابع تقاضا، تابع مطلوبیت، تعادل عمومی و ... را پایه‌گذاری کردند. کاربرد نظریه مجموعه‌ها و مدل‌های خطی در دوره دوم مورد توجه برخی از اقتصاددانان قرار گرفت. در این دوره تمرکز اصلی بر روی روش‌های برنامه‌ریزی و بهینه‌سازی بود. به ویژه، برنامه‌ریزی خطی که توسط جرج دانتزیگ<sup>۸</sup> در سال ۱۹۴۱ معرفی شد، از جمله دستاوردهای این مرحله است. علاوه بر این، در مرحله سوم تأکید بر استفاده از شاخه‌های نوین ریاضی بوده است. به کارگیری نظریه‌های جدیدی مانند نظریه بازی‌ها<sup>۹</sup>، منطق فازی<sup>۱۰</sup>، نظریه آشوب<sup>۱۱</sup> و شبکه‌های عصبی<sup>۱۲</sup> برای مدل‌سازی در شرایط واقعی‌تر و پیچیده‌تر اقتصادی، به ویژه در زمینه عدم اطمینان و رفتارهای به ظاهر غیرقابل پیش‌بینی، مورد توجه قرار گرفته است (علیزاده و همکاران، ۱۳۹۴، ۶۱-۵۹).

با توجه به اهمیت به کارگیری ریاضیات در علم اقتصاد، انتقادات ساختاریافته‌ای نیز درباره استفاده از ریاضیات در اقتصاد مطرح شده است. جان هیکس<sup>۱۳</sup> (۱۹۳۹) از پیشگامان نقد روش‌شناختی کاربرد ریاضیات در اقتصاد است.

- 2 . Friedman, M
- 3 . Samuelson
- 4 . Cournot
- 5 . Marshall
- 6 . Walras
- 7 . Pareto
- 8 . George Dantzig
- 9 . Game Theory
- 10 . Fuzzy Logic
- 11 . Chaos Theory
- 12 . Neural Networks
- 13 . Hicks, J

وی در کتاب «ارزش و سرمایه» تأکید می‌کند که مدل‌های ریاضی برای اینکه قابلیت مدل‌سازی بودن را داشته باشند، ناگزیر به ساده‌سازی واقعیت‌های پیچیده اقتصادی هستند؛ این امر می‌تواند نتایجی را به همراه داشته باشد که هرچه از نظر ریاضی صحیح هستند، اما از نظر اقتصادی می‌توانند گمراه‌کننده یا نادرست باشند (Hicks, 1939, p. 23). میلتون فریدمن<sup>۱۴</sup> (۱۹۵۳) در مقاله مشهور «روش‌شناسی اقتصادی اثباتی» خاطرنشان می‌سازد که بسیاری از مدل‌های ریاضی بر پایه فرضیات غیرواقعی (مانند عقلانیت کامل و اطلاعات نامحدود) بنا شده و به داده‌های تاریخی متکی هستند. این مسئله موجب می‌شود که این مدل‌ها در پیش‌بینی رخداد‌های آینده، به‌ویژه در شرایط شوک‌های غیرمنتظره، با خطاهای جدی مواجه شوند (Friedman, 1953, p. 41). لئونتیف (۱۹۷۱) در مقاله‌ای تحت عنوان «تب نظریه‌پردازی»، با انتقاد از گرایش فزاینده به تولید مدل‌های ریاضی پیچیده، هشدار داد که این مدل‌ها اغلب از مسائل واقعی اقتصاد فاصله گرفته و نتایج آن‌ها برای حل مشکلات جامعه «بیربط» است (Leontief, 1971, p. 104). سن<sup>۱۵</sup> (۱۹۸۷) استدلال می‌کند که تمرکز افراطی بر جنبه‌های فنی و ریاضی اقتصاد، باعث غفلت از مباحث اخلاقی، هنجاری و عدالت توزیعی شده است. وی معتقد است که اقتصاد نمی‌تواند از مسائل هنجاری و ارزشی جدا باشد (Sen, 1987, p. 45). تونی لاوسون<sup>۱۶</sup> (۱۹۹۷) در کتاب «اقتصاد و واقعیت» با نگاهی فلسفی به روش‌شناسی اقتصاد، استدلال می‌کند که روش‌های ریاضی فقط برای سیستم‌های بسته و ایستا مناسب هستند، در حالی که اقتصاد واقعی یک سیستم باز، پویا و وابسته به نهادها است. تحمیل شرایط ریاضی (مانند ایستایی) به واقعیت، باعث نادیده گرفتن ویژگی‌های ذاتی اقتصاد می‌شود (Lawson, 1997, p. 21). کروگمن در سال ۲۰۰۹ در مقاله «چگونه اقتصاددانان تا این حد اشتباه کردند؟» خاطرنشان می‌کند که اتکا به مدل‌های ریاضی که بازارها را ذاتاً پایدار و کارا تصویر می‌کردند، باعث شد اکثر اقتصاددانان نتوانند بحران مالی ۲۰۰۸ را پیش‌بینی کنند (Krugman, 2009, p. 12). فیلیپ میروفسکی (۲۰۱۳) در کتابی تحت عنوان «هرگز اجازه نده یک بحران جدی هدر رود» نشان می‌دهد که چگونه ریاضیات در اقتصاد در خدمت توجیه ایدئولوژی نئولیبرال قرار گرفته و از مدل‌های ریاضی برای طبیعی جلوه دادن نظام بازار آزاد و کاستن از نقش نظارتی دولت استفاده کرده است (Mirowski, 2013, p. 135). باتیستون و موناسترلو<sup>۱۷</sup> (۲۰۲۲) در نقد خود به مدل‌های تعادل عمومی پویای تصادفی (DSGE) اشاره می‌کنند. آنها اظهار داشتند که مدل‌های DSGE با وجود قرارگیری در هسته نظریه‌پردازی اقتصاد کلان مدرن، به دلیل ماهیت خطی و فرض تعادل دائمی، فاقد قابلیت پیش‌بینی شوک‌های سیستمی از قبیل بحران‌های مالی یا ریسک‌های آب‌وهوایی هستند (Battiston & Monasterolo, 2022, P. 422). از سوی دیگر، پیکتی<sup>۱۸</sup> (۲۰۲۲) با نگاهی ساختاری به مدل‌های رشد نئوکلاسیک انتقاد می‌کند که این مدل‌ها با تمرکز انحصاری بر متغیرهای کلان اقتصادی مانند سرمایه و بهره‌وری، نابرابری درآمد و ثروت را نه به عنوان عاملی تعیین‌کننده در پویایی رشد، بلکه به مثابه پیامد ثانویه در نظر می‌گیرند (Piketty, 2022, p. 52). این دیدگاه، موجب غفلت از بازخوردهای تاریخی و نهادی شده که در آن توزیع ناعادلانه منابع، می‌تواند مسیر رشد بلندمدت را تحت تأثیر قرار دهد و حتی منجر به رکود شود. در همین راستا، راورث<sup>۱۹</sup> (۲۰۲۱) نیز با تأکید بر محدودیت‌های مدل‌سازی خطی، بیان می‌کند که این مدل‌ها با نادیده گرفتن وابستگی متقابل اقتصاد و سیستم‌های اکولوژیکی، قادر به برآورد هزینه‌های واقعی ناشی از تخریب محیط زیست نیستند (Raworth, 2021, P. 110).

14 . Friedman, M

15 . Sen

16 . Lawson, T

17 . Battiston & Monasterolo

18 . Piketty

19 . Raworth

## ۲. روش شناسی مدل

مدل‌های ریاضی در اقتصاد خرد دارای اهمیت زیادی است و از ابزارهای مهمی هستند که از آن در تحلیل رفتار مصرف‌کنندگان و تولیدکنندگان استفاده می‌کنند. در بخش زیر به برخی از کاربردهای مهم مدل‌های ریاضی در اقتصاد خرد اشاره می‌شود.

از جمله مهم‌ترین مدل‌های ریاضی در اقتصاد خرد می‌توان به مدل تعادل مصرف‌کننده (بیشینه‌سازی مطلوبیت) اشاره کرد. این مدل نشان می‌دهد یک مصرف‌کننده چگونه با توجه به بودجه محدود خود، سبد کالاها را انتخاب می‌کند. شکل کلی این مدل به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(1) \max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) \text{ subject to } p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

که در آن  $U$ : تابع مطلوبیت،  $x_1$  و  $x_2$  به ترتیب مقادیر کالاهای اول و دوم،  $p_1$  و  $p_2$  قیمت کالاها و  $I$  درآمد مصرف‌کننده را نشان می‌دهند. شرط مرتبه اول (FOC) در رابطه (۱) به صورت رابطه (۲) نشان داده می‌شود.

$$(2) MRS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

در رابطه (۲)  $MRS$  نرخ نهایی جایگزینی و  $MU$  مطلوبیت نهایی است (واریان<sup>۲۰</sup>، ۲۰۱۴، ۷۰-۵۵).

مدل بنگاه (بیشینه‌سازی سود) از دیگر مدل‌های ریاضی پرکاربرد است. این مدل رفتار یک بنگاه را در انتخاب سطح تولید به منظور حداکثر کردن سود نشان می‌دهد. فرم کلی این مدل به شکل رابطه (۳) نشان داده می‌شود.

$$(3) \max_q \pi(q) = R(q) - C(q) = p \cdot q - C(q)$$

که در آن،  $\pi$  سود،  $p$  مقدار تولید،  $R(q)$  درآمد کل و  $C(q)$  هزینه کل است. شرط مرتبه اول در رابطه (۳) به صورت رابطه (۴) بیان می‌شود.

$$(4) MR = MC \quad \text{or} \quad p = MC(q)$$

در رابطه (۴)  $MR$  درآمد نهایی و  $MC$  هزینه نهایی است (پارلوف<sup>۲۱</sup>، ۲۱۸، ۲۲۵-۲۲۰). مدل دیگر، مدل تعادل عمومی یا جعبه اجورث<sup>۲۲</sup> است. این مدل تبادل بین دو فرد و چگونگی دستیابی به تخصیص کارا را تحلیل می‌کند. شرط بهینگی پارتو در این مدل به صورت رابطه (۵) است.

$$(5) MRS^A = MRS^B$$

- 20 . Varian
- 21 . Perloff
- 22 . Edgeworth

که در آن  $MRS$  برای دو فرد A و B محاسبه می‌شود (مس‌کال<sup>۲۳</sup> و همکاران، ۱۹۹۵، 519-525). مدل بازار رقابتی: تعیین قیمت و مقدار از دیگر مدل‌هاست. در این مدل، قیمت و مقدار تعادلی در یک بازار رقابتی محاسبه می‌شود. شرط تعادل در این مدل به شل رابطه (۶) تعریف می‌شود.

$$(6) Q_d(p) = Q_s(p)$$

که در آن  $Q_d$  تقاضا و  $Q_s$  عرضه است (منکیو، ۲۰۲۱، ۸۰-۷۵). مهم‌ترین ویژگی این مدل‌ها درک صحیح و منطقی رفتار عوامل اقتصادی و تحلیل بازارها در اقتصاد خرد هستند.

#### ۴. نتیجه‌گیری

ریاضیات به عنوان ابزاری ضروری در اقتصاد، امکان تحلیل دقیق و سیاست‌گذاری کمی را فراهم کرده است. با این حال، مدل‌های ریاضی به دلیل ساده‌سازی واقعیت‌های پیچیده و اتکا به فرضیات غیرواقعی، در پیش‌بینی بحران‌ها و انعکاس کامل پیچیدگی‌های نظام اقتصادی با محدودیت مواجهند. برای بهره‌گیری مؤثر از این ابزار، لازم است مدل‌ها با در نظرگیری عوامل نهادی، رفتاری و زیست‌محیطی تکمیل شوند. بنابراین، تلفیق ریاضیات با بینش‌های کیفی و چندرشته‌ای، راهکار بهینه برای تحلیل مسائل اقتصادی در دنیای واقعی است.

#### منابع

۱. خ. علیزاده، م. ح. پورکاظمی و م. کشاورز، کاربرد ریاضیات در اقتصاد اسلامی؛ مزایا و محدودیت‌ها، مطالعات اقتصاد اسلامی، شماره ۸، ۵۷-۹۰، ۱۳۹۴.
2. Battiston, S., & Monasterolo, I. (2022). Climate risk and financial stability: The limits of DSGE models. *Nature Climate Change*, 12 (5), 420-425.
3. Friedman, M. (1953). *Essays in positive economics*. University of Chicago Press.
4. Hicks, J. R. (1939). *Value and capital*. Oxford University Press.
5. Krugman, P. (2009, September 2). How did economists get it so wrong? *The New York Times Magazine*.
6. Lawson, T. (1997). *Economics and reality*. Routledge.
7. Leontief, W. (1971). Theoretical assumptions and nonobserved facts. *American Economic Review*, 61 (1), 1-7.
8. Mankiw, N. G. (2021). *Principles of microeconomics* (9th ed.). Cengage Learning.
9. Mas-Colell, A., Whinston, M. D., & Green, J. R. (1995). *Microeconomic theory*. Oxford University Press.



10. Mirowski, P. (2013). Never let a serious crisis go to waste: How neoliberalism survived the financial meltdown. Verso Books.
11. Perloff, J. M. (2018). Microeconomics (8th ed.). Pearson.
12. Piketty, T. (2022). Capital and ideology: Beyond simple mathematical models. American Economic Review, 112 (6), 45-60.
13. Raworth, K. (2021). Why economics needs a doughnut: From linear models to complex systems. Ecological Economics, 185, 107-115.
14. Samuelson, P. A. (1986). The collected scientific papers of Paul A. Samuelson (Vol. 5). MIT Press.
15. Sen, A. (1987). On ethics and economics. Oxford University Press.
16. Varian, H. R. (2014). Intermediate microeconomics: A modern approach (9th ed.). W.W. Norton & Company.



# کاربرد مبانی ریاضی در طراحی مدل‌های یادگیری فدرال و یادگیری ماشین کوچک برای تحلیل سیگنال‌های الکتروکاردیوگرام (ECG)

زهرا حسن زاده موروثی<sup>۱</sup>، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه میبد، یزد، ایران

[z.hasanzadeh2022@gmail.com](mailto:z.hasanzadeh2022@gmail.com)

دکتر حسین قانعی بافقی<sup>۲</sup>، عضو هیئت علمی گروه مهندسی کامپیوتر، دانشگاه میبد، یزد، ایران

[h.ghanai@meybod.ac.ir](mailto:h.ghanai@meybod.ac.ir)

دکتر فاطمه زارع مهرجردی<sup>۳</sup>، عضو هیئت علمی گروه مهندسی کامپیوتر، دانشگاه میبد، یزد، ایران

[fzare@meybod.ac.ir](mailto:fzare@meybod.ac.ir)

دکتر محسن سرداری زارچی<sup>۴</sup>، عضو هیئت علمی گروه مهندسی کامپیوتر، دانشگاه میبد، یزد، ایران

[sardari@meybod.ac.ir](mailto:sardari@meybod.ac.ir)

**چکیده:** با گسترش اینترنت اشیا پزشکی (IoMT) و دستگاه‌های پوشیدنی، نیاز به مدل‌های سبک و کم مصرف برای تحلیل سیگنال‌های زیستی افزایش یافته است. یادگیری ماشین کوچک و یادگیری فدرال از جمله رویکردهایی هستند که امکان پردازش داده‌ها را به صورت محلی و با حفظ حریم خصوصی فراهم می‌کنند. این پژوهش به تحلیل سیگنال‌های الکتروکاردیوگرام (ECG) با بهره‌گیری از مدل‌های یادگیری ماشین سبک<sup>۵</sup> و یادگیری فدرال<sup>۶</sup> می‌پردازد و نقش مبانی ریاضی همچون آمار، جبر خطی و آنالیز عددی را در بهبود عملکرد مدل‌های هوشمند بررسی می‌کند. هدف اصلی، ارائه‌ی رویکردی کارا برای تشخیص اختلالات قلبی در محیط‌های اینترنت اشیا پزشکی است که ضمن حفظ حریم خصوصی داده‌ها، از توان محاسباتی محدود دستگاه‌های پوشیدنی نیز بهره‌مند شود. در مرحله‌ی پیش پردازش، از فیلترهای ریاضی Butterworth و Wavelet برای حذف نویز و از نرمال‌سازی Z-Score برای افزایش پایداری یادگیری استفاده شده است. در بخش آموزش فدرال، الگوریتم FedProx جایگزین FedAvg شده تا با مشکل ناهمگونی داده‌ها مقابله کرده و پایداری مدل را بهبود دهد. نتایج آزمایشی بر روی دیتاست ECG\_Heartbeat\_Dataset نشان می‌دهد که الگوریتم FedAvg در چند دور نخست با سرعت بیشتری همگرا می‌شود و به دقت نهایی ۹۷/۴۸٪ دست می‌یابد، اما الگوریتم FedProx با وجود شروع کندتر، خطای نهایی کمتری (۰/۱۱۶۳ در مقابل ۰/۱۷۵۷) داشته و عملکرد تعمیم یافته‌تر و در نهایت دقتی اندک بالاتر ارائه می‌دهد. در مسیر آینده، استفاده از نسخه‌های سبک مدل‌های Transformer برای بهبود درک و ابستگی‌های زمانی بلند مدت در سیگنال‌های ECG پیشنهاد می‌شود.

**کلمات کلیدی:** یادگیری فدرال، یادگیری ماشین کوچک، بهینه‌سازی عددی، جبر خطی، سیگنال ECG

## ۱. مقدمه

ریاضیات هسته‌ی اصلی بسیاری از الگوریتم‌های هوش مصنوعی است و نقشی بنیادین در توسعه‌ی مدل‌های کارآمد برای تحلیل داده‌های پیچیده ایفا می‌کند. پیشرفت‌های اخیر در حوزه‌ی هوش مصنوعی، زمینه‌ساز تحول در تحلیل داده‌های زیستی به ویژه سیگنال‌های الکتروکاردیوگرام شده است. در این میان، دو فناوری نوظهور TinyML و یادگیری

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول

<sup>۳</sup> نویسنده مسئول

<sup>۴</sup> نویسنده مسئول

<sup>۵</sup> TinyML

<sup>۶</sup> Federated Learning

فدرال به عنوان دو رویکرد مکمل، توانسته‌اند پردازش هوشمند و ایمن داده‌های زیستی را به سطح دستگاه‌های کم مصرف و غیرمتمرکز گسترش دهند [۲].

ریاضیات به عنوان پایه‌ی نظری و محاسباتی این فناوری‌ها، نقش محوری در طراحی و آموزش مدل‌های یادگیری ایفا می‌کند. مفاهیمی مانند گرادینان نزولی، تحلیل ماتریسی، نظریه‌ی احتمال، فیلترگذاری فرکانسی و نرمال‌سازی آماری، ابزارهای اصلی برای بهینه‌سازی مدل‌های سبک و پایدار هستند [۱]. در زمینه‌ی سیگنال‌های ECG، چالش اصلی دستیابی به تعادل میان دقت بالا و محدودیت منابع محاسباتی است. یادگیری فدرال این امکان را فراهم می‌کند که مدل‌ها در مراکز درمانی مختلف، بدون انتقال داده‌های بیماران، آموزش یابند و بدین ترتیب هم امنیت داده‌ها حفظ شود و هم مدل نهایی جامع‌تر گردد [۲].

در این پژوهش، چارچوبی سبک مبتنی بر الگوریتم FedProx برای تحلیل داده‌های ECG از دیتاست ECG\_Heartbeat\_Dataset پیشنهاد شده است. تمرکز اصلی بر پیش پردازش ریاضی سیگنال، بهینه‌سازی همگرایی مدل و افزایش دقت تشخیص در محیط‌های غیرمتمرکز TinyML است.

## ۲. مبانی ریاضی مدل‌های FL و TinyML

### ۲-۱. بهینه‌سازی عددی در یادگیری فدرال

هدف اصلی در یادگیری فدرال، کمینه‌سازی تابع هزینه‌ی کلی است که میان نودهای محلی توزیع شده است. به بیان ریاضی، مسأله‌ی بهینه‌سازی کلی به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

$$F(w) = \sum_{k=1}^K f_k(w) \frac{n_k}{n} \quad (2.1)$$

که در آن  $f_k(w)$  تابع هزینه‌ی محلی هر نود  $k$ ،  $n_k$  اندازه‌ی داده‌های آن نود، و  $w$  بردار وزن‌های مدل است. هر کلاینت (نود محلی) وزن‌های خود را بر اساس روش گرادینان نزولی به روزرسانی می‌کند:

$$w_{t+1} = w_t - \eta \nabla f_k(w_t) \quad (2.2)$$

در این رابطه،  $\eta$  نرخ یادگیری و  $\nabla f_k(w_t)$  گرادینان محلی تابع هزینه در گام  $t$  است.

پس از چند مرحله به روزرسانی محلی، سرور مرکزی وزن‌های ارسال‌شده از کلاینت‌ها را با روش میانگین‌گیری فدرال (FedAvg) ترکیب می‌کند [۲]:

$$w_{t+1} = \sum_{k=1}^K w_t^k \frac{n_k}{n} \quad (2.3)$$

### ۲-۲. اصول آماری و نرمال‌سازی داده‌ها

سیگنال‌های ECG در دامنه‌های متفاوتی قرار دارند؛ بنابراین نرمال‌سازی داده‌ها برای جلوگیری از ناپایداری گرادینان‌ها و تسهیل یادگیری ضروری است. روش Z-Score متداول‌ترین روش است [۱]:

$$x' = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

که در آن  $\mu$  میانگین و  $\sigma$  انحراف معیار داده‌هاست. این تبدیل موجب یکنواختی مقیاس داده‌ها و تسریع همگرایی شبکه می‌شود.

### ۲-۳. فیلترهای ریاضی در پیش‌پردازش سیگنال ECG

در پیش‌پردازش، حذف نویز و استخراج ویژگی‌های کلیدی اهمیت بالایی دارد. دو فیلتر پرکاربرد عبارت‌اند از:

- **فیلتر Butterworth**: دارای پاسخ فرکانسی یکنواخت در باند گذر و حذف مؤلفه‌های ناخواسته ی فرکانسی بالا و پایین [۱]:
- **فیلتر Wavelet**: تجزیه ی سیگنال در مقیاس‌های زمانی-فرکانسی مختلف و حذف نویز بدون از بین بردن قله‌های مهم P، QRS، T.

## ۲-۴ نتیجه

بر اساس تحلیل عددی و شبیه سازی‌ها، الگوریتم FedAvg در شرایط داده‌های همگن عملکرد مطلوبی دارد، اما در داده‌های ناهمگن ممکن است دچار واگرایی شود. برای رفع این مشکل، نسخه‌ی اصلاح‌شده‌ی FedProx پیشنهاد شده است که عبارت جریمه‌ی زیر را به تابع هزینه اضافه می‌کند:

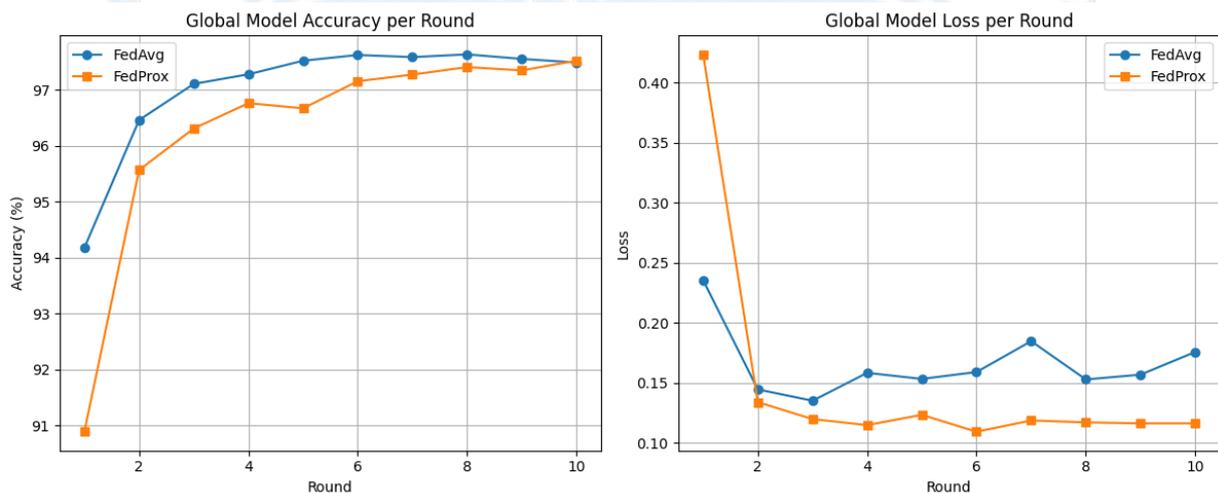
$$\min_w f_k(w) + \frac{\mu}{2} \|w - w_t\|^2 \quad (2.4)$$

در این رابطه،  $\mu$  ضریب تنظیمی است که با محدود کردن واگرایی بین مدل‌های محلی، پایداری آموزش فدرال را در محیط‌های غیرمتمرکز افزایش می‌دهد.

## ۳. نتایج عددی

به منظور ارزیابی عملکرد چارچوب پیشنهادی برای طبقه‌بندی سیگنال‌های ECG در محیط یادگیری فدرال، دو الگوریتم به روزرسانی FedAvg و FedProx تحت شرایط کاملاً مشابه پیاده‌سازی و مورد مقایسه قرار گرفتند. مجموعه داده‌ی مورد استفاده شامل ۱۲۳۹۹۸ نمونه از ۵ کلاس مختلف ضربان قلب بود که به‌صورت غیر همگن بین سه کلاسیت (گره) تقسیم شد.

هرکلاسیت، یک مدل سبک وزن Tiny-CNN را به صورت محلی آموزش داد و پس از هر ۱۰ دوره‌ی ارتباطی<sup>۷</sup>، مدل جهانی از میانگین وزنی مدل‌های محلی به روزرسانی گردید. ارزیابی نهایی بر روی مجموعه‌ی آزمون مستقل انجام شد.



شکل ۱: دقت و خطای مدل جهانی بر حسب دور ارتباطی

منبع شکل ۱:

"شبیه‌سازی شده توسط نویسنده با استفاده از داده‌های دیتاست ECG\_Heartbeat\_Dataset و الگوریتم‌های FedAvg و FedProx در محیط Google Colab".

<sup>7</sup> Communication Rounds

نتایج عددی دو الگوریتم در جدول ۱ نمایش داده شده است.

| الگوریتم | دقت در دور اول (%) | دقت نهایی (%) | میزان بهبود (%) | خطای نهایی آزمون | رفتار همگرایی          |
|----------|--------------------|---------------|-----------------|------------------|------------------------|
| FedAvg   | ۹۴/۱۸              | ۹۷/۴۸         | ۳/۳۰+           | ۰/۱۷۵۷           | همگرایی سریع و پایدار  |
| FedProx  | ۹۰/۸۹              | ۹۷/۵۲         | ۶/۶۳+           | ۰/۱۱۶۳           | شروع کندتر، تعمیم بهتر |

جدول ۱: مقایسه عملکرد الگوریتم‌ها

همان‌طور که در شکل ۱ و جدول ۱ مشاهده می‌شود، الگوریتم FedAvg در چند دور نخست با سرعت بیشتری همگرا می‌شود و به دقت نهایی ۹۷/۴۸٪ دست می‌یابد، اما الگوریتم FedProx با وجود شروع کندتر، خطای نهایی کمتری (۰/۱۱۶۳ در مقابل ۰/۱۷۵۷) داشته و عملکرد تعمیم یافته ترودر نهایت دقتی اندک (۹۷,۵۲٪) بالاتر ارائه می‌دهد. این امر نشان می‌دهد که افزودن عبارت جریمه در FedProx منجر به کنترل بهتر به روزرسانی‌های محلی و کاهش انحراف بین کلاینت‌ها شده است و در نتیجه، انسجام بالاتری در مدل جهانی ایجاد کرده است. به طور کلی، هر دو الگوریتم عملکردی رقابتی با دقتی بیش از ۹۷٪ ارائه داده‌اند که بیانگر اثربخشی چارچوب یادگیری فدرال در طبقه بندی سیگنال‌های ECG بر روی دستگاه‌های لبه ای با منابع محاسباتی محدود است. برای ادامه ی مسیر پژوهش، استفاده از معماری‌های سبک Transformer به منظور یادگیری وابستگی‌های بلند مدت در سیگنال‌های ECG پیشنهاد می‌شود. ترکیب این معماری‌ها با روش‌های فدرال می‌تواند دقت تشخیص را افزایش دهد، بدون آنکه هزینه‌ی محاسباتی یا مصرف حافظه به‌طور قابل توجهی افزایش یابد [۳].

#### ۴. نتیجه‌گیری

این پژوهش نشان داد که مبانی ریاضی شامل جبر خطی، تحلیل آماری و بهینه سازی عددی، پایه و زیربنای طراحی مدل‌های یادگیری فدرال و TinyML در تحلیل سیگنال‌های ECG هستند. استفاده از پیش پردازش ریاضی مانند نرمال سازی Z-Score، در کنار الگوریتم‌های بهینه سازی توزیع شده مانند FedProx، موجب بهبود دقت، پایداری و نرخ همگرایی مدل‌ها شد. پیاده‌سازی این چارچوب در محیط‌های کم مصرف TinyML، امکان اجرای بلادرنگ مدل‌ها روی دستگاه‌های پوشیدنی و سخت‌افزار IoT را فراهم می‌کند و حفاظت از حریم خصوصی بیماران را تضمین می‌نماید. نتایج نشان می‌دهد که ترکیب اصول ریاضی، فیلترهای سیگنال و یادگیری فدرال می‌تواند مسیر جدیدی برای توسعه سامانه‌های هوشمند، کم مصرف و امن در حوزه اینترنت اشیا سلامت ایجاد کند و آینده پژوهش‌ها را در زمینه معماری‌های سبک مانند Transformer و تحلیل بلند مدت سیگنال‌ها هموار نماید.

#### منابع

1. Eunchan Kim<sup>1</sup>, Jaehyuk Kim<sup>2</sup>, Juyoung Park<sup>3</sup>, Haneul Ko<sup>4</sup> and Yeunwoong Kyung, "TinyML-Based Classification in an ECG Monitoring Embedded System", *Journals/ CMC/ Vol.75, No.1, 2023, Issue published 06 February 2023*, <https://doi.org/10.32604/cmc.2023.031663>
2. [M. Ficco<sup>a</sup>](#), [A. Guerriero<sup>b</sup>](#), [E. Milite<sup>a</sup>](#), [F. Palmieri<sup>a</sup>](#), [R. Pietrantonio<sup>b</sup>](#), [S. Russo<sup>b</sup>](#), "Federated learning for IoT devices: Enhancing TinyML with on-board training", *Volume 104, April 2024, 102189*, <https://doi.org/10.1016/j.inffus.2023.102189>
3. LUCA BARBIERI, MATTIA BRAMBILLA, MARIO STEFANUTTI, "A Tiny Transformer-Based Anomaly Detection Framework for IoT Solutions", *IEEE Open Journal of Signal Processing (Volume: 4), 16 November 2023, DOI: 10.1109/OJSP.2023.3333756*

# مدل سازی پویایی هویت اسلامی در نسل جوان با استفاده از ریاضیات بازه ای

معصومه هزارجریبی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

[Masoomhe.hezarjaribi@pnu.ac.ir](mailto:Masoomhe.hezarjaribi@pnu.ac.ir)

ولی الله مرادیان، عضو هیات علمی گروه معارف اسلامی دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

[moradianmpnu@gmail.com](mailto:moradianmpnu@gmail.com)

**چکیده:** این مقاله با هدف تحلیل پویایی هویت اسلامی نسل جوان، از نظریه مجموعه‌های خاکستری بهره می‌گیرد. هویت دینی در سه بعد شناختی، عاطفی و رفتاری مدل‌سازی شده و بازه‌های عضویت خاکستری نشان‌دهنده ناپایداری و تغییرپذیری ایمان هستند. رویکرد ارائه شده امکان تحلیل علمی و تدریجی هویت اسلامی را فراهم می‌کند و با مفاهیم قرآنی رشد و مراتب ایمان همسوست. نتایج این پژوهش می‌تواند در برنامه‌ریزی‌های فرهنگی و تربیتی جوانان کاربردی باشد.

**کلمات کلیدی:** پویایی ایمان، نظریه مجموعه‌های خاکستری، هویت اسلامی جوانان.

## ۱. مقدمه

در دهه‌های اخیر، تحولات فرهنگی و رسانه‌ای موجب دگرگونی در هویت نسل جوان مسلمان شده است. هویت اسلامی، به‌عنوان بخش اصلی هویت فرهنگی جامعه، امری چندبعدی و پویا است که نیازمند تحلیل علمی است، زیرا ایمان و هویت از دیدگاه قرآن قابل افزایش و کاهش‌اند. نظریه مجموعه‌های فازی [1]، با معرفی درجه عضویت بین ۰ و ۱، مفاهیم نادقیق را مدل‌سازی می‌کند، اما در مواجهه با داده‌های ناقص و نامطمئن کافی نیست. نظریه مجموعه‌های خاکستری، که بازه‌ای  $[a, b]$  برای عضویت در نظر می‌گیرد، توسعه‌ای از مجموعه‌های فازی است و امکان تحلیل تغییرپذیری و عدم قطعیت هویت دینی را فراهم می‌آورد. بر این اساس، پژوهش حاضر با بهره‌گیری از نظریه خاکستری، مدلی مفهومی برای پویایی هویت اسلامی جوانان ارائه می‌دهد و پیوندی نوین بین مباحث دینی و روش‌های کمی فراهم می‌کند. در سال‌های اخیر، پژوهشگران به کاربرد روش‌های ریاضی برای تحلیل مفاهیمی در علوم اجتماعی مانند فرهنگ، ارزش‌ها و باورها روی آورده‌اند. برای نمونه، در ایران، پژوهشی به‌کارگیری منطق فازی را برای برآورد شاخص سرمایه اجتماعی در ایران بررسی کرده است [3]. همچنین، در سطح بین‌المللی نیز، پژوهشی با استفاده از روش فازی به ارزیابی ارزش‌ها و فرهنگ سازمانی پرداخته است. علاوه بر آن، پژوهش مرور نظام‌مند نشان داده است که نظریه «سیستم‌های خاکستری» در تحلیل سیستم‌های اجتماعی-اقتصادی که داده‌های ناقص یا نامطمئن دارند بسیار کاربردی است [2]. این مجموعه از مطالعات نشان می‌دهد که هم روش‌های فازی و هم روش‌های خاکستری می‌توانند ابزارهای قدرتمندی برای تحلیل پدیده‌هایی مانند هویت، باور و رفتار فرهنگی باشند

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

که دارای ابعاد مبهم و نامطمئن‌اند. مراجع [4] و [5] را ببینید. با وجود این، نظریه فازی تنها بخشی از واقعیت پدیده‌های انسانی را توضیح می‌دهد، زیرا داده‌های مربوط به ایمان، احساس و هویت اغلب ناقص، متناقض یا غیرقطعی هستند. به همین دلیل، در دهه‌های اخیر، پژوهشگران توجه خود را به نظریه مجموعه‌های خاکستری معطوف کرده‌اند که امکان تحلیل داده‌های ناقص را فراهم می‌سازد. بر این اساس، مقاله حاضر تلاشی است در جهت پیوند دادن این دو رویکرد فازی و خاکستری با مبانی دینی قرآن و تحلیل مفهومی «هویت اسلامی». بدین معنا که در حالی که نظریه فازی به ما اجازه می‌دهد مراتب ایمان را در یک طیف پیوسته بررسی کنیم، نظریه خاکستری امکان آن را فراهم می‌کند که ناپایداری و عدم قطعیت هویت دینی جوانان نیز در مدل لحاظ گردد.

## ۲. بیان مسئله

هویت اسلامی نسل جوان در جوامع امروز، در اثر مواجهه با فرهنگ جهانی، رسانه‌های نو و فناوری‌های ارتباطی، با نوعی ابهام، ناپایداری و چندگانگی روبه‌رو شده است. جوان مسلمان امروزی در عین تعلق به ارزش‌های دینی، در معرض جریان‌های فکری متنوعی قرار دارد که بر باور، احساس و رفتار او تأثیر می‌گذارند. از این رو، دیگر نمی‌توان هویت اسلامی را پدیده‌ای ثابت و تک‌بعدی در نظر گرفت. پرسش اساسی این پژوهش آن است که چگونه می‌توان هویت اسلامی نسل جوان را به‌گونه‌ای علمی و دقیق مدل‌سازی کرد تا هم پویایی و مراتب ایمان در آن لحاظ شود، و هم ابهام‌ها و تغییرپذیری‌های آن درک‌پذیر باشد؟ در مطالعات پیشین، تحلیل هویت معمولاً بر پایه‌ی منطق دوارزشی یا حتی در مواردی با استفاده از منطق فازی انجام شده است. منطق فازی توانسته است تا حدودی مرز میان دینداری و بی‌دینی را به‌صورت پیوسته نشان دهد و مفهوم «درجه ایمان» را از دوگانگی خارج سازد. اما با وجود این مزیت، مدل فازی فرض می‌کند که درجه عضویت هر فرد در یک مفهوم دقیقاً مشخص و قطعی است مثلاً  $0/6$  یا  $0/8$ . این فرض در پدیده‌های انسانی که با داده‌های ناقص، احساسات متغیر و شرایط اجتماعی پویا همراه‌اند، کافی نیست. به بیان دیگر، در نظریه فازی، ابهام پذیرفته می‌شود ولی عدم قطعیت در خود مقدار عضویت در نظر گرفته نمی‌شود. حال آن‌که در واقعیت اجتماعی، ممکن است نتوانیم با قطعیت بگوییم فردی با چه میزانی از ایمان یا تعلق فرهنگی زندگی می‌کند، بلکه فقط می‌توان بازه‌ای تقریبی از باور و رفتار او را تخمین زد. در چنین شرایطی، نظریه مجموعه‌های خاکستری که توسعه‌ی طبیعی نظریه فازی است، ابزار مناسب‌تری برای تحلیل مفاهیم فرهنگی و دینی محسوب می‌شود. این نظریه به‌جای تعیین عددی دقیق برای درجه عضویت، از یک بازه‌ی عضویت  $[a, b]$  استفاده می‌کند که میزان اطمینان یا ناپایداری اطلاعات را نیز دربرمی‌گیرد. بنابراین، در این پژوهش فرض می‌شود که هویت اسلامی جوانان را می‌توان در قالب یک مجموعه خاکستری چندبعدی مدل‌سازی کرد، به‌گونه‌ای که هر بعد از هویت (شناختی، عاطفی و رفتاری) دارای یک بازه‌ی عضویت خاکستری باشد. این مدل می‌تواند تغییرات تدریجی ایمان را در طول زمان نشان دهد، تأثیر متقابل عوامل اجتماعی و فرهنگی را بهتر بازتاب دهد و از ساده‌سازی‌های دوگانه (دیندار/غیردیندار) پرهیز کند. بدین ترتیب، استفاده از نظریه مجموعه‌های خاکستری در تحلیل هویت اسلامی، راهی نو برای فهم علمی و پویا از ایمان جوانان مسلمان ارائه می‌دهد و می‌تواند مبنایی برای مطالعات عمیق‌تر در حوزه‌های تربیتی، فرهنگی و روان‌شناختی باشد.

### ۳. اهمیت و ضرورت پژوهش

۳-۱. نوآوری نظری: ترکیب علوم اسلامی با نظریه‌های ریاضی نوین (مجموعه‌های خاکستری) راهی تازه برای تحلیل مفاهیم دینی فراهم می‌کند.

۳-۲. کاربرد فرهنگی: فهم دقیق‌تر از وضعیت هویت اسلامی جوانان می‌تواند به سیاست‌گذاری فرهنگی و تربیتی یاری رساند.

۳-۳. رویکرد قرآنی: قرآن ایمان را پدیده‌ای پویا معرفی می‌کند:

﴿وَالَّذِينَ اهْتَدَوْا زَادَهُمْ هُدًى﴾ (محمد، ۱۷).

این آیه نشان می‌دهد که هویت ایمانی قابلیت رشد و تغییر دارد.

۳-۴. پاسخ به چالش‌های هویتی: در جهان امروز، تحلیل علمی از پویایی ایمان جوانان برای مقابله با تضعیف فرهنگی ضروری است.

### ۴. اهداف پژوهش

اهداف مورد نظر بر اساس موارد زیر می‌باشد:

- تبیین مفهومی هویت اسلامی از دیدگاه قرآن و اندیشمندان اسلامی.
- بررسی مفهوم پویایی و مراتب در ایمان و عمل دینی.
- معرفی نظریه مجموعه‌های خاکستری و ظرفیت آن در تحلیل پدیده‌های مبهم.
- تبیین تطبیقی رابطه میان مراتب ایمان و درجات عضویت در مجموعه‌های خاکستری.
- ارائه الگویی مفهومی برای تحلیل پویایی هویت اسلامی در نسل جوان.

### ۵. مبانی نظری

قرآن کریم هویت مسلمان را بر پایه ایمان، عمل صالح و ولایت الهی تعریف می‌کند: ﴿إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ الَّذِينَ آمَنُوا بِاللَّهِ وَرَسُولِهِ ثُمَّ لَمْ يَرْتَابُوا﴾ (حجرات، ۱۵). ایمان و عمل دو بعد جدایی‌ناپذیرند و هر دو دارای مراتب‌اند. همان‌گونه که علامه طباطبایی در المیزان اشاره می‌کند، ایمان با معرفت، یقین و عمل صالح تقویت می‌شود و از حالت‌های «ضعیف» تا «کامل» نوسان دارد. در نظریه فازی، هر عنصر دارای درجه‌ای از عضویت  $\mu(x)$  بین ۰ و ۱ است، اما داده‌های واقعی ایمان و رفتار دینی اغلب ناقص یا متغیرند. نظریه مجموعه‌های خاکستری با تعیین بازه‌ای  $[a, b]$  برای عضویت، عدم قطعیت و تغییرپذیری داده‌ها را لحاظ می‌کند.

بر این اساس، هویت اسلامی نسل جوان در سه بعد اصلی شناختی (باور و معرفت دینی)، عاطفی (احساس تعلق) و رفتاری (عمل به ارزش‌ها) قابل مدل‌سازی است. به‌عنوان نمونه: ایمان قلبی [۰/۷, ۰/۹]، احساس تعلق فرهنگی [۰/۴, ۰/۶] و رفتار دینی [۰/۳, ۰/۵]، نشان‌دهنده نوسان و عدم قطعیت هر بعد است. قرآن ایمان را پدیده‌ای تدریجی و قابل افزایش معرفی می‌کند: ﴿وَالَّذِينَ اهْتَدَوْا زَادَهُمْ هُدًى﴾ (محمد، ۱۷)، ﴿لِيَزِدُّواْ اِيْمَانًا مَّعْ اِيْمَانِهِمْ﴾ (فتح، ۴) و ﴿زَادَهُمْ اِيْمَانًا﴾ (آل عمران، ۱۷۳).

از نظر مفهومی، هویت اسلامی هر فرد را می‌توان چنین مدل‌سازی کرد:  $H_y = \{(C, [a_1, b_1]), (E, [a_2, b_2]), (B, [a_3, b_3])\}$  که در آن  $H_y$  هویت اسلامی فرد  $y$ ،  $C$  بعد شناختی،  $E$  بعد عاطفی و  $B$  بعد رفتاری است و بازه‌های  $[a, b]$  دامنه نوسان یا عدم قطعیت هر بعد را نشان می‌دهند. این چارچوب، امکان تحلیل واقع‌بینانه و کمی پویایی هویت اسلامی و طراحی برنامه‌های تربیتی و فرهنگی هدفمند را فراهم می‌آورد.

## ۶. نتیجه‌گیری

این پژوهش نشان می‌دهد که هویت اسلامی نسل جوان پدیده‌ای پویا و چندبعدی است و می‌توان آن را با نظریه مجموعه‌های خاکستری به‌صورت علمی مدل‌سازی کرد. بازه‌های عضویت خاکستری امکان تحلیل تغییرپذیری و عدم قطعیت ایمان را فراهم می‌کنند. این رویکرد، مبنایی برای طراحی برنامه‌های تربیتی و فرهنگی متناسب با نیازهای جوانان ارائه می‌دهد.

## منابع

1. Deng, J. (1982) Control Problems of Grey Systems. *Systems & Control Letters*, 1(5), 288–294.
2. Javanmardi, E., and Sadeghi, S. (2020) Exploring Grey Systems Theory-Based Methods and Applications in Analyzing Socio-Economic Systems. *Sustainability*, 12(11), 4437.
3. Mozaffari, Z., Habibi, F., and Amani, R. (2024) Estimation of Social Capital Index in Iran Using the Fuzzy Logic. *Iranian Economic Review*, 28(2), 580-605.
4. Soyer, A. (2007) A fuzzy approach to value and culture assessment and an index. *Computers in Human Behavior*, 23(2), 1042-1053
5. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.

## بررسی کاربرد نظریه بازیها در شبکه های رقابتی مولد عمیق

شیرین میرعابدینی ، عضو هیئت علمی گروه کامپیوتر، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران  
*Sh\_Mirabedini@pnu.ac.ir*

سیده فاطمه نورانی، عضو هیئت علمی گروه کامپیوتر، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران  
*SF.Noorani@pnu.ac.ir*

**چکیده:** نظریه بازی با استفاده از مدل های ریاضی به تحلیل روش های همکاری یا رقابت موجودات منطقی و هوشمند می پردازد. نظریه بازی، شاخه ای از ریاضیات کاربردی است که در علوم اجتماعی و به ویژه در اقتصاد، زیست شناسی، مهندسی، علوم سیاسی، روابط بین الملل، بازاریابی، فلسفه، علوم رایانه و خصوصاً حوزه یادگیری ماشین مورد استفاده قرار می گیرد. نظریه بازی تلاش می کند تا رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت راهبردی (تضارب منافع) را مدل سازی نماید. این موقعیت، زمانی پدید می آید که موفقیت یک فرد وابسته به راهبردهایی است که دیگران انتخاب می کنند. هدف نهایی این دانش، یافتن راهبرد بهینه برای بازیکنان است. یکی از جذابترین و جدیدترین ایده ها در کاربرد نظریه بازیها در زمینه هوش مصنوعی و یادگیری ماشین، شبکه های رقابتی مولد عمیق (GAN) هستند که علاوه بر تولید تصاویر، در شناسایی نرم افزارهای مخرب و امنیت نرم افزار، ترجمه ماشینی و پردازش زبان طبیعی، رنگ آمیزی تصاویر، ساخت مدل سه بعدی از یک تصویر نیز از این شبکه ها استفاده شده است. در این مقاله کاربرد نظریه بازیها در شبکه های عمیق و برخی از انواع شبکه های رقابتی مولد عمیق مورد بررسی قرار میگیرد.

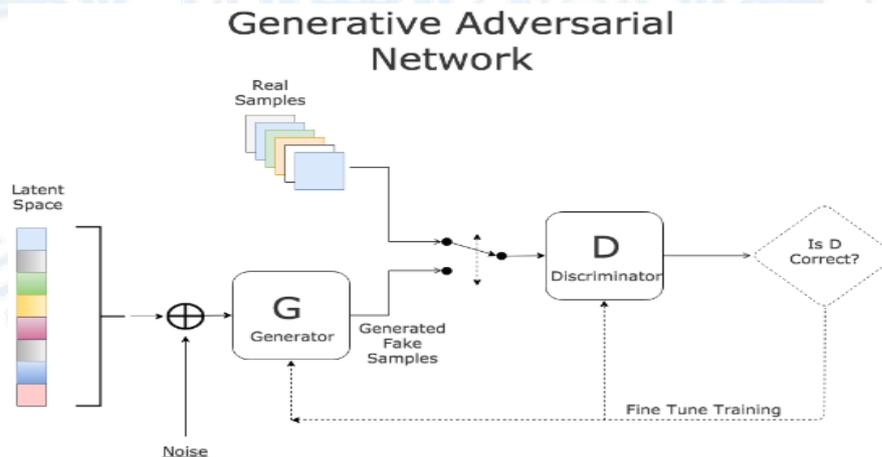
**کلمات کلیدی:** شبکه های عمیق، شبکه های مولد رقابتی، نظریه بازی، یادگیری عمیق، یادگیری ماشین

<sup>1</sup> . Corresponding Author

## ۱. مقدمه

نظریه بازی‌ها مطالعه مدل‌های ریاضیاتی تعاملات میان چندین بازیکن است که تصمیمات هر بازیکن بر نتایج دیگر تاثیر می‌گذارد. یکی از برجسته‌ترین شاخه‌های شبکه‌های مولد، شبکه رقابتی مولد عمیق (GAN) است. ترکیب دو حوزه شبکه‌های عمیق با نظریه بازیها عمدتاً بر این پایه استوار می‌باشد: می‌توان فرآیند آموزش یک GAN را به عنوان حل یک بازی استراتژیک میان دو یا چند عامل دید و از ابزارها و تحلیل‌های نظریه بازی‌ها برای تحلیل، طراحی و بهبود آموزش استفاده کرد.

شبکه‌های رقابتی مولد عمیق از دو بخش اصلی مولد و متمایزگر تشکیل شده است که هر یک بصورت شبکه‌های عمیق غالباً از نوع پیچشی طراحی می‌گردند. زیرشبکه مولد جهت ایجاد تصاویر جدید غیر واقعی و زیرشبکه متمایزگر مسئول تمایز تصاویر ساختگی از تصاویر واقعی است. در این ساختار که بر اساس نظریه بازی بنیانگذاری شده است تعادل نش با بهینه سازی عملکرد هر دو بخش منطبق شده است به این معنی که عملکرد بهینه کل سیستم در گرو عملکرد بهینه هر دو بخش مذکور است یعنی مولد با تمام توان تلاش می‌کند تا تصاویر ساختگی نزدیک به واقع تولید نماید و متمایزگر با تمام توان تلاش می‌کند تا تشخیص تصاویر ساختگی را به درستی انجام دهد، لذا این دور و تسلسل تا جایی ادامه پیدا می‌کند که تصاویر تولید شده توسط مولد بعلت شباهت بیش از حد به تصاویر واقعی قابل تشخیص توسط متمایزگر نباشد و در این نقطه بهترین تصاویر ساختگی تولید می‌گردد و تعادل نش نظریه بازی نیز در همین نقطه محقق خواهد شد. ساختار کلی این شبکه‌ها در شکل ۱ قابل مشاهده است.



شکل (۱) ساختار کلی شبکه‌های رقابتی مولد

## ۲. نحوه کار شبکه‌های رقابتی مولد از دیدگاه نظریه بازی

همانطور که بیان شد شبکه‌های رقابتی مولد شامل دو شبکه عصبی عمیق با نام‌های مولد و متمایزگر بوده که شبکه مولد مسئول ایجاد داده معتبر از داده‌های ورودی (شامل نویز یا داده دیگر) است و شبکه متمایزگر مسئول تجزیه

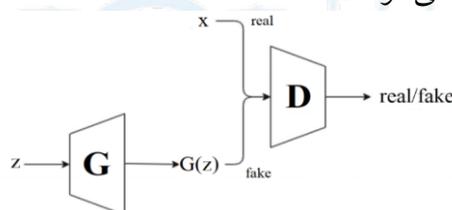
<sup>2</sup> Generator

<sup>3</sup> Discriminator

و تحلیل داده‌ها است و مشخص می‌کند که داده‌های تولید شده واقعی یا ساختگی هستند. این شبکه در واقع چیزی شبیه بازی مینیماکس است که دو زیرشبکه مولد و متمایزگر، شرکت کنندگان اصلی آن هستند. مینیماکس یک قانون تصمیم‌گیری است که در نظریه بازی و آمار برای مینیمم کردن احتمال شکست و ضرر در بدترین حالت که بیشترین احتمال ضرر را دارد از آن استفاده می‌شود. این قانون برای این کاربرد در قالب رابطه ۱ قابل نمایش است:

$$\min_G \max_D f(D, G) = E_{x \sim p_{data}(x)} \log D(x) + E_{z \sim p_z(z)} \log(1 - D(G(z))) \quad (1)$$

مطابق شکل ۲ هر دو طرف بازی توسط دو تابع معرفی می‌شوند که با توجه به تفاوت ورودی و پارامترها، دو تابع تعریف شده نیز متفاوت هستند؛ تابع متمایزگر  $D$  با ورودی  $x$  و  $G(z)$  است و تابع مولد  $G$  ورودی  $z$  که یک نویز تولید شده از یک توزیع احتمالی گاوسی است را دریافت می‌کند و  $G(z)$  یک نمونه تولید شده توسط تابع  $G$  است. هدف بازی مینیماکس در اینجا کم کردن فاصله داده تولید شده با داده واقعی است. اگر داده‌های واقعی بعنوان ورودی متمایزگر  $D$  ارائه شود، انتظار می‌رود خروجی این تابع عدد یک باشد. اما اگر ورودی متمایزگر، داده تولید شده توسط مولد  $G(z)$  باشد حاصل خروجی می‌بایست به صفر میل کند. بنابراین تابع بهینه سازی شبکه‌های مولد رقابتی به صورت رابطه فوق تعریف می‌شود.



شکل (۲) شمایی از شبکه‌های رقابتی مولد

$\log D(x)$  خروجی متمایزگر زمانی توسط این شبکه به صورت واقعی بر چسب می‌خورد که ورودی  $x$  از داده‌های واقعی یا مجموعه داده‌ها باشد.  $\log(1 - D(G(z)))$  این تابع محاسبه می‌کند چگونه شبکه متمایزگر بر روی ورودی که از سمت مولد به آن داده می‌شود عمل کرده است.  $D(G(z))$  به داده‌ای اشاره دارد که متمایزگر آن را واقعی قلمداد کرده و  $1 - D(G(z))$  به داده‌ای اشاره دارد که متمایزگر آن را ساختگی پنداشته است. اگر تمام این اجزاء در کنار هم لحاظ شوند مشخص می‌شود که وظیفه متمایزگر این است که مقدار معادله (۲) را تا جایی که امکان پذیر هست افزایش دهد؛ در حالی که وظیفه مولد این است که مقدار معادله مذکور را تا حد امکان کمینه نماید. معماری‌های مختلف و متنوعی از شبکه‌های رقابتی مولد نظریه بازی محور، بر اساس نیاز و کاربرد معین، توسط محققین این حوزه ارائه گردیده از جمله شبکه‌های رقابتی مولد تماماً متصل شبکه‌های رقابتی مولد شرطی، شبکه‌های رقابتی مولد پیچشی که همگی بر پایه نظریه بازیها بنا شده‌اند.

### ۳. نتایج اصلی

استفاده از چارچوب نظری بازی‌ها برای طراحی روش‌های آموزش باعث شده مشکلات رایجی چون ناپایداری، همگرایی ناپذیری و پرش پارامترها کاهش یابند. اما محدودیت‌ها و چالش‌های این حوزه عبارتند از:

حتی در مدل ساده GAN ممکن است هیچ تعادل نش وجود نداشته باشد یا یافتن آن بسیار دشوار باشد. تحلیل نظریه بازی‌ها در فضای پارامتری بزرگ (مثلاً شبکه‌های عمیق با میلیون‌ها پارامتر) بسیار پیچیده است و اغلب فرضیات نظری ساده‌سازی شده‌اند. روش‌های عملی مبتنی بر نظریه بازی‌ها ممکن است هزینه محاسباتی زیادی داشته باشند یا در عمل پیچیده باشند. بسیاری از پژوهش‌ها هنوز به صورت مفهومی باقی مانده‌اند و کاربرد صنعتی یا تولیدی‌شان نسبتاً محدود است. تضمین همگرایی، پایداری و کیفیت تولید در شبکه‌های مولد هنوز چالش جدی است.

#### چشم‌اندازهای آینده

توسعه چارچوب‌های بازی چندعامله و تعمیم به حالت‌های همکاری و تعارض میان چند تولیدکننده و/یا چند تشخیص‌دهنده. ادغام نظریه بازی‌ها با سایر روش‌های پیشرفته در یادگیری عمیق، مثل یادگیری تقویتی و شبکه‌های مولد شرطی. تحلیل دقیق‌تر تعادل‌ها (نش، تعادل مجاور، تعادل مختلط) در فضای پارامتری عظیم مدل‌ها و توسعه روش‌های آموزشی با تضمین‌هایی از لحاظ نظری. تحقیق روی پایداری، همگرایی و ردیابی مسیرهای آموزش در قالب بازی برای بهبود کیفیت نهایی تولید مولد.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله بررسی شد که چگونه نظریه بازی‌ها می‌تواند چارچوب تحلیلی و کاربردی برای شبکه‌های مولد عمیق فراهم نماید. این ترکیب باعث شده که تعامل میان مولد و متمایزگر به صورت بازی استراتژیک دیده شود و بتوان روش‌هایی برای بهبود آموزش، پایداری، طراحی معماری و تحلیل همگرایی ارائه داد. با این وجود، محدودیت‌های نظری و عملی وجود دارد و مسیرهای آینده پژوهشی جذاب و گسترده هستند.

#### منابع

1. I. Goodfellow *et al.* (2014) Generative adversarial nets, in *Advances in neural information processing systems*, pp. 2672-2680 .
2. E. L. Denton *et al.* (2015) Deep generative image models using a laplacian pyramid of adversarial networks, in *Advances in neural information processing systems*, pp. 1486-1494 .
3. I. Goodfellow ( 2016) NIPS 2016 tutorial: Generative adversarial networks, *arXiv preprint arXiv:1701.00160*, [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1701.00160>.
4. A. Radford, L. Metz, and S. Chintala(2015) Unsupervised representation learning with deep convolutional generative adversarial networks ,*arXiv preprint arXiv:1511.0643*,.
5. J. Wu, et all. ( 2016) Learning a probabilistic latent space of object shapes via 3d generative-adversarial modeling, in *Advances in neural information processing systems*, pp. 82-90 .
6. X. Chen, et all. (2016) Infogan: Interpretable representation learning by information maximizing generative adversarial nets, in *Advances in neural information processing systems*, pp. 2172-2180 .

## تحلیل پوششی داده‌ها در ارزیابی کارایی دانشگاه‌ها: مروری بر چارچوب‌ها و ملاحظات پیشرفته

خدیجه قاضیانی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه آیندگان، صندوق پستی ۵۳۶۱۷-۴۶۸۱۸، مازندران، ایران  
[ghaziyani89@gmail.com](mailto:ghaziyani89@gmail.com)  
سحر ایرجی راد، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، ریاضی، دانشگاه آیندگان، صندوق پستی ۵۳۶۱۷-۴۶۸۱۸، مازندران، ایران.

### چکیده:

در پاسخ به ضرورت استراتژیک ارزیابی عملکرد و تخصیص بهینه منابع در نهادهای آموزش عالی، این مقاله به بررسی جامع تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) به عنوان یک متدولوژی ناپارامتری کلیدی می‌پردازد. ماهیت چندبعدی فرآیندهای دانشگاهی (ورودی‌ها و خروجی‌های متعدد) ارزیابی عملکرد را با چالش مواجه می‌سازد، که DEA ابزاری قدرتمند برای سنجش کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) در این شرایط ارائه می‌دهد. هدف این پژوهش، ارائه یک چارچوب تحلیلی برای انتخاب و تعریف متغیرهای ورودی و خروجی در ارزیابی کارایی دانشگاه‌ها، به همراه بررسی مدل‌های پیشرفته (مانند گنجاندن خروجی‌های نامطلوب) است تا راهنمایی عملی برای پژوهشگران و مدیران فراهم آید.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، ارزیابی کارایی، آموزش عالی، مدل CCR، مدل BCC، خروجی‌های نامطلوب، مدل‌های شبکه‌ای.



<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

## ۱. مقدمه: اهمیت ارزیابی عملکرد و ضرورت DEA

ارزیابی دقیق عملکرد و کارایی، به‌ویژه با افزایش رقابت و محدودیت منابع، برای موسسات آموزش عالی به یک ضرورت استراتژیک تبدیل شده است. دانشگاه‌ها منابع قابل توجهی (سرمایه، نیروی انسانی، زیرساخت) را مدیریت می‌کنند و تحت فشار هستند تا کارایی خود را در تبدیل این ورودی‌ها به خروجی‌های ارزشمند (مانند فارغ‌التحصیلان و مقالات علمی) اثبات کنند. تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، یک روش ناپارامتری مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی، به دلیل توانایی‌اش در مدیریت همزمان ورودی‌ها و خروجی‌های متعدد، به ابزاری قدرتمند برای ارزیابی کارایی نسبی DMUها تبدیل شده است. این تکنیک با ایجاد مرز کارایی، بهترین عملکردها را مشخص کرده و DMUهای کارا را از ناکارا تفکیک می‌نماید.

## ۲. مبانی نظری و مدل‌های پایه DEA

DEA به‌عنوان یک مدل بهینه‌سازی ریاضی، برای ارزیابی کارایی مجموعه‌ای از واحدهای همگن مورد استفاده قرار می‌گیرد. DMU یا "واحد تصمیم‌گیرنده" در آموزش عالی می‌تواند شامل دانشگاه‌ها، دانشکده‌ها یا گروه‌های آموزشی باشد.

### ۲.۱. اصول بنیادین و مرز کارایی

هدف اصلی DEA، شناسایی DMUهایی است که بر روی "مرز کارایی" قرار دارند. امتیاز کارایی هر DMU به‌عنوان نسبت خروجی‌های وزن‌دار شده به ورودی‌های وزن‌دار شده تعریف می‌شود. DMUهایی که به امتیاز ۱ دست می‌یابند، کارا و واحدهای با امتیاز کمتر از ۱، ناکارا تلقی می‌شوند. برای واحدهای ناکارا، DEA علاوه بر تعیین میزان ناکارایی، واحدهای کارا را به عنوان الگو (Benchmark) برای بهبود عملکرد معرفی می‌کند.

### ۲.۲. مدل‌های پایه: BCC و CCR

دو مدل اصلی DEA، مدل‌های CCR (بازده به مقیاس ثابت) و BCC (بازده به مقیاس متغیر) هستند:

- مدل **CCR (Charnes, Cooper, Rhodes)** (۱۹۷۸): این مدل فرض می‌کند که افزایش متناسب در ورودی‌ها، منجر به افزایش همان نسبت در خروجی‌ها می‌شود. مدل CCR، کارایی فنی کل (Technical Efficiency) را اندازه‌گیری می‌کند.
- مدل **BCC (Banker, Charnes, Cooper)** (۱۹۸۴): این مدل با افزودن قید تحدب، فرض بازدهی به مقیاس متغیر را در نظر می‌گیرد. مدل BCC، کارایی فنی خالص (Pure Technical Efficiency) را اندازه‌گیری می‌کند که کارایی مدیریتی را بدون تأثیر مقیاس عملیات نشان می‌دهد.

### ۲.۳. تجزیه کارایی (Efficiency Decomposition)

انتخاب بین CCR و BCC یک تصمیم حیاتی روش‌شناختی است. کاربرد همزمان این دو مدل، امکان تجزیه کارایی کل (CCR) به دو جزء کارایی فنی خالص (BCC) و کارایی مقیاس (Scale Efficiency) را فراهم می‌سازد. این تجزیه به مدیران اجازه می‌دهد تا منشأ ناکارایی را به طور دقیق تشخیص دهند: آیا ناکارایی ناشی از عملکرد مدیریتی ضعیف است یا به دلیل عدم عملکرد در مقیاس بهینه؟

## ۳. انتخاب متغیرهای ورودی و خروجی در آموزش عالی

نتایج DEA به شدت به کیفیت و انتخاب دقیق ورودی‌ها و خروجی‌ها وابسته است. یک انتخاب نادرست می‌تواند ارزیابی‌های گمراه‌کننده و رتبه‌بندی‌های غیرواقعی به دنبال داشته باشد.

### ۳.۱. متغیرهای متداول

بر اساس مطالعات پیشین، متغیرهای اصلی مورد استفاده در ارزیابی دانشگاه‌ها عبارتند از:

• ورودی‌ها:

- منابع انسانی: تعداد اعضای هیئت علمی، تعداد کارمندان غیرهیئت علمی.
- منابع مالی: بودجه جاری سالیانه، میزان گرنت‌های پژوهشی دریافتی، هزینه‌های عملیاتی.
- ورودی‌های دانشجویی: تعداد دانشجویان ورودی یا ثبت‌نامی.

• خروجی‌ها:

- خروجی‌های آموزشی: تعداد دانشجویان فارغ‌التحصیل، تعداد دانشجویان در حال تحصیل.
- خروجی‌های پژوهشی: تعداد مقالات علمی منتشر شده، تعداد مقالات نمایه شده در پایگاه‌های معتبر (مانند Scopus, Web of Science) و تعداد ثبت اختراعات.
- خروجی‌های اجتماعی و خدماتی: برگزاری کارگاه‌های آموزشی و خدمات اجتماعی.

۳.۲. ملاحظات پیشرفته و نوآوری‌ها

برای دستیابی به یک مدل واقع‌بینانه، باید نوآوری‌ها و ملاحظات پیشرفته‌تری در مدل DEA لحاظ شود:

- خروجی‌های نامطلوب (Undesirable Outputs): فرآیندهای دانشگاهی ممکن است خروجی‌های ناخواسته‌ای مانند نرخ انصراف دانشجویان یا ضایعات پژوهشی داشته باشند. نادیده گرفتن این موارد منجر به ارزیابی نادرست کارایی می‌شود. مدل‌های پیشرفته DEA مانند مدل SBM (Slack-Based Measure) قادر به مدیریت مستقیم خروجی‌های نامطلوب هستند.
- مدل‌های شبکه‌ای (Network DEA): مدل‌های سنتی دانشگاه را به‌عنوان یک "جعبه سیاه" می‌بینند و ناکارایی‌های داخلی را پنهان می‌کنند. مدل‌های شبکه‌ای، فرآیند تولید دانشگاه را به چند مرحله (مانند آموزش و پژوهش) تقسیم می‌کنند و با بررسی ورودی‌ها و خروجی‌های مشترک در هر مرحله، منشأ ناکارایی را دقیق‌تر مشخص می‌نمایند.
- عوامل محیطی و کیفی: عواملی مانند نوع دانشگاه یا منطقه می‌توانند بر کارایی تأثیرگذار باشند. DEA به طور مستقیم این متغیرها را لحاظ نمی‌کند؛ اما می‌توان از روش‌های دو مرحله‌ای استفاده کرد: محاسبه نمرات کارایی در مرحله اول و سپس بررسی تأثیر عوامل محیطی بر این نمرات با استفاده از تحلیل رگرسیون توبیت (Tobit Regression) در مرحله دوم.

۴. کاربردها و نتایج کلیدی در آموزش عالی

۴.۱. مطالعات کاربردی و ابزارهای پیاده‌سازی

روش DEA در ایران به‌طور گسترده برای ارزیابی عملکرد دانشگاه‌ها به کار رفته است. این پژوهش‌ها DMUهای کارا و ناکارا را شناسایی می‌کنند. برای مثال، مطالعات موردی نشان داده‌اند که ضعف اصلی گروه‌های آموزشی معمولاً در ابعاد پژوهشی و خدماتی تشخیص داده می‌شود. همچنین، چالش دسترسی به داده‌های دقیق و یکپارچه در ایران، پژوهشگران را به استفاده از داده‌های عمومی‌تر یا جمع‌آوری مستقیم داده‌ها از خود دانشگاه‌ها سوق داده است.

برای پیاده‌سازی DEA، از نرم‌افزارهای تجاری مانند LINGO و نرم‌افزارهای تخصصی‌تر مانند DEA-Master استفاده می‌شود. اخیراً، کتابخانه‌های متن‌باز در زبان‌های برنامه‌نویسی مانند R و Python (مانند dea-tools) نیز انعطاف‌پذیری بیشتری را برای تحلیل فراهم کرده‌اند.

## ۴.۲. یافته‌های اصلی DEA

نتایج تحلیل پوششی داده‌ها، بینش‌های حیاتی را برای تصمیم‌گیری‌های مدیریتی فراهم می‌کند:

- شناسایی واحدهای کارا و ناکارا: تعیین بهترین عملکردها.
- تعیین اهداف بهبودی: مشخص کردن مقادیر مطلوب ورودی/خروجی برای DMUهای ناکارا به منظور رسیدن به مرز کارایی.
- معرفی واحدهای الگو: معرفی مجموعه‌ای از DMUهای کارا به‌عنوان هدف قابل دستیابی برای واحدهای ناکارا.

## ۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادات پژوهشی

DEA به عنوان یک ابزار قدرتمند و انعطاف‌پذیر، برای ارزیابی کارایی دانشگاه‌ها با مدیریت همزمان ورودی‌ها و خروجی‌های متعدد، تأیید شده است. تأکید بر انتخاب دقیق و توجیهی متغیرهای ورودی و خروجی به‌عنوان گام اساسی در تضمین اعتبار نتایج DEA ضروری است.

برای تحقیقات آتی، پیشنهاد می‌شود که پژوهش‌ها به سوی مدل‌های پیشرفته‌تر حرکت کنند:

- مدل‌های با خروجی‌های نامطلوب (SBM): گنجاندن متغیرهایی مانند نرخ انصراف یا ضایعات در مدل‌های پیشرفته، برای ارزیابی واقع‌بینانه‌تر.
- تحلیل‌های شبکه‌ای: استفاده از مدل‌های Network DEA برای تحلیل فرآیندهای داخلی دانشگاه (آموزش و پژوهش) و درک بهتر منشأ ناکارایی.
- تحلیل‌های پویا: ارزیابی کارایی در طول زمان با استفاده از شاخص‌هایی مانند شاخص مالم کوئیست (Malmquist Productivity Index).
- بررسی عوامل محیطی: استفاده از رگرسیون توبیت برای بررسی تأثیر متغیرهای محیطی بر نمرات کارایی. در نهایت، با توجه به پویایی سیستم‌های آموزش عالی، DEA باید فراتر از رتبه‌بندی ساده عمل کرده و به‌عنوان یک ابزار تشخیصی برای شناسایی نقاط ضعف و تعیین استراتژی‌های مدیریتی بهینه به کار گرفته شود.

## منابع

- [۱] بالوئی جام‌خانه و همکاران (۱۳۹۲)، ارزیابی عملکرد و رتبه‌بندی گروه‌های آموزشی دانشگاه...
- [۲] تحلیل پوششی داده‌ها: راهکاری برای ارزیابی عملکرد و کارایی - اس دیتا.
- [۳] تحلیل پوششی داده‌ها (DEA).
- [۴] مقدمه‌ای بر تحلیل پوششی داده‌ها و کاربرد آن در صنعت نفت - فصلنامه توسعه تکنولوژی صنعتی.
- [۵] تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) - مفاهیم و کاربردها - مجله فرادرس.
- [۶] تحلیل پوششی داده‌ها DEA چیست - شرکت بهین گستر گیتی.
- [۷] Full article: University efficiency evaluation using data envelopment analysis: future research agenda - Taylor & Francis Online.
- [۸] Assessing the Efficiency of Public Universities through DEA. A Case Study - MDPI.
- [۹] Benchmarking of Academic Departments using Data Envelopment Analysis (DEA) - ShareOK.
- [۱۰] (PDF) The Efficiency of a University's Colleges: A Case Study Using Data Envelopment Analysis - ResearchGate ...

# مدل های ریاضی داده محور در پیش بینی شاخص های سلامت و عوارض دارویی

ژاله شیرین نژاد<sup>۱</sup>، فارغ التحصیل دکتری ریاضیات کاربردی دانشگاه آزاد، اهواز، ایران [zhaleshirin@gmail.com](mailto:zhaleshirin@gmail.com)

صمد صالحی<sup>۲</sup>، فارغ التحصیل دکتری فیزیولوژی ورزشی دانشگاه علوم پزشکی اهواز، ایران

[Salehisamad83@gmail.com](mailto:Salehisamad83@gmail.com)

**چکیده:** در سال های اخیر، استفاده از مدل های داده محور در تحلیل داده های بالینی و پیش بینی شاخص های سلامت بیماران رشد چشمگیری یافته است. این مقاله به بررسی دو رویکرد مکمل یادگیری ماشین میپردازد: تحلیل داده های کلینیک آرتیمیس اهواز در حوزه کاهش وزن و سلامت متابولیک [۱] و مدل سازی پیش بینانه داده های سوابق سلامت الکترونیک (EHR) برای پیش بینی عوارض جانبی دارویی (ADE) [۲]. هدف اصلی، ارزیابی عملکرد الگوریتم های مختلف یادگیری ماشین (مانند جنگل تصادفی، شبکه عصبی مصنوعی و بردار پشتیبان) در دو محیط داده های متفاوت با حجم های متفاوت است. هر دو رویکرد از مدل های یادگیری ماشین از جمله جنگل تصادفی (RF)، شبکه عصبی مصنوعی (NN) و الگوریتم ژنتیک (GA) برای بهینه سازی پارامترها و بهبود عملکرد مدل استفاده کرده اند. نتایج نشان میدهد که در داده های محدود کلینیکی (مطالعه آرتیمیس)، مدل RF قادر به دستیابی به ضریب تعیین  $R^2 \approx 0.92$  پیش بینی شاخص های متابولیک است. به طور موازی، در داده های وسیع EHR برای تشخیص ADE مدل RF با دستیابی به  $AUC=0.91$  برتری خود را ثابت کرده است. یافته ها حاکی از قدرت مدل های داده محور در ارتقای تصمیم سازی بالینی، پیش بینی دقیق تر و شخصی سازی مداخلات درمانی است، حتی در سناریوهایی که حجم داده ها محدود است. این بررسی نشان می دهد که انتخاب مدل مناسب (مانند RF) میتواند عملکرد قوی در طیف وسیعی از مسائل پیش بینی سلامت ارائه دهد.

**کلمات کلیدی:** یادگیری ماشین، لاغری، جنگل تصادفی، شبکه عصبی، الگوریتم ژنتیک، داده های سلامت، عوارض دارویی، مدل داده محور، پیش بینی بالینی.

## ۱. مقدمه

توسعه مراقبت های بهداشتی مدرن به طور فزایندهای بر تحلیل داده های بزرگ و استخراج بینش های عملی از آنها متکی است. چاقی، اختلالات متابولیک و عوارض جانبی داروها (ADEs یا Adverse Drug Events) از چالش های مهم سلامت عمومی هستند که نیازمند روش های پیش بینی دقیق تر و به موقع برای مداخله هستند. مدل های داده محور مبتنی بر یادگیری ماشین (ML)، با توانایی خود در تحلیل حجم بالای داده های بالینی، رفتاری و ژنتیکی، امکان پیش بینی دقیق شاخص های سلامت و پاسخ های درمانی را فراهم می کنند.

این پژوهش بر مقایسه عملکرد مدل های یادگیری ماشین در این دو بستر داده ای متفاوت تمرکز دارد.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول

مدل های یادگیری ماشین قادرند الگوهای ارتباطی پیچیده و غیرخطی میان ویژگی های فیزیولوژیک (مانند نتایج آزمایشگاهی، علائم حیاتی و مشخصات دموگرافیک) و نتایج بالینی (مانند کاهش وزن موفقیت آمیز یا بروز ADE) را شناسایی کنند. در این راستا، دو مطالعه مکمل مورد بررسی قرار گرفته اند: ۱. مطالعه ای کوچک در کلینیک آرتمیس اهواز با هدف پیش بینی شاخص های متابولیک در بیماران تحت رژیم کاهنده وزن. ۲. مطالعه ای وسیع مبتنی بر داده های EHR (مشابه مطالعه PMC4660129) برای پیش بینی احتمال وقوع عوارض جانبی دارویی. هدف ثانویه این مقاله، ارزیابی نقش الگوریتم های بهینه سازی مانند الگوریتم ژنتیک (GA) در تنظیم ابرپارامترهای مدل ها، به ویژه زمانی که مجموعه داده ها محدود هستند، میباشد. این مقایسه به درک بهتری از قابلیت تعمیم پذیری و دقت مدل های داده محور در محیط های بالینی واقعی کمک خواهد کرد.

## ۲. داده ها و روش ها

این بررسی شامل دو بخش مجزا است که هر کدام مجموعه داده و هدف پیش بینی متفاوتی را دنبال می کنند، اما از نظر رویکرد مدل سازی (یادگیری ماشین و بهینه سازی) مشترک هستند.

### ۲-۱. مطالعه کلینیک آرتمیس (پیش بینی شاخص های متابولیک) [۱]

این بخش به تحلیل داده های جمع آوری شده از بیماران مراجعه کننده به کلینیک کاهش وزن آرتمیس اهواز اختصاص دارد، جایی که هدف، پیش بینی نتایج کوتاه مدت درمان بر اساس مشخصات اولیه بیماران است.

#### ۱-۱-۲ مجموعه داده

داده های این مطالعه از یک گروه کوچک از بیماران جمع آوری شده است. تعداد نمونه:  $N = 10$  بیمار (شامل ۵ زن و ۵ مرد). محدوده سنی: ۲۲ تا ۵۹ سال، متغیرهای هدف (خروجی): پنج شاخص کلیدی سلامت که پس از یک دوره مداخله مورد اندازه گیری قرار گرفتند: چربی کبد (Liver Fat Index - LFI)، قند خون ناشتا (Fasting Blood Glucose - FBG) تری گلیسرید (Triglycerides - TG) کلسترول کل (Total Cholesterol - TC) زمان رسیدن به وزن مطلوب (Time To Weight Goal - TTW) (بر حسب هفته)

#### ۲-۱-۲ مدل های ارزیابی شده

شش مدل یادگیری ماشین کلاسیک برای رگرسیون مورد ارزیابی قرار گرفتند: ۱. رگرسیون خطی (Linear Regression). ۲. رگرسیون چندجمله ای ۳ (Polynomial Regression). درخت تصمیم ۴ (Decision Tree - DT). بردار پشتیبان ۵ (Support Vector Machine - SVM). شبکه عصبی مصنوعی (Artificial Neural Network - ANN). ۶. جنگل تصادفی (Random Forest - RF)

### ۲-۱-۳ بهینه سازی پارامترها (الگوریتم ژنتیک)

در این کار به دلیل حجم پایین داده ها، خطر بیش برازش (Overfitting) بالا بود لذا برای افزایش دقت و یافتن بهترین ابرپارامترها، از الگوریتم ژنتیک (GA) به عنوان یک روش بهینه سازی هیوریستیک استفاده شد. ساختار GA: تعداد کروموزوم ها (جمعیت): ۵۰ نرخ تقاطع (Crossover Rate): 0.8 نرخ جهش (Mutation Rate): 0.01 تعداد نسل ها: ۱۰۰

هدف تابع برازش (Fitness Function) در این بخش، کمینه سازی میانگین خطای استاندارد شده (RMSE) در طول فرآیند اعتبارسنجی متقابل (Cross-Validation) بود.

#### ۴-۱-۲ معیارهای ارزیابی

معیارهای عملکرد برای مسائل رگرسیونی شامل: ضریب تعیین ( $R^2$ ) نشان دهنده درصد واریانس متغیر وابسته که توسط مدل قابل تبیین است.

#### ۲-۲ مطالعه داده های EHR (پیش بینی عوارض جانبی دارویی مشابه PMC4660129) [۲]

این بخش بر اساس یک مجموعه داده بزرگ و واقعی از سوابق الکترونیک سلامت بنا شده است که هدف آن پیش بینی وقوع عوارض جانبی دارویی (ADE) است.

#### ۱-۲-۲ مجموعه داده

- تعداد نمونه:  $N = 7165$
- نوع مسئله: دسته بندی دودویی (وقوع ADE در مقابل عدم وقوع).
- ویژگی ها (Features): داده های شامل علائم حیاتی، نتایج آزمایشگاهی متعدد، سابقه بیماری ها (کدهای ICD) و اطلاعات دارویی.

#### ۲-۲-۲ مراحل پیش پردازش و انتخاب ویژگی

در این مجموعه داده بزرگ، انتخاب ویژگی های مرتبط برای جلوگیری از معضل ابعاد (Curse of Dimensionality) و بهبود دقت مدل بسیار حیاتی بود. از روش Information Gain (IG) برای رتبه بندی و انتخاب ویژگی های دارای بیشترین قدرت پیش بینی استفاده شد.

#### ۳-۲-۲ مدل های ارزیابی شده

پنج مدل یادگیری ماشین پرکاربرد برای دسته بندی ارزیابی شدند: ۱. رگرسیون لجستیک (Logistic Regression - LR). ۲. بیز ساده (Naive Bayes - NB). ۳. ماشین بردار پشتیبان (Support Vector Machine - SVM). ۴. جنگل تصادفی (Random Forest - RF). ۵. تقویت گرادیان (Gradient Boosting - GB).

#### ۴-۲-۲ معیارهای ارزیابی

معیارهای عملکرد برای مسائل دسته بندی شامل: منحنی مشخصه عملکرد گیرنده (AUC): ناحیه زیر منحنی ROC، معیار اصلی ارزیابی عملکرد کلی مدل در تشخیص ADE. دقت (Precision) سهم مثبت های پیش بینی شده که واقعا مثبت بوده اند. بازخوانی (Recall یا Sensitivity): سهم مثبت های واقعی که به درستی شناسایی شده اند. امتیاز  $F1(F1-Score)$ : میانگین هارمونیک Precision و Recall.

### ۳. نتایج

عملکرد مدل ها در دو محیط داده ای کاملا متفاوت، مقایسه و گزارش میشود.

#### ۳-۱ نتایج مطالعه کلینیک آرتیمیس (داده های محدود)

هدف در این بخش، یافتن مدلی بود که بتواند با کمترین خطا، پنج شاخص متابولیک را پیش بینی کند. مدل جنگل تصادفی (RF) پس از تنظیم پارامترها توسط GA، بهترین عملکرد کلی را از خود نشان داد.

مدل  $R^2$  (متوسط) RMSE (متوسط) MAE (متوسط)

|      |      |       |                  |
|------|------|-------|------------------|
| 0.88 | 1.05 | 0.921 | جنگل تصادفی (FR) |
|------|------|-------|------------------|

|      |      |       |                    |
|------|------|-------|--------------------|
| 0.95 | 1.18 | 0.903 | شبکه عصبی (NN)     |
| 1.21 | 1.52 | 0.855 | SVM                |
| 1.55 | 1.89 | 0.790 | رگرسیون چندجمله ای |
| 1.78 | 2.11 | 0.712 | درخت تصمیم (TD)    |
| 1.95 | 2.40 | 0.650 | رگرسیون خطی        |

تحلیل جزئی عملکرد RF در آرتیمیس: مدل RF، به دلیل توانایی اش در مدیریت تعاملات پیچیده بین متغیرهای ورودی (مانند نسبت های چربی/وزن اولیه) و ماهیت قوی اش در برابر نویز موجود در داده های کم حجم، بهترین نتایج را به دست آورد. بهترین عملکرد پیش بینی در بین شاخص ها مربوط به پیش بینی زمان رسیدن به وزن هدف (TTW) بود که به ضریب تعیین  $R^2 \approx 0.945$  دست یافت. این نشان میدهد که الگوی زمانی پاسخ به مداخله، بیشترین قابلیت پیش بینی را داشته است.

### ۳-۲ نتایج مطالعه داده های EHR (داده های وسیع - پیش بینی ADE)

در این مطالعه، عملکرد مدل ها بر اساس توانایی آنها در دسته بندی صحیح بیماران در معرض خطر ADE ارزیابی شد. نتایج AUC (ناحیه زیر منحنی ROC) به عنوان معیار اصلی گزارش شده است.

مدل AUC Precision Recall F1-Score

|      |      |      |                          |
|------|------|------|--------------------------|
| 0.85 | 0.84 | 0.86 | جنگل تصادفی (FR) 0.91    |
| 0.84 | 0.85 | 0.83 | تقویت گرادیان (BG) 0.89  |
| 0.77 | 0.75 | 0.79 | SVM 0.84                 |
| 0.71 | 0.68 | 0.74 | رگرسیون لجستیک (RL) 0.78 |
| 0.67 | 0.65 | 0.69 | بیز ساده (BN) 0.72       |

تحلیل عملکرد RF در پیش بینی ADE: مدل جنگل تصادفی (RF) با AUC برابر با ۰/۹۱، برتری قابل توجهی نسبت به سایر مدل ها در تشخیص ADE نشان داد. دقت بالا (۰/۸۶) نشان میدهد که هنگامی که مدل پیش بینی می کند دارویی باعث عارضه میشود، احتمال آنکه این پیش بینی درست باشد، بسیار بالاست. همچنین، Recall مناسب (۰/۸۴) حاکی از آن است که مدل توانسته بخش بزرگی از موارد واقعی ADE را شناسایی کند. این عملکرد قوی احتمالاً به دلیل توانایی RF در مدل سازی تعاملات چندگانه بین کدهای بیماری ICD و نتایج آزمایشگاهی (پس از فیلتر کردن با Information Gain) است.

## ۴. بحث

مقایسه نتایج دو مطالعه، بینش های مهمی در مورد کاربردپذیری مدل های داده محور در حوزه های مختلف سلامت ارائه میدهد.

### ۱-۴ قدرت یادگیری ماشین در داده های محدود (کلینیک آرتیمیس)

عملکرد استثنایی مدل RF در مطالعه کلینیک آرتیمیس (با تنها ۱۰ نمونه)، اهمیت استفاده از روش های مبتنی بر درخت و تکنیک های بهینه سازی را برجسته میکند. در مجموعه داده های کوچک، مدل هایی مانند شبکه های

عصبی با تعداد پارامترهای زیاد، به سرعت دچار بیش برآزش می شوند. نقش الگوریتم ژنتیک (GA): استفاده از GA در بهینه سازی پارامترهای RF (مانند تعداد درختان و عمق بیشینه) به مدل کمک کرد تا ساختار بهینه را حتی در فضای پارامتری محدود جستجو کند. این موضوع نشان میدهد که مدل های مبتنی بر مجموعه ای (Ensemble Methods) میتوانند با راهنمایی های بهینه سازی، عملکرد رگرسیونی بسیار قوی را در داده های بالینی کمیاب ارائه دهند.

#### ۲-۴ اثر بخشی مدل ها در داده های حجیم (EHR)

در مطالعه پیش بینی ADE، که با مجموعه داده ای ۷۰۰۰ نمونه ای انجام شد، مدل های مبتنی بر مجموعه ای (RF) و GB برتری خود را نسبت به مدل های کلاسیک (مانند LR و NB) نشان دادند. اهمیت استخراج ویژگی: نقش فیلتر کردن ویژگی ها با استفاده از Information Gain در این بخش حیاتی بود.

#### ۳-۴ مقایسه و تعمیم پذیری مدل ها

جنگل تصادفی (RF) به عنوان یک مدل پایدار، در هر دو سناریو (رگرسیون بر روی ۱۰ نمونه و دسته بندی بر روی ۷۰۰۰ نمونه) عملکرد برتری نزدیکی به بهترین عملکرد را کسب کرد. این سازگاری نشان میدهد که RF یک گزینه بسیار مناسب برای فازهای اولیه تحلیل داده های بالینی است، زیرا نیاز به نرمال سازی دقیق داده ها و تنظیم پیچیده پارامترها در مقایسه با شبکه های عصبی عمیق تر را ندارد و در عین حال، تعاملات غیرخطی را به خوبی مدل سازی میکند. با این حال، عملکرد NN در مطالعه آرتیمیس ( $R^2 = 0.903$ ) نیز قابل توجه بود و بر پتانسیل این مدل ها در یادگیری از الگوهای پیچیده تأکید میکند.

### ۵. نتیجه گیری

این پژوهش دو کاربرد متفاوت مدل های داده محور در حوزه سلامت را بررسی کرد: پیش بینی شاخص های متابولیک در یک کلینیک تخصصی و پیش بینی عوارض جانبی دارویی از طریق سوابق الکترونیک. یافته های اصلی: ۱. جنگل تصادفی (RF) عملکردی بسیار سازگار و قوی در هر دو مسئله رگرسیون (داده های محدود) و دسته بندی (داده های وسیع) نشان داد. ۲. در داده های محدود (کلینیک آرتیمیس)، ترکیب الگوریتم ژنتیک با مدل های ML توانست دقت پیش بینی را به سطوح بالای ( $R^2 \approx 0.92$ ) برساند. ۳. در داده های حجیم EHR، انتخاب ویژگیهای مهم با Information Gain کلید دستیابی به عملکرد بالا ( $AUC=0.91$ ) در تشخیص ADE بود.

توصیه ها برای تحقیقات آینده: با توجه به توانایی NN در مدل سازی غیرخطی و پتانسیل آن در یادگیری عمیق، توصیه میشود در کاربردهای آینده کلینیک آرتیمیس، از مدل های هیبریدی مبتنی بر RF=NN استفاده شود. این مدل های ترکیبی میتوانند ضمن حفظ میزانی از تفسیرپذیری که توسط RF ارائه میشود، از ظرفیت شبکه های عصبی در استخراج ویژگی های عمیقتر از داده های خام فیزیولوژیک نیز بهره ببرند. همچنین، گسترش مجموعه داده های کلینیک آرتیمیس به بیش از ۱۰ نمونه، امکان اعتبارسنجی مدل های عمیق تر را فراهم خواهد کرد.



## منابع

- 1- ژ. شیرین نژاد، ص، صالحی، مقایسه ی مدل های متغیرهای مرتبط با کاهش وزن بر اساس یادگیری ماشین مطالعه ی موردی بر اساس داده های کلینیک فیزیولوژی ورزشی آرتمیس اهواز، نهمین کنفرانس بین المللی علوم ورزشی تربیت بدنی و سلامت اجتماعی تهران، شهریور ماه ۱۴۰۴
2. Jing Zhao, et al (2015, "Predictive modeling of structured electronic health, records for adverse drug event detection". BMC Med Inform Decis Mak . Nov 25,15 (Suppl 4).



## استفاده از ضرایب همبستگی ریاضی در مدلسازی بارش - رواناب در حوزه های آبخیز

هادی رزاقیان<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه کشاورزی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

[h\\_razzaghan@pnu.ac.ir](mailto:h_razzaghan@pnu.ac.ir)

آرش کاکولاریمی<sup>۲</sup>، عضو هیئت علمی گروه کشاورزی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران،

ایران [kakoularimi54@pnu.ac.ir](mailto:kakoularimi54@pnu.ac.ir)

هادی سیاسار<sup>۳</sup>، عضو هیئت علمی گروه کشاورزی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران

[hadisiasar@pnu.ac.ir](mailto:hadisiasar@pnu.ac.ir)

### چکیده:

مدل های داده محور در هیدرولوژی کاربرد زیادی دارند و یکی از آن ها مدل رگرسیون خطی چند متغیره است. با استفاده از رگرسیون خطی چند متغیره می توان رابطه خطی بین مجموعه ای از متغیرهای مستقل با یک متغیر وابسته را به شیوه ای بررسی کرد که در آن، روابط موجود فی مابین متغیرهای مستقل نیز مورد ملاحظه قرار گیرد و وظیفه رگرسیون این است که به تبیین واریانس متغیر وابسته کمک کند و این وظیفه تا حدودی از طریق برآورد مشارکت متغیرها در این واریانس به انجام می رسند. تحلیل رگرسیون چند متغیره برای مطالعه تأثیرات چند متغیر مستقل در متغیر وابسته کاملاً مناسب است. در رگرسیون چند متغیره، مقادیر یک متغیر (متغیر وابسته یا  $Y$ ) از روی مقادیر دو یا چند متغیر دیگر (متغیرهای مستقل  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ) برآورد می شود. در این تحقیق با استفاده از رگرسیون خطی چند متغیره مدل بارش-رواناب منطقه برای دوره زمانی مورد نظر تهیه و مورد آنالیز قرار گرفت. برای تهیه معادلات مورد نظر داده های بارندگی روزانه ایستگاه های هواشناسی به عنوان متغیر های مستقل و مقادیر دبی متناظر روزانه ایستگاه هیدرومتری خروجی به عنوان متغیر وابسته استفاده قرار گرفت. سپس روابط رگرسیونی بارش-رواناب تهیه شد. در نهایت با استفاده از شاخص های آماری و روش تغییر شکل داده ها و آنالیز های آماری و پس از مرحله تایید و اعتبار سنجی، مناسب ترین مدل های بارش-رواناب برگزیده شد.

کلمات کلیدی: بارش رواناب، رگرسیون، ریاضی، متغیر مستقل، متغیر وابسته

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

## ۱. مقدمه

وجود عوامل اقلیمی (داده های هواشناسی)، سطح زمینی (پوشش گیاهی، خاکشناسی)، هیدرولوژیکی موثر در ایجاد جریان رودخانه و ارتباطات پیچیده و غیرخطی آنها نیاز به مدل جامعی را جهت تحلیل این پدیده به ویژه در حوضه های بزرگ مقیاس آشکار می سازد. لذا استفاده از فرآیند مدلسازی که بتواند چرخه هیدرولوژیکی را با در نظر گرفتن متغیرهای غالب هواشناسی، خاکشناسی و هیدرولوژیکی دخیل در این چرخه به طور کامل شبیه سازی نماید، از اهمیت چشمگیری برخوردار می باشد. مدل های داده محور در هیدرولوژی کاربرد زیادی دارند و یکی از آن ها مدل رگرسیون خطی چند متغیره است (شکری و همکاران، ۱۴۰۳). رواناب حاصل از بارندگی در ایستگاههای هیدرومتری اندازگيري و با هیدروگراف سیل بیان می گردد (علیزاده، ۱۴۰۳). از طرفی تهیه و اجرای طرح های مختلف نظیر طرح های توسعه ای، طراحی سازه های هیدرولیکی و برنامه ریزی های مربوط به حفاظت آب و خاک نیاز به دانستن مجموعه ای از اطلاعات مربوط به بارندگی و رواناب و روابط میان آنها دارد. با توجه به دسترسی آسان و بیشتر به آمار بارش، تهیه مدل هیدرولوژی بارش- رواناب مبتنی بر مشخصه ها و اطلاعات بارندگی بسیار کاربردی و منطقی به نظر می رسد (سپهری و همکاران، ۱۳۹۸). بنابراین تحقیق حاضر سعی دارد ارتباط بین مقادیر بارندگی و رواناب روزانه حاصل از آن را در فصول مختلف سال شناسایی و ارائه نماید. با تهیه مدل بارش- رواناب می توان از آن در موارد مختلفی مانند پیش بینی و مدیریت سیلاب، برآورد منابع آب، شبیه سازی فرآیندهای هیدرولوژیکی و ارزیابی تأثیر عوامل مختلف بر حوزه های آبخیز استفاده نمود. این مدل ها با شبیه سازی چگونگی تبدیل بارش به رواناب، به مهندسان و مدیران منابع آب در درک رفتار حوضه های آبخیز کمک می کنند.

## ۲- مواد و روش ها

انجام تحقیق حاضر در دو مرحله جمع آوری داده ها و دسته بندی آنها و آنالیز آماری آنها انجام گرفت. داده های مورد نیاز برای انجام این تحقیق شامل مقادیر بارندگی چهار ایستگاه بارانسنجی فرضی A، B، C و D در حوزه آبخیز و مقادیر دبی ایستگاه هیدرومتری در محل خروجی حوزه (Y) در طی يك دوره آماری بلند مدت حدود ۳۰ ساله می باشد. داده های بارندگی روزانه بصورت منظم و با توجه به تاریخ وقوع برای ایستگاه های بارانسنجی در چهار ستون دسته بندی گردید. در مرحله بعد آنالیز آماری داده ها جهت ارائه مدل بارش- رواناب در حوزه آبخیز به شرح زیر انجام شد. جهت تعیین ارتباط بین متغیرهای مستقل و وابسته از ارتباط رگرسیونی دو متغیره<sup>۴</sup> و چند متغیره<sup>۵</sup> استفاده گردید. جهت انجام تجزیه و تحلیل های آماری از نرم افزار SPSS استفاده گردید. در این تحقیق جهت نرمال سازی متغیرهای مستقل و وابسته ای که با توجه به این آزمون نرمال نبودند از روش تغییر داده ها<sup>۶</sup> استفاده گردید. در نهایت با توجه به ضریب چولگی زیاد بدست آمده، داده های مذکور بصورت غیر نرمال و از روش غیر پارامتری مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. در این مرحله نسبت به تعیین رابطه بین متغیرهای مستقل و متغیر وابسته در طی ۳۰ سال آماری در ۴ فصل مختلف سال اقدام گردید. قابلیت اعتماد مدل های بدست آمده با توجه به درجه آزادی n-2 مدل های و سطح احتمال ۱% (مهذوی، ۱۴۰۱) مورد بررسی قرار گرفت. ارزیابی کیفیت روابط بدست آمده از طریق آماره های ضریب تبیین R<sup>2</sup>، انحراف معیار متغیر وابسته در طول دوره آماری

<sup>4</sup> Bivariate Regression

<sup>5</sup> Multivariate Regression

<sup>6</sup> Transformation

Sd و اشتباه استاندارد تخمین Se صورت پذیرفت. لذا روابط بین متغیرها با توجه به سرشت غیرخطی داده ها و تغییرات ضریب چولگی در حالت‌های لگاریتمی، معکوس، ریشه دوم، ریشه سوم، معادله درجه دو و معادله درجه سه مورد بررسی قرار گرفت. از آنجایی که شرط لازم برای تعیین اعتبار يك مدل تطابق نتایج بدست آمده با نتایج واقعی می باشد از این رو در تحقیق حاضر از معیارهای مناسب خطای نسبی و مجذور میانگین مربعات خطا و همچنین شرط خطای نسبی کمتر از ۴۰٪ و مجذور میانگین مربعات خطا متمایل به صفر استفاده گردید (Das, 2000). داده های بارندگی روزانه ایستگاهها و دبی متناظر در ایستگاه هیدرومتری خروجی که در فرآیند مدل سازی به کار گرفته نشده بود؛ جهت تأیید مدل ها مورد استفاده قرار گرفت. روابط ۱ و ۲ جهت بررسی دقت تخمین و تأیید مدلها استفاده شدند:

$$RE = \left| \frac{Q_o - Q_e}{Q_o} \right| \times 100 \quad (1)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Q_o - Q_e)^2}{n}} \quad (2)$$

که در آنها RE خطای نسبی،  $Q_o$  مقدار دبی مشاهده ای،  $Q_e$  مقدار دبی تخمینی و RMSE مجذور میانگین مربعات خطا می باشد. نهایتاً با مقایسه خطای نسبی تخمین و خطای نسبی تأیید، برای متغیر وابسته، ۴ مدل نهایی برای رگرسیونهای چند متغیره انتخاب گردید.

### ۳- نتایج و بحث

پس از انجام مراحل اشاره شده در روش تحقیق و با استفاده از داده های جمع آوری شده برای متغیرهای مستقل و وابسته در طی ۳۰ سال و تفکیک آنها در ۴ فصل مناسب ترین شکل تغییر یافته داده ها بصورت رابطه ۳ برای مراحل بعدی استخراج گردید.

$$X' = [\text{Log}_{10}(X + 1.1)] + 1.0 \quad (3)$$

که در آن  $X'$  شکل تغییر یافته  $X$  (متغیرهای مستقل و وابسته) می باشد. بدین ترتیب ۱۲ رابطه در سه حالت ساده-لگاریتمی، لگاریتمی-لگاریتمی و ریشه دوم-لگاریتمی برای چهار فصل تهیه و با توجه به مقادیر ضریب تبیین، RE و RMSE در مرامل تخمین و تأیید، مدل‌های نهایی بدست آمده و در جدول ۱ خلاصه شده اند. به منظور ارزیابی نقش هر یک از متغیرهای مستقل بر روی متغیر وابسته مقادیر ضریب بتای متغیرها در هر یک از روابط محاسبه و در جدول ۲ خلاصه شده است.

با دقت در جداول ۱ و ۲ می توان استنباط نمود که ارتباط بارش و رواناب خطی نبوده و میزان مشارکت هر یک از مناطق تحت پوشش ایستگاههای مختلف در فصول چهارگانه متفاوت می باشد. در مدل‌های بدست آمده علی رغم کم بودن ظاهری مقادیر ضریب تبیین، این ضرایب بدلیل تعداد زیاد داده ها بسیار معنی دار بوده اند. میزان خطای تخمین و تأیید کلیه مدلها در حد قابل قبول کمتر از ۴۰٪ درصد (Das, 2000) بوده و بیشینه و کمینه آن به ترتیب مربوط به فصول بهار و پاییز می باشد. مقادیر RMSE نیز نزدیک به صفر بوده و حداکثر ۰/۳۹۵ و مربوط به فصل بهار می باشد. اختلافات زیاد در بین مدل‌های فصلی تهیه شده نیز موید ضرورت بررسی مدلسازی در مقاطع زمانی

متفاوت می باشد.

جدول ۱ مدل های نهایی بارش - رواناب حوزه آبخیز

| رابطه<br>[Log 10 (Qe+1/1)]+1/0=...    | ضریب<br>تبیین | خطای<br>تخمین<br>(%) | خطای<br>تایید<br>(%) | مجدور<br>میانگین<br>مربعات خطا | فصل     |
|---------------------------------------|---------------|----------------------|----------------------|--------------------------------|---------|
| /0105A+/00054B+/0038C+/00684D+1/544   | /۲۸۱          | 13/62                | 33/00                | /395                           | بهار    |
| -/0214A -/0012B+/00103C+/00285D+1/165 | /۱۴۳          | 7/62                 | 11/48                | /۳۴۸                           | تابستان |
| /00211A+/00374B+/00074C+/00293D+1/167 | /۲۳۸          | 5/53                 | 9/59                 | /۱۰۷                           | پاییز   |
| -/0082A+/00239B+/00166C+/00169D+1/306 | /۱۶۱          | 11/69                | 13/98                | /۱۷۳                           | زمستان  |

A: رباط قره بیل، B: چشمه خان، C: تیل آباد و D: تنگراه

جدول ۲ مقادیر ضریب بتا برای مدل های نهایی بارش - رواناب

| D     | C     | B      | A      | ایستگاه<br>فصل |
|-------|-------|--------|--------|----------------|
| ۰،۱۵۵ | ۰،۰۹۴ | ۰/۰۰۱  | ۰/۱۱۳  | بهار           |
| ۰،۱۲۸ | ۰،۰۴۷ | -۰،۰۲۲ | -۰،۰۳۶ | تابستان        |
| ۰،۱۵۷ | ۰،۰۴۳ | ۰،۰۸۱  | ۰،۰۳۸  | پاییز          |
| ۰،۰۵۲ | ۰،۰۵۸ | ۰،۰۳۴  | ۰،۰۹۳  | زمستان         |

از مقادیر متفاوت ضریب بتا نیز چنین بر می آید که میزان مشارکت بارندگی ایستگاههای مختلف در تولید رواناب یکسان نمی باشد و از حداکثر مشارکت طی فصول بهار تا پاییز توسط ایستگاه D و زمستان توسط ایستگاه A تغییر می نماید. این یافته ها در اعمال مدیریتهای مربوط به استقرار سامانه های هشدار سیل و همچنین اقدامات کنترلی بسیار حایز اهمیت می باشد.

## منابع

- ۱- سپهری، پ.، سپهری، ع. و س. مردعلی. ۱۳۹۸، تخمین هیدروگراف براساس اجزای مختلف بارندگی با استفاده از شبکه عصبی- فازی تطبیقی مطالعه موردی (حوزه آبخیز قره سو اردبیل، نهمین کنفرانس علمی پژوهشی آبخیزداری و مدیریت منابع آب و خاک، دانشگاه ارومیه.
- ۲- شکری کوچک، و.، شریفی، م. و س. شکری کوچک. ۱۴۰۳، ارزیابی الگوریتمهای بارش ماهواره ای در شبیه سازی هیدرولوژیکی با استفاده از مدل IHACRES مطالعه موردی حوضه آبریز رودخانه شش پیر استان فارس، ایران، علوم و مهندسی آبخیزداری ایران، سال ۱۸. ش ۶۴.
- ۳- متولی طاهر، ف.، احمدی گیوی، ف.، ایران نژاد، پ.، ۱۳۹۴. بررسی همیدی بارش های فرین استان مازندران در ماه اکتبر. نشریه پژوهش اقلیم شناسی، ش ۲۱-۲۲.
- ۴- مهدوی، م، ۱۴۰۱. هیدرولوژی کاربردی، جلد دوم، چاپ چهاردهم، انتشارات دانشگاه تهران، ۳۱۸ ص.
- 5- Das, G., 2000. Hydrology and soil Bonsorvation Engineering, Asoke K. Ghosh, Prentic-all of India, 489pp.

## استفاده مدل سازی ریاضی رشد کشاورزی در استان مازندران: ادغام رگرسیون و انتخاب گام به گام برای بهینه سازی عملکرد محصول مبتنی بر رواناب

هادی سیاسر<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه کشاورزی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران  
[hadisiasar@pnu.ac.ir](mailto:hadisiasar@pnu.ac.ir)

آرش کاکولاریمی<sup>۲</sup>، عضو هیئت علمی گروه کشاورزی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران  
[kakoularimi54@pnu.ac.ir](mailto:kakoularimi54@pnu.ac.ir)

هادی رزاقیان<sup>۳</sup>، عضو هیئت علمی گروه کشاورزی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران، ایران  
[h\\_razzaghan@pnu.ac.ir](mailto:h_razzaghan@pnu.ac.ir)

### چکیده:

استان مازندران، با اقلیم مرطوب و منابع آب فراوان، به عنوان مرکز اصلی تولید برنج و مرکبات در ایران شناخته می شود. این پژوهش به بررسی مدل سازی ریاضی رشد کشاورزی از طریق ادغام رگرسیون خطی پیشرفته و انتخاب گام به گام برای بهینه سازی عملکرد محصول مبتنی بر رواناب در حوضه هراز می پردازد. داده های روزانه بارش، دما، رطوبت، تابش خورشیدی و رواناب (۱۹۸۰-۲۰۱۶) از ایستگاه های سازمان هواشناسی ایران و آب سنجی هراز جمع آوری و پیش پردازش شده اند. ویژگی های تأخیری (۱-۷ روزه) و تعاملی (مانند ضرب  $TP \times T$ ) ساخته شده و مدل با معیارهای آکایکه/بیک انتخاب گردید. اعتبارسنجی متقاطع ۱۰-تایی نشان داد  $R^2 > 0.91$ ، ریشه میانگین مربعات خطا تقریباً  $5/0.8$  تن در هکتار و میانگین خطای مطلق برابر  $3/89$  تن در هکتار است. رواناب به عنوان عامل غالب (بتا بزرگتر از  $0/6$ ) شناسایی شد و آبیاری بیش از حد منجر به کاهش عملکرد گردید. تنوع بخشی محصول به افزایش پایداری آب-عملکرد کمک می کند. این مدل ابزاری دقیق برای مدیریت آبیاری و برنامه ریزی کشاورزی پایدار در مازندران فراهم می آورد و از پیش بینی های خوش بینانه تحت تغییرات اقلیمی جلوگیری می کند.

**کلمات کلیدی:** مدل سازی ریاضی، رواناب، رگرسیون گام به گام، عملکرد محصول، مازندران

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

## ۱. مقدمه

کشاورزی به عنوان یکی از ارکان اصلی اقتصاد استان مازندران، نقشی حیاتی در تأمین محصولات کشاورزی و ایجاد اشتغال در این منطقه دارد. این استان با اقلیم مرطوب خود که از بارش‌های سالانه بالا و خاک‌های رسی بهره‌مند است، شرایط مناسبی برای تولید محصولات متنوعی همچون برنج، مرکبات و دیگر محصولات زراعی فراهم می‌کند. در این میان، بارش به عنوان عامل کلیدی در رشد محصول در این منطقه شناخته می‌شود و در فرآیند رشد گیاهان نقشی برجسته دارد. به‌ویژه، رواناب حاصل از بارش‌های شدید در مناطقی با خاک‌های رسی، که در روزهای اول بارش توانایی جذب آب را ندارند، به عنوان منبع اصلی آبیاری عمل می‌کند [۱]. پایش و پیش‌بینی دقیق منابع آبیاری در استان مازندران به دلیل کاهش منابع سطحی و زیرزمینی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این راستا، استفاده از روش‌های آماری برای تخمین تأثیرات اقلیمی بر عملکرد محصولات کشاورزی، به‌ویژه در شرایطی که تغییرات اقلیمی و تغییرات منابع آبی به‌طور فزاینده‌ای مطرح است، ضروری است. در این زمینه، مطالعات پیشین از مدل‌های مختلف آماری نظیر رگرسیون بردار پشتیبان (SVR)، رگرسیون خطی چندگانه، و تخمین توابع تولید برای مدل‌سازی عملکرد محصول و بهینه‌سازی تخصیص منابع آب و زمین در شرایط خاص استفاده کرده‌اند. [۲]. با این حال، در خصوص مدل‌سازی هیدرولوژی-اقلیم-محصول در سطح استان مازندران، به‌ویژه برای محصولات کلیدی این منطقه، کمبود مطالعات جامع و سیستماتیک مشاهده می‌شود. پژوهش حاضر به منظور پر کردن این شکاف‌ها، مدلی دقیق برای پیش‌بینی عملکرد محصول بر اساس داده‌های بارش ارائه می‌دهد. در این مدل، رگرسیون خطی پیشرفته و انتخاب گام‌به‌گام به منظور ترکیب و بهبود پیش‌بینی‌ها در یک رویکرد یکپارچه به کار گرفته شده است. این مدل می‌تواند ابزاری مؤثر برای کشاورزان و تصمیم‌گیرندگان در بهینه‌سازی مصرف آب و مدیریت منابع آبی در استان باشد. استان مازندران با اقلیم مرطوب خود و بارش سالانه‌ای بیش از ۸۰۰ میلی‌متر، به عنوان یکی از مهم‌ترین مناطق کشاورزی ایران شناخته می‌شود. این اقلیم برای کشت محصولاتی مانند برنج و مرکبات بسیار مناسب است. با توجه به ویژگی‌های اقلیمی و خاکی استان، رواناب ناشی از بارش‌های شدید در فصول مختلف، منبع اصلی تأمین آب آبیاری برای این محصولات به شمار می‌آید. با این حال، رواناب‌های زیاد می‌توانند خطر سیلاب‌ها را افزایش داده و چالش‌های جدی در مدیریت منابع آبی ایجاد کنند [۱]. این شکاف در تحقیقات موجود، ضرورت استفاده از مدل‌های پیشرفته‌تر برای مناطق مرطوب، نظیر مازندران، را برجسته می‌کند [۲].

## ۲. مواد و روش‌ها

در این پژوهش، حوضه هراز در استان مازندران به عنوان منطقه مطالعه انتخاب شد. این حوضه با مساحت ۴۳۰۰ کیلومتر مربع، دارای اقلیم مرطوب است و عمدتاً در زمینه کشت محصولات استراتژیک همچون برنج و مرکبات شناخته می‌شود. داده‌های روزانه شامل بارش، دما، رطوبت نسبی، تابش خورشیدی و رواناب از ایستگاه‌های مختلف سازمان هواشناسی ایران و ایستگاه آب‌سنجی هراز در بازه زمانی ۱۹۸۰ تا ۲۰۱۶ جمع‌آوری شدند. در این پژوهش، حوضه هراز در استان مازندران به عنوان منطقه مطالعه انتخاب شده است که با مساحت ۴۳۰۰ کیلومتر مربع یکی از مناطق مهم با اقلیم مرطوب به شمار می‌آید. وجود منابع آبی مناسب و اقلیم مرطوب، زمینه‌ساز توسعه

کشاورزی و تأمین نیازهای آبی این محصولات در این منطقه است. برای پیش‌پردازش داده‌ها، ابتدا کیفیت داده‌ها بررسی شد و سپس از روش پیشنهادی Zhang et al (۲۰۱۲) برای پر کردن شکاف‌ها و حذف نویز استفاده گردید. این مرحله ضروری است زیرا داده‌های ناقص می‌توانند دقت مدل‌های پیش‌بینی را به شدت کاهش دهند. این مدل می‌تواند به تصمیم‌گیرندگان کمک کند تا با درک بهتر از تأثیر رواناب و شرایط اقلیمی، برنامه‌ریزی بهینه‌تری برای تخصیص منابع آبی و مدیریت کشت محصولات انجام دهند. همچنین، استفاده از روش‌های پیشرفته آماری مانند رگرسیون خطی با انتخاب گام به گام، امکان شناسایی دقیق‌تر متغیرهای مؤثر بر عملکرد محصول را فراهم می‌آورد. در نهایت، این رویکرد می‌تواند به افزایش بهره‌وری آب و توسعه پایدار کشاورزی در استان مازندران منجر شود. مدل رگرسیون خطی پیشرفته به صورت زیر تعریف گردید:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 R + \beta_2 T + \beta_3 (T \times R) + \beta_4 R^2 + \epsilon$$

T دما است. برای انتخاب پیش‌بینی‌کننده‌های مناسب، از روش گام به گام استفاده شد که در آن پیش‌بینی‌کننده‌ها یکی یکی به مدل اضافه می‌شوند و این فرآیند تا زمانی ادامه می‌یابد که مدل به بهینه‌ترین حالت برسد. برای ارزیابی معیارهای مختلف، از معیارهای AIC و BIC بهره‌برداری شد.

### ۳. نتایج و بحث

در این مطالعه، عملکرد مدل‌های پیشنهادی برای پیش‌بینی عملکرد محصول (ذرت، برنج شالیزار و گندم) در استان مازندران، که بر پایه رواناب توسعه یافته‌اند، مورد ارزیابی دقیق قرار گرفت. این ارزیابی با استفاده از معیارهای عملکرد مدل پذیرفته‌شده و بررسی اهمیت هر یک از متغیرهای توضیحی انجام شد. چهار معیار اساسی شامل ضریب تعیین ( $R^2$ )، ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE)، و میانگین خطای مطلق (MAE) بر روی مجموعه داده‌های آموزشی و آزمایشی محاسبه شدند. ضریب تعیین ( $R^2$ ) به عنوان شاخصی برای توضیح‌دهندگی مدل، مدل‌های نامناسب را با  $R^2 < 0$  و تناسب‌های متوسط تا قوی را با  $R^2 < 0.5$  مشخص می‌کند. RMSE که خطای پیش‌بینی را در واحدهای اصلی متغیر (مانند تن در هکتار) بیان می‌کند، در این مطالعه مقادیر بین ۰ تا ۱۰ را برای عملکرد محصول قابل قبول می‌داند و مدل کامل دارای  $RMSE = 0$  است. میانگین خطای مطلق نیز در واحدهای اصلی بیان شده و در اینجا کسر قدر خطای مطلق انتخاب شد تا اثرات مخدوش‌کننده تعداد رکورد‌های موجود در مجموعه داده‌های PD یا WI کاهش یابد. پیکربندی مجموعه مدل‌سازی، با استفاده از تمامی متغیرهای هواشناسی پیوسته موجود در مجموعه داده‌ها و بدون جایگذاری برای مشاهدات گم‌شده (بر پایه نتایج مدل‌سازی پیشین) حفظ شد. این رویکرد به منظور ثبت تعادل‌های واقعی میان علوم اقلیم، زراعت و هیدرولوژی میان‌رشته‌ای صورت گرفت، با این پیش‌شرط که ویژگی‌های تخمین و معیارهای عملکرد برای تفسیرهای آتی بدون سوگیری باشند. نتایج کمی مربوط به ویژگی‌های تخمین عملکرد برای سه مدل پیشنهادی در مجموعه داده‌های آموزشی و آزمایشی در جدول ۴ فهرست شده‌اند. ضریب تعیین ( $R^2$ ) برای پیکربندی حفظ‌شده بالای ۰/۹۱ امتیاز گرفت، که نشان‌دهنده توانایی بالای مدل در توضیح تغییرات عملکرد محصول است. علاوه بر این، میانگین خطای مطلق در بازه‌های زمانی فصلی به نصف کاهش یافت و به ۳/۸۹ رسید، در حالی که RMSE نیز به ۵/۰۸ دست یافت. این مقادیر بالای  $R^2$ ، همراه با نتایج سایر معیارهای عملکرد، با منابع مدل‌سازی مستقل دیگر نیز همخوانی داشته و

همکاری میان کتابخانه‌ای پیش فرض مدل‌سازی را تأیید می‌کند، که نشان‌دهنده استحکام و دقت بالای مدل‌های توسعه‌یافته در این مطالعه است.

#### ۴. نتیجه‌گیری

با توجه به تنوع اقلیمی و وجود منابع آب دائمی، استان مازندران برای کشت محصولات متنوعی مناسب است، به‌ویژه در مناطق مرطوب تحت شرایط رواناب [۴]. عملکرد محصول در مناطق مرطوب به بارش و آبیاری وابسته است، در حالی که مدیریت آبیاری به‌شدت تحت تأثیر ورود رواناب قرار دارد [۲]. مدل‌سازی دسترسی به آب آبیاری و عملکرد محصول اهمیت اقتصادی دارد تا توزیع محصول و مدیریت آبیاری تحت شرایط رواناب بهینه شود. مدل AWAS (سیستم دسترسی مصنوعی به آب) دسترسی به آب را برای مناطق مرطوب تخمین می‌زند و به پارامترهای اقلیمی و فیزیکی وابسته است. با این حال، رسوب‌گذاری منابع دائمی به دلیل تبخیر-تعرق و کشاورزی نیز باید در نظر گرفته شود. چارچوب عملکرد، تولید و عملکرد محصولات مختلف را توصیف می‌کند. روش‌شناسی پیشنهادی نه تنها بر عملکرد بالا، بلکه بر تنوع محصول و قیمت بازار تأکید دارد. بنابراین، کاربرد تخمین عملکرد محصول، مدل‌سازی توزیع محصول ارائه‌شده در استان مازندران را مد نظر قرار می‌دهد. بر پایه شبیه‌سازی دسترسی به آب و تابع انتقال نوع اسلب، تبدیل رواناب-بارش با فرکانس بالا تخمین زده می‌شود. رویکرد کوپولا دوره بازگشت را برای مدل‌سازی رواناب تحت تغییرات اقلیمی ارزیابی می‌کند. پیش‌بینی عملکرد بالا برای محصولات مختلف می‌تواند مناسب‌بودن محصول را تحت سناریوهای تغییرات اقلیمی چندشرایطی در استان مازندران نشان دهد و از پیش‌بینی‌های بیش‌ازحد خوش‌بینانه عملکرد مرتبط با تغییرات اقلیمی جلوگیری کند. تحلیل جفت‌شده دسترسی به آب و عملکرد محصول امکان ارزیابی حساسیت میان انتخاب محصول، زراعت و متغیرهای اقلیمی مانند دما و بارش را فراهم می‌آورد.

#### منابع

- [1] L. Parviz, "Assessing accuracy of barley yield forecasting with integration of climate variables and support vector regression," 2019.
- [2] S. Bulukazari, H. Babazadeh, N. Ebrahimipak, S. H. Mousavi-Jahromi et al., "Optimization of water and land allocation in salinity and deficit- irrigation conditions at farm level in Qazvin plain," 2022.
- [3] A. Daghighi, A. Nahvi, and U. Kim, "Optimal Cultivation Pattern to Increase Revenue and Reduce Water Use: Application of Linear Programming to Arjan Plain in Fars Province," 2017.
- [4] A. Ghaffari, M. Nasser, and A. Pasebani Someeh, "Assessing the economic effects of drought using Positive Mathematical Planning model under climate change scenarios," 2022.
- [5] A. Gonzalez-Sanchez, J. Frausto-Solis, and W. Ojeda-Bustamante, "Attribute Selection Impact on Linear and Nonlinear Regression Models for Crop Yield Prediction," 2014.

## نقش و ارتباط نظریه بازی ها در علوم سیاسی و روابط بین الملل

فرهاد عباسی<sup>۱</sup>، عضو هیئت علمی گروه علوم سیاسی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۶، تهران،  
ایران

[farhadAbbasi785@yahoo.com](mailto:farhadAbbasi785@yahoo.com)

**چکیده:** سوال مقاله این است که به چه طریق می توان در سیاست و روابط میان دولت ها و ملت ها قواعد و الگوهای مشخصی یافت که در چارچوب نمادهای ریاضی قابل بررسی باشند؟ علوم ریاضیات را می توان بسیار در هر علمی رویت کرد و به عبارتی دنیا بر پایه ی ریاضیات کار می کند. در زمان حاضر متداول است که توده مردم از سیاست به منزله یک بازی یاد می کنند.

هدف این پژوهش، بررسی نقش و کاربرد نظریه بازی ها در حوزه علوم سیاسی و روابط بین الملل است. آشکار کردن علایق مشترک نظریه پردازان بازی ها و اندیشمندان علم سیاست اهمیت بسزایی دارد. مقصود هر دو گروه به نظم کشیدن یک مجموعه ی مختلفی از رفتارهای انسان است. محققان مدل های نظریه بازی هایی را ارائه کرده اند که در آن رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت استراتژیک و تضاد منافع را مدل سازی کنند. این وضعیت هنگامی به وجود می آید که موفقیت افراد نه تنها به راهبرد انتخاب شده توسط خود آنان بلکه وابسته به راهبردهایی است که بازیگران دیگر انتخاب می نمایند.

در این تحقیق تلاش گردیده، با رویکرد تحلیلی-توصیفی و به شیوه کتابخانه ای و استنادی، ارتباط ریاضیات و کاربرد نظریه بازی ها در روابط بین الملل و علوم سیاسی مورد واکاوی قرار گیرد.

**کلمات کلیدی:** نظریه بازی ها، روابط بین الملل، علوم سیاسی.

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

## ۱. مقدمه

نظریه بازی ها یک قالب تحلیل برای تبیین تراکنش های پیچیده میان بازیگران منطقی به کمک ابزار ریاضیات، ارائه می نماید. هدف از گسترش این نظریه بررسی راه های عقلایی مواجهه گروه ها و یا افراد متضاد، از جمله علوم سیاسی و کسب اطمینان از برنده شدن یکی از این بازیگران می باشد (امینی نژاد، ۱۳۹۸: ۱۲۹). اکثر ما در زندگی روزمره خود بازی های زیادی انجام می دهیم و همگی از یک شیوه ریاضی مبنی بر نظریه بازی ها پیروی می کنیم. حتماً می دانید که موفقیت در هر بازی صرفاً تابع شانس نیست بلکه قوانین و اصول خاص خود را دارد و البته هر بازیکن در خلال بازی تلاش می کند با استفاده از آن اصول خود را به برد نزدیک کند. واضح است در این میان فردی پیروز میدان خواهد بود که بیش از سایرین این قوانین را بشناسد و از آن ها بهره بگیرد. نظریه بازی ها با استفاده از استدلال ریاضی و تحلیل های منطقی بر پایه ی اصل هزینه و فایده می تواند در شرایط بحرانی، ایجاد ائتلاف و اتحاد و مسابقات تسلیحاتی به کمک تصمیم گیرندگان در دولت ها بیاید. منطقی که در نظریه بازی ها وجود دارد به دولت ها همچون کنشگران اصلی در روابط بین الملل این اجازه را می دهد که نیازها و خواسته های امنیتی، نظامی، استراتژیک، سیاسی، اقتصادی و فرهنگی را در کوتاه مدت و یا بلند مدت فراهم نمایند. بدین سان در راستای استدلالات موجود در نظریه بازی ها، سلسله مراتبی بابت اهداف متنوع ملی برای دولت ها در نظر گرفته می شود. نکته اصلی و محوری در نظریه بازی ها آن است که تمامی انتخاب هایی که به وسیله دولت ها در راستای نظریه مذکور انجام می گیرد، حالت تعاملی دارد (عبادی زاده، ۱۳۹۸: ۳۶). مقاله حاضر تلاش دارد با تمرکز بر نظریه بازی ها، نقش و تأثیر آن را در حیطه علوم سیاسی و روابط بین الملل مورد تحلیل قرار دهد

### ۱-۱. مفهوم نظریه بازی ها

نظریه بازی ها یکی از مفاهیمی است که در طی دهه های اخیر به صورت گسترده در شاخه های گوناگون از علوم مثل علوم سیاسی و روابط بین الملل مورد استفاده قرار گرفته است. مفهوم نظریه بازی ها با تعاملات بشر و تقابلات افراد با همدیگر در ارتباط است. نظریه بازی ها متدولوژی است که از ابزارهای ریاضی برای مدل سازی و تجربه و تحلیل وضعیت هایی که در بردارنده چندین تصمیم گیرنده می باشد، بهره می گیرد. نظریه بازی ها کوشش می کند رفتار را در شرایط راهبردی، که در آن موفقیت فرد در انتخاب کردن وابسته به انتخاب دیگران است، مورد تبیین و ارزیابی قرار دهد. نظریه بازی ها، بررسی رفتار منطقی در موقعیتی است که وابستگی متقابل وجود دارد. وابستگی متقابل یعنی این که هر بازیگر از آنچه که دیگران در بازی انجام می دهند، تأثیر می پذیرد، رفتار خود بازیگران هم بر دیگران اثر می گذارد، خروجی بازی وابسته به تصمیمات همه است و هیچ کسی کنترل کامل بر آنچه که اتفاق می افتد را ندارد (عطار و همکاران، ۱۳۹۷: ۹۱). در تئوری بازی ها یک بازی شامل مجموعه ای از قواعد شناخته شده برای همه بازیکنان است که می بایست به شکل آگاهی عمومی درآیند. هر بازیکن باید قاعده بازی را بداند و هر بازیکن باید بداند که رقیب نیز قاعده بازی را می داند. و نیز استراتژی نوعی مهارت فکری و ذهنی جهت خوب بازی کردن در یک بازی است. به عبارت دیگر، محاسبه ی استفاده مهارت به بهترین وجه در بازی می باشد (عبدلی، ۱۴۰۳: ۳-۱۲). یعنی استراتژی بکارگیری کلیه امکاناتی می باشد که هدف آن فراهم آوردن موقعیتی است که طی آن دشمن از طریق روانی مجبور به تسلیم در برابر خواسته ها شود (سیف زاده، ۱۴۰۳: ۲۶۸). در یک بازی با حاصل جمع صفر بین بازیگر الف و ب، هر میزان امتیازی که الف به دست آورد، به همان اندازه امتیاز از دست می دهد. در انتهای هر کدام از این بازی ها، یک بازیگر امتیاز ۱ و بازیگر دیگر امتیاز ۱- خواهد داشت و به بیان دیگر مجموع بردها و باخت ها صفر است؛ ولی در بازی با حاصل جمع غیر صفر، جمع جبری امتیاز بازیگران لزوماً صفر نخواهد بود. در این نوع از بازی ها منافع بازیگران می تواند سازگار یا یکدیگر باشد (عبادی زاده، ۱۳۹۸: ۴۰). هدف غایی

تئوری بازی ها تدوین تجویزات و پیشنهادهایی جهت رفتار عقلایی بازیگران در وضعیت های تعارض آمیز و معین کردن استراتژی بهینه برای هر بازیگر است.

## ۲. کاربردهای نظریه بازی ها در علوم سیاسی و روابط بین الملل

امروز تردیدی وجود ندارد که روش های کمی در پژوهش هایی از جنس شناخت الگوهای همبستگی و تأثیرات متقابل متغیرها در پدیده های مبهم سیاسی، می توانند کاربرد فراوانی داشته باشند. تکنیک های ریاضی و ترجمه پدیده ها به رقم و نمودار اجازه می دهد که تعداد زیادی از این پدیده ها را به صورت همزمان با هم مقایسه کنیم، شاخص های همراه با هر یک را با دقت بالایی تحلیل نماییم و ارزیابی را بسیار پیش ببریم. لذا وارد کردن ریاضیات در یک علم، به آن علم چنان ابزاری جهت بررسی می دهد که کارآمدی آن با روش های مقایسه ی کلاسیک، قابل قیاس نیست (سلیمی و کیانی، ۱۳۹۵: ۱۴۴-۱۴۵). نظریه ی بازی ها در موارد بسیاری کاربرد دارد که اصلی ترین آن ها پیش بینی نتایج، توضیح واقعیت و توصیه می باشد. این نظریه در تجزیه و تحلیل موضوعات پیچیده و چند بعدی خیلی دشوار هم کاربرد دارد. تئوری بازی ها چشم اندازی هایی در واکاوی چانه زنی و تصمیم ارائه می دهد و در آشکار ساختن اصطلاحاتی مانند عقلایی بودن، سودمندی و ائتلاف ها دارای ارزش می باشد. حوزه های کاربرد نظریه بازی ها کل زندگی سیاسی را شامل می شود. این نظریه، هم روشی برای اندیشیدن در مورد تعارض و تصمیم گیری است و هم ابزاری جهت کشف استراتژی های بهینه و یا روشن ساختن مشکلات اقتصادی. تحت عنوان کلی کمک های تحلیلی می توان ادعا کرد که نظریه ی بازی ها ماده خامی در اختیار دانشمندان علوم سیاسی قرار می دهد که از آن مدل هایی دقیق، نیرومند و صرفه جویانه بسازد؛ مدلی هایی که به هر طریقی ممکن است برتری بارزی برمدل های موجود داشته باشند. این نظریه مجموعه ای از مفاهیم مرتبط با هم را مطرح می سازد که می توان از آن ها چارچوبی بابت تفکر درباره بعضی پدیده های بی نهایت پیچیده، و ابزاری به منظور دقیق تر کردن سایر ابزارها ساخت. سیاستگذار غالباً در وضعی است که یا باید یک حدس تصادفی بزند و یا از برخی اطلاعات کاملاً چشم پوشی کند. در آن دسته مواردی که اساساً پای تصمیم گیری آماری در میان است ممکن است نظریه ی بازی ها کمک قابل توجهی ارائه نماید. نظریه پردازان بازی ها که براساس قراردادهای حکومتی روی برنامه ریزی خطی کار کرده اند گواهی می دهند که سیاستگذاران غالباً مسائل خویش را به روشنی تعریف نمی کنند. یکی از کمک هایی که نظریه پرداز بازی ها می کند، یافتن آنچه واقعاً برای سیاستگذار ملالت بار است از طریق فرایند صوری کردن گفته های اوست. صوری کردن موقعیت های تصمیم گیری گاه از داده هایی پرده بر می دارد که مورد غفلت بوده یا بدیهی انگاشته شده اند (اسنایدر، ۱۳۷۸: ۱۳۲-۱۳۶). در نظریه بازی ها، مبانی فلسفی نظریه توازن قدرت با اضافه کردن ریاضیات و کاربرد منطق همراه می شود تا فراتر از عقلانیت و منطقی فرض کردن دولت ها و اختیار آنان درک و تحلیل بهتری از اجبارهای اقتصادی، سیاسی و بین المللی دولت ها و حساسگری مادی و منفعت محور آن به دست آید (شریف زاده و همکاران، ۱۴۰۱: ۱۳۶).

## ۳. نتیجه گیری

این پژوهش به ارتباط دو حوزه ریاضیات و علم سیاست پرداخته و به نقش و کاربرد نظریه بازی ها در روابط بین الملل و علوم سیاسی اشاره کرده است. نظریه بازی ها بر نوعی استدلال انتزاعی حاصل ترکیب ریاضیات و منطق

برقرار است. نظریه پردازان بازی ها اعتقاد دارند که افرادی که در بازی شرکت می کنند با محاسبه گرایی عقلانی و با حدس زدن اقدامات طرف مقابل خود عمل کرده و کوشش می کنند که از طرف مقابل امتیاز کسب نمایند. بدین سان هدف نظریه بازی ها محاسبه مطلوب ترین رفتار بازیگر در موقعیت مشخصه می باشد.

## منابع

- ۱- اسنایدر، ریچارد (۱۳۷۸). نظریه ی بازی ها و تحلیل رفتار سیاسی. مجله اطلاعات سیاسی- اقتصادی، شماره ۱۴۵ و ۱۴۶، صص ۱۲۴-۱۳۷.
- ۲- امینی نژاد، محمد (۱۳۹۸). کاربرد تئوری بازی ها در نظام سیاسی. مجله دستاوردهای نوین در مطالعات علوم انسانی، سال دوم، شماره ۲۲، صص ۱۲۸-۱۳۱.
- ۳- ریتزر، جورج (۱۴۰۱). نظریه جامعه شناسی در دوران معاصر. ترجمه محسن ثلاثی. انتشارات علمی.
- ۴- سلیمی، حسین و کیانی، علی اکبر (۱۳۹۵). فلسفه ریاضیات در علوم سیاسی و روابط بین الملل. پژوهشنامه علوم سیاسی، سال دوازدهم، شماره اول، صص ۱۴۱-۱۶۶.
- ۵- سیف زاده، حسین (۱۴۰۳). اصول روابط بین الملل. نشر میزان.
- ۶- شریف زاده، زهرا؛ میکوشش، امیر هوشنگ و حسینی، محمد مهدی (۱۴۰۱). نقش نظریه بازی ها و هوش مصنوعی در روابط بین الملل. فصلنامه مطالعات سیاسی، دوره ۱۵، شماره ۲، صص ۱۲۵-۱۴۶.
- ۷- عبادی زاده، حجت الله (۱۳۹۸). شبیه سازی ریاضی تعاملات و استراتژی های جمهوری اسلامی ایران و عربستان سعودی به کمک نظریه بازی ها. مطالعات بین رشته ای دانش راهبردی، سال نهم، شماره ۳۵، صص ۳۵-۵۶.
- ۸- عبدلی، قهرمان (۱۴۰۳). نظریه بازی ها و کاربردهای آن. انتشارات جهاد دانشگاهی.
- ۹- عطار، سعید؛ رسولی ثانی آبادی، الهام و جرگه، معصومه (۱۳۹۷). بررسی مناقشه هسته ای ایران و کشورهای ۵+۱ بر اساس نظریه بازی ها. فصلنامه پژوهش های راهبردی سیاست، سال هفتم، شماره ۲۷، صص ۸۷-۱۱۴.